Eylül 2013 Cilt:21 No:3 Kastamonu Eğitim Dergisi 1235-1252

ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN SONSUZLUK ALGILARI

Tevfik İŞLEYEN
Atatürk Üniversitesi, KKEF, Matematik Eğitimi ABD, Erzurum.

İlk Kayıt Tarihi: 23.05.2013 ***Yayına Kabul Tarihi: 16.07.2013***

Özet

Bu çalışmada ortaöğretim öğrencilerinin sonsuzluk kavramını nasıl algıladıklarını tespit etmek amaçlanmıştır. Nitel araştırma yöntemlerinden olgu bilim deseni kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları 38'i kız, 34'ü erkek olmak üzere toplam 72 ortaöğretim öğrencisinden oluşmaktadır. Veri toplama aracı olarak açık uçlu bir test ve odak grup görüşmesi kullanılmıştır. Çalışmadan elde edilen verilerin analizinde betimsel ve içerik analizi kullanılmıştır. Görüşme verilerin analizinden elde edilen kategoriler, kodlar ve kodlara ilişkin frekanslar oluşturulmuştur. Öğrencilerin sonsuz kümelerin bire-bir eşleştirilmesi konusunda birtakım tereddütlerinin oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerin günlük yaşam tecrübeleriyle her şeyin bir sonunun olduğunu gözlemlemeleri, sonsuzluk anlayışlarını da kısıtlamış ve matematiksel sonsuzluk anlayışından uzaktır. Matematiksel sonsuzluk anlayışının geliştirilmesi gerekir.

***Anahtar Kelimeler**: Sonsuzluk algısı, Matematiksel sonsuzluk, Potansiyel sonsuzluk.*

HIGH SCHOOL STUDENTS' PERCEPTIONS OF INFINITY

Abstract

The aim of this study was to determine how secondary high students school students perceived the concept of infinity. Phenomenological design, which is among the qualitative research methods, was used in this study. The participants of the study were 72 secondary high school students (38 females and 34 males). An open-ended test and focus group discussion were used as the data collection tools. Descriptive analysis and content analysis were used in analyzing the data that was obtained from the study. Categories, codes and frequencies about the codes were formed, which were obtained from the analysis of discussion data. It was found that the students experienced a number of hesitations in one-to-one correspondence of infinite sets. The fact that the students observed that everything has an end through daily life experiences limited their understanding of infinity. This condition does not fit the understanding of mathematical infinity. The understanding of mathematical infinity must be developed.

***Key words:** Infinity perceptions, mathematical infinity, potential infinity*

1. Giriş

Matematik ve felsefenin merkezinde yer alan sonsuzluk kavramı kadar insan zihnini meşgul eden, düşündüren ve zorlayan başka kavramlara az rastlanır. Boyer (1949)'a göre; Sonsuzluk kavramının başlangıcı eski Yunan medeniyetine kadar dayanır ve sonsuzluk (infinity) sözcüğü eski Yunancada "sınırsız", "belirsiz", "tanımlanmamış" anlamına gelen "apeiron" kelimesinden türetilmiştir (Akt. Kim, Sfard and Ferrini-Mundy 2005). Kavramın özünün zor olmasını Ruckey (1982) şöyle ifade etmektedir: "Sonsuzu hayalde canlandırmak zor. En uzak yıldızdan bile öteye uzanan karanlık ölü bir boşluk. Bir karabasanda içine düştüğümüz dipsiz bir kuyu. Kuyruğunu yakalamaya çalışan köpek örneği, bir mantık zincirinin daire çizerek hep aynı noktaya varması" (Akt. Alsan, 1983).

Sonsuzluk kavramı düşünce tarihinin en eski problemlerinden biri olup sadece matematikçilerin değil, düşünen ve merak eden herkesin ilgisini çekmiştir. Buna karşın sonsuzluk kavramının matematiğin ilgi alanına girmesi geç dönemlerde olmuştur. Hatta milattan önce varlığı keşfedilen π sayısı virgülden sonra sonsuz basamağa sahip olmasına rağmen bu özelliği bile farklı şekillerde ifade edilmiştir. Benzer şekilde irrasyonel sayıları keşfeden Pisagor ve onun takipçilerinin bile sonsuzlukla ilgilenmedikleri görülmektedir (Allen, 2000). O'Connor ve Robertson (2002)'e göre; Aristo sonsuzluk kavramını irdelerken potansiyel ve fiili sonsuzluk olarak adlandırdığı iki tür sonsuzluktan bahsetmektedir. Potansiyel sonsuzluk sürekli devam eden fakat herhangi bir noktasında sonlu olan bir sürece işaret etmektedir. Fiili sonsuzluk ise tam halde, bir bütün olarak, sonsuzluğa işaret eder. Aristo'ya göre fiili sonsuzluk kaçınılması gereken ve kabulü mümkün olmayan bir kavramdır. Bir örnekle açıklamak gerekirse, doğal sayıları ele aldığımızda bu sayıları ne kadar sayarsak sayalım, doğal sayıların hepsini bir bütün olarak tamamlamak mümkün değildir; ulaşılan noktadan geriye dönüp bakıldığında sonlu sayıda doğal sayının sayılmış olduğu görülecektir. Buradan hareketle, Aristo perspektifinden bakıldığında, doğal sayıların fiili olarak sonsuz olmadığı söylenebilir. Fakat sayılabilecek her bir doğal sayıdan daha büyük bir doğal sayının var olduğu söylenebilir ki bu da doğal sayıların potansiyel olarak sonsuz olduğu anlamına gelir. Aristo insan düşüncesinin/zihninin potansiyel sonsuzluğa izin verebileceğini ama fiili sonsuzluğun aslında 'anlamsız' olduğunu dile getirmektedir (Akt. Özmantar, 2010). Sonsuzun bu karmaşık düşüncesi belli bir süre sonsuz kavramını matematiğin dışında tutmuştur. Birçok ünlü matematikçi sonsuz kavramını sadece konuşma diline ait bir kavram olarak algılamışlar veya sonsuz kavramı hakkında konuşmaktan kaçınmışlardır. 16. Yüzyılda Galile doğal sayılar kümesi ve bu kümenin karelerinden oluşan kümeyi bire-bir eşlediğinde, çıkan sonuca kendisi de inanamamıştır. Bu eşleme literatüre Galile paradoksu olarak girmiştir (Clegg, 2003). 17. Yüzyıla gelindiğinde sonsuz kavramından daha fazla kaçılamadı. Matematiksel analiz konuları beraberinde "sonsuz küçük" ve "sonsuz büyük" kavramlarını getirdi. Bu potansiyel sonsuzluk kavramını dolaylı yoldan kullanmaktı. "Sonsuz elemanlı küme" kavramı 19. yüzyılın ortalarına kadar dokunulmaz bir kavram olarak kaldı. Matematikte kullandığımız sonsuz kavramı 19. yy sonuna kadar tam olarak bilinmiyordu ve bu kavramla ilgili büyük bir karışıklık söz konusuydu. Bu karışıklık, George Cantor tarafından ortaya koyulan kümeler kuramının gelişmesiyle birlikte matematikte '"sonsuz"un ne anlama gelmesi gerektiği anlaşıldı. Aristo'dan Cantor'a kadar geçen zaman diliminde "sonsuz" anlayışı, temelde Aristo'nun görüşü olan, şu anlayıştır: Sonsuz, ufuk çizgisi gibi, var olmayan ama konuşma kolaylığı sağladığı için kullandığımız bir kavramdır. Bu kavramı "sınırsızlık" kavramı yerine kullanırız; bir şey, çoğalarak ya da büyüyerek, önceden belirleyeceğimiz birçokluğun ya da büyüklüğün ötesine geçme potansiyeline sahipse, o şeye sonsuza gidiyor deriz. Başka bir deyimle, Aristo'nun sonsuz anlayışı "potansiyel sonsuz" anlayışıdır. Cantor'a göre ise "sonsuz" tek başına manalı bir söz değildir; manalı olan "sonsuz küme" kavramıdır; sonsuz kümeler ise var olan nesnelerdir. Gauss' a göre ise; sonsuzluk kavramının matematiksel bir değeri yoktur ve bu sadece bir tür konuşma şeklidir. Hegel' de sonsuzluğu; sonlu bir şeyin kendi sınırından dolayı tekrar sonlu bir şeye olumsuzlanarak gidilmesi ve benzeri şeyin gidilen noktada da başka bir şey için böyle sürekli tekrar etmesi durumu şeklinde ifade etmiştir (Dursun, 2007).

Her ne kadar Aristo'dan beri birçok matematikçi kabul etmese de günümüzde farklı sonsuzluk anlayışları da mevcuttur (Aztekin, Arıkan ve Srirasman , 2010). Örneğin aynı zamanda bir matematik eğitimcisi olan David Tall; sonsuzluğu doğal (natural) ve formal olmak üzere ikiye ayırır. Bütün sonsuzluk anlayışlarının kişinin sonlu deneyimleri sayesinde geliştiğini belirtir (Tall, 2001). Tall'un iddialarına göre, çocukların karşılaştığı sonsuzluk ile ilgili yaşantılar daha çok "sonsuzu ölçen sayı" kavramı ile ilişkilidir ve kardinal sayı teorisi ile karşılaştırıldığında standart olmayan analizin modern teorisine daha yakındır (Arıkan, 2008). "Sonsuzu ölçen sayı" kavramı: daha uzun olan doğrunun diğerinden daha fazla noktaya sahip olacağı ya da bir AB doğrusunun boyu CD doğrusunun iki katı ise AB doğrusu CD doğrusunun iki katı kadar nokta içerir anlamında kullanılmıştır(Tall, 1980) . Sonsuzluk kavramı bu kadar kompleks olunca haliyle öğretilmesi ve öğrenilmesi de zordur. Fischbein, Tirosh ve Hess (1979) Piaget ve Inhelder'ın (1956) çalışmasının, çocukların sonsuzluğu anlamaları ile ilgili çalışmaların başlangıcı olarak kabul edilebileceğini dolaylı olarak ifade etmektedir. Yine Piaget'in bilişsel gelişim kuramında çok bilindik olan sayı ve uzunluğun korunum ilkesi bu manada Tall'ın "sonsuzluğu ölçen sayı" kavramıyla ilişkilendirilebilir. Çünkü Piaget'in aynı uzunluğa sahip olan iki çubuğun önce çocuklar tarafından aynı uzunlukta kabul edilip sonra konumları farklı yapıldığında birinin daha uzun olduğunu iddia etmeleri ile öğrencilerin önce AB ve CD doğrularının sonsuz nokta içerdiğini bilip, AB doğrusunun boyu CD doğrusunun iki katı ise AB doğrusunun CD doğrusundan daha fazla noktası vardır demeleri benzer bir durumdur. Bu durumu Tall (1980), günlük hayatta daha uzun olan daha çoktur ve gözlemler hep sonlu kümelerde yapıldığı için bu sezgisel gözlemleri sonsuz kümelere taşıma çabası olarak açıklamaktadır. Her ne kadar sonsuzlukla ilgili çalışmaları olmasa da Tall'ın açıklamalarına benzer bir açıklamayı Di Sessa (1988, 1993) te görmekteyiz. "Yazın kışa göre niçin sıcaktır? sorusunu öğrencilerin yazın dünya güneşe daha yakındır şeklinde cevap vermelerini sorulan sorunun son derece soyut yapısıyla açıklar. Çünkü o ana kadar çocukların gözlemleri hep bu yöndeydi. Duyu organlarıyla hep bu şekilde deneyim yaşadılar. Bir çiçeğe ne kadar yakın olduysalar o kadar fazla kokusunu duydular, çalan bir müziğe ne kadar yakın olduysalar o kadar çok ses işittiler vb. deneyimlerinden hareket ederek yazın dünyanın güneşe daha yakın olduğunu iddia etmektedirler. Konu matematiksel sonsuzluk olmazsa bile Di Sessa'nın açıklamaları ile Tall'ın açıklamaları paralellik taşımaktadır.

Tsamir (2001) öğrencilerin sonsuzluk ile ilgili algılarını incelemiş ve öğrenci yaklaşımlarını,

a) Parça-bütün ilişkisi (bir kümenin herhangi özalt kümesi, o kümeden daha az elemana sahiptir),

b) 'Sonsuzluk tektir' anlayışı (sonsuz tek olduğundan bütün kümeler aynı sayıda elemana sahiptirler)

c) Sonsuz nicelikler karşılaştırılamaz yaklaşımı

d) Bire-bir eşleme yöntemi.

Olmak üzere dört madde de toplamıştır.

Yine bu konuda Tsamir ve Tirosh (1999) ve Tsamir ve Dreyfus (2002) lise ve üniversite düzeyinde yapmış oldukları çalışmalarda {1, 2, 3, 4, 5 ... } ve {1, 4, 9, 16, 25 ... } kümelerinin yatay, dikey ve sayısal-açık formları öğrencilere sunulmuş hangi kümede daha fazla elemanın olduğu sorusuna cevap aranmıştır. Bu kümeler yan yana (yatay) verildiğinde öğrencilerin çoğu parça-bütün ilişkisinden yola çıkarak birinci kümede fazla eleman olduğunu belirtmişlerdir. Oysa aynı kümeler dikey (alt alta) verildiğinde her iki kümenin eleman sayısı eşittir diyen öğrenci sayısı artmıştır. Bu iki küme sayısal-açık (ikinci küme: {12, 22, 32, 42, 52 ,... } şeklinde) yazıldığında eleman sayısı eşittir diyen öğrenci sayısı bir hayli artmıştır. Benzer bir çalışmada Fischbein (2001) , uzunluğu farklı iki doğru parçasında eşit sayıda nokta olduğunu öğrencilerin kabul etmekte zorlandıklarını belirtmektedir.

İnsanlığı sürekli meşgul eden ve matematik bilimine zor günler yaşatan sonsuzluk (Yıldırım, 1996) doğası gereği algılanması ve dolayısıyla öğrenilmesi güç bir kavramdır. Bu yüzden böylesine zor bir kavramın öğrenciler tarafından nasıl algılandığını belirlemek önemlidir. Bu çalışmada ortaöğretim öğrencilerinin sonsuzluk kavramını nasıl algıladıklarını tespit etmek amaçlanmıştır. Bu sayede öğrencilerin sonsuzluk kavramına yönelik yanlış anlayışlarının ve karşılaştıkları güçlüklerin giderilmesi yönünde fayda sağlanabilecektir.

2. Yöntem

2.1. Araştırma Deseni

Bu çalışmada, nitel araştırma yöntemlerinden olgu bilim deseni kullanılmıştır. Olgu bilim; bireylerin farkında olduğu ancak derinlemesine ve ayrıntılı bir anlayışa sahip olmadığı olgular ile ilgili algılarını, yaşantılarını ve bu olgulara yüklediği anlamların neler olduğunu ortaya çıkarmaya çalışan, genelde veri toplama aracı olarak görüşmelerin kullanıldığı genellenebilir sonuçlara varmayı hedefleyen bir nitel araştırma desenidir. Olgu bilim araştırmalarında veri kaynakları, araştırmanın odaklandığı olguyu yaşayan ve bu olguyu dışa vurabilecek veya yansıtabilecek bireyler ya da gruplardır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu nedenle çalışmada, ortaöğretim öğrencilerin sonsuz kavramına ait tanım veya tanımlarının yanında sonsuz ile ilgili işlemlere ait düşüncelerinin neler olduğu olgu bilim kullanılarak, sohbet tarzında yapılan odak grup görüşmesi ve açık uçlu bir soru yardımı ile belirlenmeye çalışılmıştır.

2.2. Katılımcılar

Bu çalışmanın katılımcılarını 38'i kız, 34'ü erkek olmak üzere toplam 72 ortaöğretim öğrencisi oluşturmaktadır.

2.3. Veri Toplama Araçları

Bu çalışmanın veri toplama araçları, öğrencilere "sonsuzluk kavramı hakkındaki tanım ya da tanımlarınız nedir?" şeklinde yöneltilen bir açık uçlu soruya öğrencilerin verdikleri cevapları teyit etmek amacıyla bireylerin grup içindeki etkileşimi ve dinamiklerinin verilen yanıtların kapsamını ve derinliğini etkileyen önemli bir etken (Yıldırım, 2008) olmasını dikkate alan sohbet tarzında odak grup görüşmesi tekniğinden oluşmaktadır. Görüşme, önceden belirlenmiş ve bir amaç için yapılan, soru sorma ve yanıtlama tarzına dayalı karşılıklı ve etkileşimli bir iletişim sürecidir (Stewart ve Cash, 1985). Bu tanımda süreç, "iletişimdeki sürekliliği ve dinamikliği", karşılıklı, "iki veya daha fazla birey arasında gerçekleşen karşılıklı etkileşimi", etkileşimli, "görüşmeye dahil olan bireyler arasında oluşan bireyler arası bağı", önceden belirlenmiş bir amaç, "görüşmeye dahil bireylerden en az birinin belli bir amacı olduğunu ve bu amaca yönelik bilgi toplama çabası olduğunu" ifade eder (Yıldırım ve Şimşek 2006). Patton (1987)'e göre görüşmenin amacı, bir bireyin iç dünyasına girmek ve onun bakış açısını anlamaktır.

Öğrenciler 18 erli 4 gruba rastgele ayrılarak her bir grup ile 45 dakika olmak üzere; toplamda 180 dakikalık bir odak grup görüşmesi yapılmıştır. Odak grup görüşmeleri öğrencilerin önceden izinleri alınarak kamera ile kayıt altına alınmıştır. Odak grup görüşmesinde gruplar ile bir ders saati süresince (45 dakika) öğrencilerle "sonsuz" denilince akıllarına nelerin geldiği ve zihinlerinde nelerin canlandığı hakkında bilgi alış verişinde bulunulmuştur. Görüşme esnasında öğrencilerin sonsuz ile ilgili tanımları ve sonsuz ile yapılan işlemler; örneğin "sonsuz ile sonsuzun toplamı hakkında neler söyleyebiliriz?" ya da "sayı doğrusu üzerinde verilen bir açık aralıkta kaç tane reel sayı bulunur?" veya "bir açık aralığı sonsuz parçaya ayırabilir miyiz?"... gibi sorular öğrencilerle paylaşılmış ve onların vermiş olduğu cevaplar sınıfta bulunan bir gönüllü öğrenci tarafından not edilmiştir. Aynı zamanda öğrencilerden birinin ortaya sürmüş olduğu tanım veya cevaba kaç kişinin katıldığı sorulmuş ve katılan kişi sayısı yanına not alınmıştır ve bu işlemlere ilave olarak görüşmeler kameraya kaydedilmiştir.

2.4.Veri Analizi

Çalışmadan elde edilen verilerin analizinde betimsel ve içerik analizi kullanılmıştır. İçerik analizinde temel amaç, toplanan verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır. Bu analizde yapılan temel işlem ise; birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayacağı bir biçimde düzenleyerek yorumlamaktır (Yıldırım ve Şimşek 2006). Öğrencilere yöneltilen "sonsuzluk kavramı hakkındaki tanım ya da tanımlarınız nedir?" şeklindeki açık uçlu soruya öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar gruplandırılarak kategoriler oluşturulmuştur. Daha sonra verilen cevapları teyit etmek ve bireylerin grup içindeki etkileşimi ve dinamiklerinin verilen yanıtların kapsamını ve derinliğini etkileyen önemli bir etken (Yıldırım,2008) olmasını dikkate alarak sohbet tarzında odak grup görüşmesi tekniğinden yararlanılmıştır. Odak grup görüşmeleri ve açık uçlu soru sayesinde toplanan veriler transkript edilip ayrı ayrı belgelere yazılarak bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Daha sonra transkriptler birçok defa okunduktan sonra ayrı ayrı değerlendirilerek kaydedilen görüntüler ve daha önceden elde edilen tanımlar karşılaştırılmış ve her ikisi beraber değerlendirilerek, öğrencilerin konu ile ilgili anlayışlarının genel olarak daha sağlıklı değerlendirilmesine imkân sağlayacak tablo oluşturulmuştur. Ayrıca görüşmelerden elde edilen verilerden alıntılar yapılarak da çalışmanın güvenirliği sağlanmıştır. Görüşme verilerin analizinden elde edilen kategoriler, kodlar ve kodlara ilişkin frekanslar tablolarda yer almaktadır. Ayrıca öğrencilerle yapılan görüşmeler sonucu elde edilen veriler birbiri ile ilişkilendirilerek yorumlanmıştır.

3. Bulgular

Bu bölümde öğrencilere yöneltilen "sonsuzluk kavramı hakkındaki tanım ya da tanımlarınız nedir?" açık uçlu sorusuna vermiş oldukları cevaplar ve sohbet tarzında odak grup görüşmesi sonucu elde edilen bulgular ortaya konulmuştur. Öğrencilerin sonsuzluk kavramı ile ilgili görüşleri tablolarda verilmiştir.

Tablo 1. Öğrencilerin "sonsuzluk; bitmez, tükenmez, sürer" kategorisine ait Kod ve Frekans Tablosu

Kategori	Kodlar	f
Sonsuzluk bitmez, tükenmez, sürer.	Sonsuzluk hiç bir zaman bitmeyen bir şey	26
	Sonsuz hiç durmadan devam eder, gider	25
	Sonsuza sayarak ulaşamayız, ömrümüz yetmez	18
	"Sonsuza değin" bitmeyen bir süredir	16
	Sonsuz sonu olmayan bir süreçtir	13
	Sonsuzu sayamayız, sonsuz sayılamayandır	11
	Sonsuzluğa hiçbir zaman ulaşılamaz	3

Tablo 1 incelendiğinde, 26 öğrenci sonsuzu hiçbir zaman bitmeyen bir şey olarak ifade etmişlerdir. Bu kategoride sonsuzluk bitmez, tükenmez ve süregiden bir kavram olarak açıklanmıştır. Ayrıca sonsuza biçilen bitmez, tükenmez yorumu dolaylı olarak sonsuzun sayılamayacağı yorumunu da beraberinde getirdiği söylenebilir. Odak grup görüşmesi sırasında öğrencilerin sonsuz kavramı ile ilgili ifadelerinden ikisi aşağıda verilmiştir.

Ö1: Sonsuz denilince aklıma öncelikle hiç bitmek bilmeyen, ucu bucağı olmayan ve çok büyük olan ama tam olarak ne olduğunu bilemediğimiz bir şey gelir. Mesela biz küçükken aklımızdan sayı tutmaca oyunu oynardık ve arkadaşımızda bunu tahmin etmeye çalışırdı işte burada ona aşağı yukarı diye ipucu verirdik ya bu oyunda arkadaşımızın hiçbir zaman bilemeyeceği sayıya sonsuz diyebiliriz…

Ö2: Sonsuz denilince aklıma ilk gelen çizgi filmlerde gördüğüm o kocaman boşluk geliyordu ama biraz önce siz sorduğunuzda ilk aklıma gelen saymakla sonuna ulaşamayacağımız ya da saymaya insanın kedi ömrü ya da kardeşinin ömrü hatta hiç kimsenin ömrünün yetemeyeceği kadar çok büyük bir sayıdır …

Öğrencilerle yapılan görüşmeler sonucunda öğrencilerin genel düşüncesinin sonsuzun çok büyük bir şeyi ifade eden kavram yönünde olduğu tespit edilmiştir.

Tablo 2. Öğrencilerin "Sonsuzluk belirsizliktir veya bu dünyaya ait değildir." kategorisine ait Kod ve Frekans Tablosu

Kategori	Kodlar	f
Sonsuzluk belirsizliktir veya bu dünyaya ait değildir.	Sonsuz bildiğimiz, belirli bir sayı değildir.	29
	Sonsuza gerçek hayattan bir örnek veremeyiz	17
	Sonsuz çok büyük, belirli olmayan bir şey	11
	Sonsuzu sayamayız, sonsuz sayılamayandır	9
	Tam olarak ne olduğunu bilemediğimiz çok büyük bir şey	9
	Sonsuz tane elma, kalem,…nesne olamaz	5
	Sonsuzdan bir büyük çok fazla ama belirsiz	4

Tablo 2 incelendiğinde 29 öğrenci sonsuzluğun bir sayı olmadığını belirttiği görülmektedir. Bu kategoriye göre sonsuzluğa bir sayı karşılık gelemez veya sonsuzluk bir belirsizliktir. Öğrencilerin vermiş olduğu yanıtlar incelenerek analiz edilmiş ve öğrencilerin sonsuz ile ilgili tanımlarının sonsuzun bilinemeyen, belli olmayan ve günlük hayatta karşılaşamayacağımız, örnek veremeyeceğimiz bir sayı olduğu görüşlerinin ağırlıkta olduğunu görebiliriz. Öğrencilerden birisi sonsuzu şöyle tanımlamaktadır;

Ö5: Sonsuz… Bence şimdiye kadar öğrendiğimiz sayılardan farklı olmalı çünkü şimdiye kadar hiçbir sayı üzerinde bu kadar çok tartışmamıştık ve bu kadar farklı tanımlar ve yorumlar duymamıştık. Bana sorarsanız sonsuz bizim bildiğimiz manada belli bir sayı veya bilinen bir sayı değildir. Eğer daha önceki sayılar gibi bir sayı olsaydı rakamlardan herhangi biri veya birkaçı ile gösterilirdi. İşte tamda bu sebepten sonsuzu biz tam olarak ne olduğunu ifade edemediğimiz sayıların yerine kullanırız.."

Bir başka sonsuz tanım ve yaklaşımı ise öğrencilerin öğrendiklerini günlük hayat ile ilişkilendirme isteğini açığa vuran şu tanımdır;

Ö10:Şimdi burada tanımlamaya çalıştığımız şey tam olarak açıkçası sınıfımızda ben de dahil hiç kimsenin bence bilemediği bir sayı ya da …şey işte. Bence biz bu güne kadar hep sayıları öğrenirken sayarak öğrendik ve şimdi bu açıdan bakarsak sonsuzu sayabilir miyim diye bayağı düşündüm, sonra etrafıma baktım ve yine her şeyin ben tam olarak sayamayabilsem de belirli bir sayı ifade edilebileceğini zannediyorum…. En sonunda şu kanıya vardım biz şu anda etrafımızda karşılaşamayacağımız ya da karşılaşma ihtimali olmayan bir sayı ya da her ne ise ondan söz ediyoruz ve bence bu sayı benin aklımın almayacağı kadar çok büyük..”

Öğrencilerin vermiş olduğu cevaplar sonsuzun onların şimdiye kadar öğrendiklerinin bu kavramı açıklamada eksik kaldığını hissettirmekte ve öğrenecek yeni bilgilerin varlığını kabul ettirmektedir.

Tablo 3. Öğrencilerin “sonsuz en büyüktür veya sınırsızdır” kategorisine ait Kod ve Frekans Tablosu

Kategori	Kodlar	f
Sonsuz en büyüktür veya sınırsızdır.	Sonsuzun belirli bir sınırı yoktur	27
	Sonsuz ifade edilemeyecek, karşılaşılamayacak kadar büyük	23
	Sonsuz daha ötesine geçilemeyecek bir şeydir	22
	Sonsuz bildiğimiz bütün sayılardan daha büyüktür.	12
	Düşünebileceğimiz en büyük sayı sonsuzdur	16
	Sonsuz sayamayacağımız ve sayı ile gösteremeyeceğimiz en büyük şey	5
	Sonsuzdan sonrasında başka bir şey yoktur	4
	Sonsuzdan daha büyük bir şey bence olamaz	3

Tablo 3 incelediğinde sonsuzun sınırının olmayacağını belirten öğrenci sayısının 27 olduğunu görülmektedir. Öğrencilerin bu kategorideki genel algısının sonsuzu genel olarak geçilemeyen ve belirli olmayan, düşünülebilecek en büyük miktar olarak tanımladığı söylenebilir. Sonsuzu bir öğrenci şöyle tanımlamaktadır.

Ö12:“Sonsuz denilince aklıma ilk gelen şey şimdiye kadar duyduğumuz sayılardan farklı olan ama yine bir büyüklüğü ifade etmek için matematikte kullanılan, kesin bir sınırının olmadığını düşündüğüm bir sayı ya da büyüklük geliyor….Evet ,evet sonsuz sınırı olmayan bilmediğimiz sayılar için kullanılan bir sayıdır”

Başka bir öğrenci ise sonsuzu tanımlarken farklı bir bakış açısı ile yaklaşarak;

Ö32:“Bence sonsuz sadece sınırı belli olmayan bir sayı değil aynı zamanda matematiksel bir deyimdir ve bu deyim bizim daha ötesine geçemediğimiz büyük sayılar için kullanılır bu yüzen biz bildiğimiz bütün sayılardan daha büyük bir sayıyı ifade etmek için sonsuz sayısını kullanıyoruz. Bu bize anlatmak istediğimiz sayının büyüklüğünü gösteremediğimiz yani sayıyı tam olarak net bir sayı ile ifade edemediğimiz durumlarda kolaylık sağlar.. ."

Sonsuzun aslında daha ötesine geçilemeyen sayıların yerine kullanılan bir matematiksel deyim olduğunu ifade etmiştir.

Bununla birlikte öğrencilerin sonsuzu geçilemez ve belirli olmayan, düşünebildiğimiz en büyük miktar olarak algılamasından dolayı öğrencilerin standart olmayan analize uygun davranmakta olduklarını söyleyebiliriz.

Tablo 4. Öğrencilerin "sonsuza bölme veya sonsuz küçük" kategorisine ait Kod ve Frekans Tablosu

Kategori	Kodlar	f
Sonsuza bölme veya sonsuz küçük	Bir bütün hiçbir zaman sonsuz parçaya ayrılamaz	24
	Sonsuz tane parçayı sonsuza ayırırsak bir şey kalmaz	23
	Bir bütün sonsuza kadar bölünürse belirsiz bir küçüklük elde edilir	18
	Sonsuza kadar bölersek göremeyiz	14
	Sonsuza kadar bölme bitirilemeyen-bitmeyen bir şey	11
	Bütün sonsuza kadar hep bölünürse sıfır bulunur	8
	Bir bütünü sonsuz parçaya bölmek anlaşılamaz	6
	Bir bütünü sonsuz parçaya ayıramayız	3

Tablo 4 te öğrencilerin sonsuza bölmenin ve sonsuz küçüklükten ne anladıklarına ilişkin sorulan soruya verdikleri cevapların dağılımı verilmiştir. Bu kategoride " Bir bütün hiçbir zaman sonsuz parçaya ayrılamaz" kodu en yüksek frekansa sahiptir. Öğrencilerle yapılan odak grup görüşmesi ve yaptıkları tanımlar analiz edilerek tablolaştırılmıştır. Burada öğrencilerin çoğunluğunun özellikle bir bütün sonsuz parçaya bölündüğü zaman aşağıda ifade edilen görüşe benzeyen bir düşünce benimsemektedirler. Bu tanıma örnek olarak;

Ö13: Hocam düşünelim ki bizden bir uzunluğu her zaman ikiye bölmemiz istendi. Bu uzunluk ne kadar çok olursa olsun bölme işlemine devam edersek bizim bildiğimiz sayılara ulaşırız. Yine bölmeye devam edersek çünkü kaç defa böleceğimiz hakkında bir kısıtlama verilmemiş bu sayı küçülür, küçülür ve en sonunda bölemeyeceğimiz kadar küçük olur; yok olur hiçbir şey kalmaz"

Karşılaşılan bir başka ilginç durum ise öğrencilerden bir kareyi sürekli olarak ikiye bölmeleri istendiğinde öğrencilerin büyük oranda fikir birliğinde olduğu "Bir bütünün sonsuz parçaya ayrılamayacağı" dır. Bunu bir öğrenci şu şekilde açıklamaktadır;

Ö28: Öncelikle bize verilen karenin boyutlarının ne kadar olduğu verilmemiş demek ki boyutlar çokta önemli değil biz bize verilen kareyi bölmeye başlarsak önce galiba bir dik dörtgen elde ederiz sonra yine bölersek…

> Bakalım yine dik dörtgen elde ederiz bölmeye devam edelim … böldük ,böldük (öğrenci 4. Bölme işleminden sonra) ….yok! yok artık bölemem. Olmuyor hayır bölünmez bence sonsuz sayıda bölmek anlamsız bir anlam veremedim. Bence sonsuza bölünemez…

Cevabını vermiş ve işlem yapmayı durdurmuştur. Öğrenciler tarafından verilen cevaplar ve açıklamalar incelendiği zaman akla ilk gelen şey, Standart olmayan analize göre; eğer bir bütün sonsuz parçaya ayrılırsa parçaların bir uzunluğu kalmamaktadır açıklamasıdır. Her ne kadar öğrenciler matematik derslerinde kullanılan "sonsuz küçük" kavramını akla getiren bazı cevaplar vermiş olsalar da, burada genel olarak öğrenciler "sonsuz küçük" kavramını kullanmanın yerine daha belirli, düşünülebilir ve ulaşılabilir olduğunu düşündükleri çok küçük bir şeyi anlatmak istemişlerdir.

Bir bütünü parçalayarak sonsuz parça elde etmek, bitmeyen, sonu hiçbir zaman gelmeyen, bir süreç olarak düşünülmektedir. Sonuç olarak bu yaşta ve eğitimde bulunan öğrencilerde potansiyel sonsuzluk anlayışının daha baskın olduğu gözlemlenmiştir.

Tablo 5. Öğrencilerin "sonsuzla işlem yapma veya sonsuzun işlemlerde yutan elemana benzetilmesi" kategorisine ait Kod ve Frekans Tablosu

Kategori	Kodlar	f
Sonsuzla işlem yapma veya sonsuzun işlemlerde yutan elemana benzetilmesi	Sonsuz tüm işlemler için en büyük yutan elemandır	34
	Sonsuza + sonsuz yine sonsuzdur	22
	Sonsuz toplama işlemine göre en büyük yutan eleman	19
	Sonsuzun iki katı da üç katıda sonsuz gibi belirsiz ve çok büyük bir şeydir	19
	Sonsuzun bir fazlası da yine sonsuzdur	17
	Sonsuzun iki katı da sonsuzdur değişmez	15
	Sonsuz ile sonsuzu toplasak da çıkarsak da bir şey değişmez.	14
	Sonsuzun iki katını da yarısını da alsak yine sonsuz ile aynı olur	12
	Kullanılan sayılar zaten sonsuzdu çarpmak bir şeyi değiştirmez.	11
	Sonsuza bir eklersek belki de sonsuzu geçebiliriz.	7
	Sonsuz + sonsuz belirsiz bir şey	7
	Sonsuz ile sonsuzu toplasak da bir şey değişmez	6
	Sonsuzun iki katı da sonsuz gibi bilinmeyen bir şey olduğundan yine sonsuz olur.	4
	Sonsuza sonsuz ekleyince yine sonsuz bulmak mantıklı değil	3

Tablo 5 incelendiğinde 34 öğrencinin sonsuzu yutan eleman olarak algıladıkları görülmektedir. Sonsuz kavramını ölçme anlayışı olarak da düşünülen, sonsuzun iki katına iki tane sonsuz denilmesi veya sonsuz ile sonsuzun toplamının iki tane sonsuz eder denilmesi yapılan odak grup görüşmesinde sık karşılaşılan durumlardır. Bu tür düşüncelerin oluşmasında okul matematiğinin etkili olduğu söylenebilir. Elde edilen bulgulara göre, çocuklar okulda öğrendikleri "1 elma, 1 elma daha 2 elma eder" düşüncesi ile hareket etmekteler. Öğrenciler ile yapılan odak grup görüşmelerinde sonsuz ile yapılan işlemler ile öğrencilerden edinilen bilgiler ışığında öğrenciler sonsuz ile toplamaya yutan elemanı gibi bir anlam yüklemişlerdir. Aşağıda bir öğrencinin odak grup görüşmesindeki görüşü verilmiştir.

> Ö48: Sonsuza 1 ekledik sonuç sonsuz, sonsuza 2 ekledik sonuç sonsuz, sonsuza sonsuzu ekledik yada çıkardık sonuç sonsuz… o zaman sonsuz bilebileceğimiz en büyük belki de en küçük yutan eleman olmalı."

Yine öğrencilerden edinilen bilgiler ışığında öğrenciler sonsuzla ilgili işlemlerde sonsuzla bir sayıyı şu şekilde toplamışlardır:

> Ö33: Hocam şimdi biz tam olarak ne olduğunu bilmediğimiz bir sayıya bildiğimiz bir sayıyı 1,2,3.. gibi ekleyip sonucu bulmak istiyoruz, bu işlemde bilmediğimiz sonsuza 1'de, 2'de …ne eklersek ekleyelim yine bilemeyiz ve sonuç sonsuz olur o zaman sonsuzla yaptığımız bütün işlemlerde çarpma, toplama, çıkarma ve bölme de dahil sonuç her zaman sonsuzdur … Tamam biz sonsuza bütün işlemler için en büyük yutan elemandır diyebiliriz."

Bu ifadeyi daha önceki öğrencilerinin ifadelerinden ayıran taraf "*sonsuza bütün işlemler için en büyük yutan elemandır"* demesi ve bir genelleme yapmış olması dikkat çekicidir.

Sonsuz ile yapılan işlemlere verilen cevaplara ilişkin bir başka örnek ise; "Doğum gününde annen sana sonsuz sayıda küpenin bulunduğu bir hediye kutusu verdi, Babanda annenden hiç haberi olmadan senin küpeden hoşlandığını bilerek sana içinde sonsuz sayıda küpenin olduğu bir hediye kutusu verdi ne kadar küpen olur?" sorusuna bir öğrencinin vermiş olduğu yanıttır.

> Ö55: Şimdi annemin verdiği küpeler bir kutu sonsuz , babamın verdiği küpelerde bir kutu sonsuz… İkisi de ayrı ayrı sonsuz gibi ama toplamam istenirse 1sonsuz 1 sonsuz daha tam olarak bulamam ki... Bunları toplayabilmem için ikisinin de aynı cins olması lazım yani 1kutu 1 kutu daha 2 kutu eeee… kutularda sonsuz sayıda ikisini birleştirirsek ne olur 2 sonsuz tabii..

Sonsuz kavramını ölçme anlayışı olarak da düşünülen, sonsuzun iki katına iki tane sonsuz denilmesi veya sonsuz ile sonsuzun toplamının iki tane sonsuz eder denilmesi yapılan odak grup görüşmesinde sık karşılaşılan durumlardır. Bu tür düşüncelerin oluşmasında okul matematiğinin etkili olduğu kanısındayız. Elde edilen verilere göre, çocuklar okulda öğrendikleri "1 elma, 1 elma daha 2 elma eder" düşüncesi ile hareket etmekteler. Öğrencilerin bu şekilde ki ifadeleri kullanmasının sebebi ise okul matematiğinde gördükleri sonlu kümelerin fazlaca etkisi altında kalmalarıdır.

Sonsuzu aritmetikte ve karşılarına çıkan problemlerde nasıl kullandıklarına dair tanımlarına bakıldığında öğrencilerde standart olmayan sonsuzluk anlayışı ile ilgili bazı ipuçları bulunabilir. Öğrenciler sonsuz küçük kavramına uzak olsalar da, sonsuz büyüklükler ile ilgili görüşleri, limit işleminde kullanılan sonsuzluk ile paralellik göstermektedir.

Matematiksel gösterime geçildiği zaman derslerde kullanılan sayı kümeleri ve işlemleri ile ilgili uygulamaların etkisinin daha fazla olduğunu görmek mümkündür. "Sonsuz ile sonsuzu toplayıp sonucu sonsuz bulma" işleminin çokta sezgisel olmadığı söylenebilir.

Tablo 6. Öğrencilerin "sonsuz kümelerin karşılaştırılması" kategorisine ait Kod ve Frekans Tablosu

Kategori	Kodlar	f
Sonsuz kümelerin karşılaştırılması	Sonsuz kümelerin eleman sayıları karşılaştırırken bire-bir eşleme kullanmak mantığa uygun değil.	35
	Sonsuz sayıda elemanı olan faklı kümelerin eleman sayıları aynı olmalıdır.	14
	Sonsuz kümelerin eleman sayıları karşılaştırırken bire-bir eşleme kullanmak mantığa uygun.	8

Tablo 6 incelendiğinde sonsuz kümelerin bire-bir eşlenmesinin öğrenciler tarafından çokta kabul görmediği söylenebilir. Öğrencilerin sayı kümelerinin kullanımlarına tam manasıyla hakim olmadıkları öğrencilerin yaptıkları tanımlar ve odak grup görüşmeleri sırasında tespit edilmiştir. Buna bağlı olarak sonsuz kümelerin bire-bir eşlenmesi konusunda öğrencilerin sorulan sorulara cevap verirken oldukça zorlandıkları tespit edilmiştir. Örneğin öğrencilerinden A={1,2,3,4,5,6,………} kümesinin eleman sayısı ile B={1,3,5,7,9,11,………} kümesinin eleman sayılarını karşılaştırmaları istendiği zaman bir öğrencinin bu soruya vermiş olduğu cevap aşağıda verilmiştir.

> Ö62: Bu iki küme ye bakacak olursak A kümesi 1 den başlayıp sonsuza kadar devam ediyor. B kümesi de sonsuza kadar devam ediyor. O zaman ikisinin de eleman sayısı aynı olmalı yani ikisi de sonsuz elemanlıdır. Ama kümeleri alt alta yazıp tekrar cevap vermeleri istendiğinde ise, Hocam öncelikle bu ikisi de sonsuza kadar gidiyor ama elemanları eşleştirirsek A kümesinin elemanlarında eşleştirmediğimiz elemanlar var. Bu durumda kümelerin elemanlarına biz sonsuz demiştik ama burayı anlayamadım nasıl olur? Hani iki kümenin eleman sayıları aynıysa eşleştirince açıkta eleman kalmazdı demiştik…Burada bir sıkıntı var o yüzden bu kümelerin eleman sayılarını karşılaştırırken bire-bir eşleme kullanmak bana uygun ve mantıklı gelmedi.

Kümelerin eleman sayılarının karşılaştırılmasına ait başka bir öğrenci görüşü ise:

Ö66: Öncelikle bana göre bize verilen kümelerin eleman sayılarını bulmak gerekir. Buradan bakıldığında verilen her iki kümenin de sonsuz sayıda elemanının olduğunu söyleyebiliriz. Biz burada ister bire-bir eşleyelim yani birinci elemanla birinciyi, ikinci elemanla ikinciyi,…. Bu iki kümede sonsuz elemanlı olduğundan sonuçta her iki kümenin eleman sayıları aynıdır ya da bu iki küme eşit sayıda, sonsuz tane, elemana sahiptir diyebiliriz.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada elde edilen "düşünülebilen en büyük sürenin sonlu olması" anlayışı öğrencilerin yaşam tecrübeleriyle elde ettikleri bir bilgidir. Öğrencilerin günlük yaşam tecrübeleriyle her şeyin bir sonunun olduğunu gözlemlemeleri, sonsuzluk anlayışlarını da daraltmış olabilir. Bu durum DiSessa (1988, 1993) çalışmasındaki "fenomelojik ilkellik" ilkesinin veya Tall (1991) "Bütün sonsuzluk anlayışlarının kişinin sonlu deneyimleri sayesinde geliştiğini" savunan görüşleriyle paralellik göstermektedir.

Öğrencilerin "sonsuz + sonsuz = iki sonsuz" şeklinde bir düşünce benimsemelerinin sebebi Tall (1980)'un iddia ettiği manada yani daha uzun olan doğrunun diğerinden daha fazla noktaya sahip olacağı yada bir AB doğrusunun boyu CD doğrusunun iki katı ise AB doğrusu CD doğrusunun iki katı kadar nokta içerir anlamında bir sonsuzluğu ölçen sayı (infinite measuring numbers) anlayışı değildir. Bu anlayış genelde öğrencilerin günlük yaşamdan edindikleri 'daha uzun' olanın 'daha çok olması' gerekliliği gibi bilgileri sebebi ile oluşabilir. Yapılan odak grup görüşmeleri ve Tablo 5 den elde edilen verilere göre, öğrencilerin "sonsuz + sonsuz = iki sonsuz" gibi bir işleme yönelmelerinin sebebinin yine sonsuzluğu ölçebilme düşüncesinden çok her yapılan işlemi sonlu düşünme ve pekiştirme ("bir elma bir elma daha iki elma") düşüncesinden oluşan potansiyel sonsuzluk düşüncesidir. Öğrencilerde potansiyel sonsuzluk anlayışının baskın olduğu görülmüştür. Monaghan'ın (2001) dediği gibi, sonsuzluğu ölçen sayı anlayışı sadece ileri yaşlarda görülen yaygın bir eğilim olarak değerlendirilebilir.

Tirosh (1991) ve Tsamir (2001) yapmış oldukları çalışmalarda da görüleceği gibi parça her zaman bütünden küçüktür anlayışı sonsuz kümelerde de kendini göstermektedir. Bu sebepten dolayı öğrenciler tek sayılar kümesi ile doğal sayılar kümesinin birebir eşlenebileceğini düşünememektedirler. Bu çalışmada da öğrencilere yöneltilen "A={1,2,3,4,5,6,…} kümesinin eleman sayısı ile B={1,3,5,7,9,11,…} kümesinin eleman sayılarını karşılaştırınız?" sorusunda öğrenciler tereddüt yaşamışlardır. Ancak $f(x) = 2x + 1$ şeklinde bir fonksiyonla bu iki kümenin bire-bir eşlenebileceğini tereddütle de olsa kabul etmişlerdir. Sonsuz kümelerin bire-bir eşleştirilmesi öğrencilere mantıklı gelmemektedir.

Yapılan odak grup görüşmesi sonucunda bir bütünü parçalayarak sonsuz parça elde etmek, bitmeyen, sonu hiçbir zaman gelmeyen, bir süreç ve de "Bir bütünü sonuz parçaya bölmek anlaşılamaz" olarak düşünülmektedir. Fischbein (1979), Piaget ve Inhelder'ın (1956) yaptığı çalışmada öğrencilere verilen bir geometrik şekli örneğin bir dikdörtgeni devamlı ikiye bölmesi istenmektedir. Böylece dikdörtgen en basit şekil olan doğrular oluşuncaya kadar sayısız kere bölünür. Piaget'in gelişim teorisine göre, işlem öncesi dönemdeki çocuk bölmeyi fazla sürdürememiştir. Somut işlemler dönemindeki çocuk "uzun süre ama az sayıda bölme gerçekleştirmiştir" sonucu ile paralellik göstermektedir.

Öğrencilerin sonsuz ile ilgili tanımları ve yapılan odak grup görüşmeleri incelendiğinde öğrenciler genel olarak sonsuzun bir sayıdan daha çok, hiç bitmeyen bir süreç veya sürekli devam belirsiz büyüklükleri ifade etmek için kullanılan bir kavram olarak algılandıkları söylenebilir. Bu da Monaghan (2001), öğrencilerin sonsuzlukla ilgili temel düşüncesi sonsuzluğun bir süreç veya sürekli devam eden bir şeydir ifadesi ile paralellik göstermektedir.

Öğrencilerin sonsuz tanımları ve sonsuzla yapılan işlemler ile ilgili verdikleri cevaplar sonucunda sonsuz elemana sahip kümelerin eleman sayılarının aynı olması ve sonsuzun hiç bitmeyen bir büyüklük olması öğrencilerde potansiyel sonsuzluk anlayışı olduğunu göstermekte ve "Sonsuzluğun sezgisel açıklaması ile ilgili denilebilecek ikinci bir yönün "sonsuzluğun hiç tükenmeyen kapasitesi" olduğudur. Sonsuzluk hiç tükenmemek gibi görülüyor. Bana göre, sonsuzluğun bu açıklaması, sezgisel olarak sonsuzluğun bir seviyesinin (yani tek bir sonsuz) olmasının temel nedenidir. Fischbein, (2001) açıklaması ile de örtüşmektedir.

Analizin temel konuları sonsuz küçük kavramı üzerine kurulduğu için bu kavramın öğretimi en az sonsuzluk kavramı kadar önemlidir. Sonsuz küçük ile matematiksel sonsuzluk kavramları birbirine benzerdir.Bundan dolayı,öğrencilerin sonsuz kavramı hakkında ki tanım ve algılarının daha gerçekçi hale getirilmesi için; ortaöğretim programında yer alan sonsuzlukla ilgili örüntü, limit, diziler vb. konularda sonsuzluk kavramına daha çok vurgu yapılmalıdır.

5. Kaynaklar

Allen, G. D. (2000). The History of Infinity. http://www.math.tamu.edu/~dallen/history/infinity.pdf (2013, Mayıs 13)

Alsan, S. (1983). Matematik Sonsuz. *Bilim ve Teknik Dergisi*,.10-13.

Aztekin, S., Arıkan, A., & Srirasman, B. (2010). The Constructs of PhD Students about Infinity: An Application. *The Montana Mathematics Enthusiast, 7,* 149-174.

Clegg, B. (2003). *A Brief History of Infinity: The Quest to Think the Unthinkable*. Robinson Publishing.

Di Sessa, A. (1988). Constructivism in the Computer Age. In G. Forman, & P. Pufall, Knowledge in pieces (pp. 49-70). Hillsdale,NJ: Lawrence Erlbaum Associates.Inc.

Di Sessa, A. (1993). Toward an Epistemology of Physics. *Cognition and Instruction, 10(2-3)*, 105-225.

Dursun, Y. (2007). Hegel'de Bir ve Çok Kavramları Üzerine Kaygı. *Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Felsefe Dergisi,9,* 77-84.

Fischbein, E. (2001). Tacit Models and Infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 309-329.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 10,* 3-40.

Jirotkova, D., & Littler, G. (2004). Insight into pupils' understanding of infinity in a geometrical context. Proceedings of the28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 3, pp. 97–104. Bergen: PME.

Kim, D.-J., Sfard, A., & Ferrini-Mundy, J. (2005). Students' Colloquial and Mathematical Discourses on Infinity and Limit. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Ed.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education. 3, pp. 201-208. Melbourne: PME.

Monaghan, J. (2001). Young Peoples' Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 239–257.

Özmantar, M.F. (2010). Sonsuzluk Kavramı: Tarihsel Gelişimi, Öğrenci Zorlukları ve Çözüm Önerileri. *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (Editörler: Özmantar, M.F., Bingölbali E., ve Akkoç, H.), Pegem Akadem,. s.151-180.

Patton, M. Q. (1987). *How to Use Qualitative Methods in Evaluation*. Newbury Park, CA: Sage.

Stewart, C. J., & Cash, W. B. (1985*). Interviewing: Priniples and Practices* (4. ed.). Dubuque, IO: Wm. C. Brown Pub.

Tall, D. O. (1980). The Notion of İnfinite Measuring Number and its Relevance in The İntuition of İnfinity. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 271-284.

Tall, D. O. (2001). Natural and Formal Infinities. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 199–238.

Tirosh, D. (1991). The Role of Students' Intuitions of infinity in Teaching the Cantorian Theory. In D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 201-214). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tsamir, P. (2001). When 'the Same' is not Perceived as such: The Case of. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 289-307.

Tsamir, P., and Dreyfus , T. (2002). Comparing Infinite Sets - A Process of Abstraction: The Case of Ben*. Journal of Mathematical Behavior, 21*, 1-23.

Tsamir, P., and Tirosh , D. (1999). Consistency and Representations: The Case of Actual Infinity. *Journal for Research in Mathematics Education, 30,* 213-219.

Yıldırım, A., ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, C. (1996). *Matematiksel Düşünme.* İstanbul: Remzi Kitabevi.

EXTENDED ABSTRACT

We do not come across concepts that preoccupy the human mind and make people contemplate and burden them as much as the concept of infinity that is at the center of mathematics and philosophy. According to Boyer (1949), the concept of infinity dates back to ancient Greek civilization, and the word "infinity" is derived from the ancient Greek word "apeiron" which means "infinite", "indefinite" and "undefined" (Reported by Kim, Sfard and Ferrini-Mundy, 2005). Ruckey (1982) states the fact that the essence of the concept is difficult as follows: "It is difficult to envisage the infinite. It is a dark dead space that spans beyond even the farthermost star. It is a bottomless pit into which we fall during a nightmare. It constitutes the example of a dog that tries to catch its tail. It is the fact that a chain of logic always arrives at the same point by circling" (Reported by Alsan, 1983).

The concept of infinity is one of the oldest problems of our intellectual history. It has caught the attention of not only mathematicians but also everyone who thinks and wonders. Nonetheless, the concept of infinity became a field of interest for mathematics in the late periods. As a matter of fact, although the number π – which was discovered before the Common Era – has infinite digits after the comma, even this property was expressed in different forms. It is even observed that Pythagoras, who discovered irrational numbers and his followers, did not take an interest in infinity (Allen, 2000). According to O'Connor and Robertson (2002), Aristotle mentions two types of infinity while addressing the concept of infinity: potential infinity and actual infinity. Potential infinity signifies an ever-continuing process that is finite at any point along the way. Actual infinity, on the other hand, signifies an infinity in the form of a complete totality. According to Aristotle, actual infinity is an unacceptable concept that must be avoided. This complicated understanding of infinity kept it out of mathematics for a certain period. Many famous mathematicians perceived the infinite as a concept that belonged to spoken language or they abstained from talking about the infinite at all. When Galileo performed one-to-one correspondence between the set of natural numbers and the set that was composed of the squares of that set, he could not believe the result. The concept of infinite that we use in mathematics was not fully known until the end of the 19th century, and there was a great confusion about this concept. It was understood what the "infinite" must mean in mathematics when the set theory, which was set forth by Georg Cantor, advanced.

David Tall (2001) divides infinity into two groups, namely as natural and formal. He states that all understandings of infinity develop thanks to the finite experiences of people. According to Tall's claims, children's experiences about infinity are rather related to the concept of "the number that measures infinity", and they are more close to the modern theory of non-standard analysis when compared to cardinal number theory (Arıkan, 2008). The concept of "the number that measures infinity" has been used to mean that the longer line will have more points than the other line or if the length of line AB is twice the length of line CD, line AB contains two times more points than the line CD (Tall, 1980).

Infinity, which has always preoccupied humanity and given the mathematics field a hard time (Yıldırım, 1996, p.75), is a concept that is difficult to perceive and learn by nature. For this reason, it is important to determine how such a difficult concept is perceived by students. The aim of this study was to determine how secondary high school students perceived the concept of infinity.

Phenomenological design, which is among the qualitative research methods, was used in this study.

The participants of this study were 72 secondary high school students (38 females and 34 males).

The data collection tool used in this study was the conversation-type focus group discussion technique. This technique focuses on the fact that the interaction and dynamics of the individuals within the group are important factors (Yıldırm, 2008) that affect the scope and depth of the given answers in order to verify the answers given by the students to an open-ended question, "Can you express your definition or definitions about the concept of infinity?" The students were randomly divided into four groups, each consisting of 18 students. A total of 180-minute focus group discussions were performed (45 minutes for each group). Focus group discussions were recorded with a camera by taking the consent of the students beforehand.

Descriptive analysis and content analysis were used in analyzing the data that was obtained from the study. The data, which was collected via focus group discussions and open-ended questions, was transcribed, written in separate documents and transferred to the electronic environment. Then, transcripts were read many times and evaluated separately. The recorded footage and previously obtained definitions were compared, and both were evaluated together. Tables were formed, which would provide an opportunity for a general and healthier evaluation of students' understandings about the subject.

According to the obtained findings, it was observed that the students divided the infinite into various categories such as "Endless Process: Infinity", "Indefiniteness of the Infinite", "The Infinite Is the Absorbing Element in All Operations", and "The Infinite Is an Unreachable and Limitless Phenomenon". It was observed that the students did not have a solid grasp of the use of infinite number sets, and they experienced a number of problems in one-to-one correspondence of infinite sets. In view of the discussions conducted with the students, it was found that the general understanding of the students was that the infinite is a concept that signifies a very large phenomenon. To obtain infinite pieces by disintegrating a whole is considered an endless and ceaseless process. Consequently, it was observed that the understanding of potential infinity was more dominant in the students at this age and educational level.

The understanding that “the longest imaginable duration is finite”, which was obtained in this study, is information that was obtained by the students through life experiences. That is because the fact that the students observed that everything has an end through their daily life experiences might have also narrowed their understanding of infinity. This fact shows parallelism with the principle of “phenomenological primitiveness” in DiSessa’s (1988, 1993) study or Tall’s (1991) opinions arguing that “all understandings of infinity develop thanks to the finite experiences of people”. The reason for students’ gravitation towards an operation like “infinite + infinite = two infinites” is the understanding of potential infinity that derives from considering every performed operation as finite and the idea of reinforcement (“an apple plus an apple equals two apples”) rather than the understanding of being able to measure infinity.

When the finite related definitions of the students and the conducted focus group discussions are examined, it can be stated that the students generally perceived the finite as an endless process or a concept that is used to represent ceaseless and indefinite magnitudes rather than a number. This shows parallelism with Monaghan’s (2001) statement that the basic understanding of the students about infinity is that infinity is a process or a ceaseless phenomenon.

The subjects related to infinity, such as patterns, limits, sequences, etc. within secondary high school curriculum must be planned more carefully in order to render students’ definitions and perceptions about the concept of infinity more realistic. An opportunity must be provided for students to discuss their opinions about infinity.

Keywords: Infinity perceptions, mathematical infinity, potential infinity