Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi
Journal of Research in Education and Teaching
Şubat 2013 Cilt:2 Sayı:1 Makale No:25 ISSN: 2146-9199

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ DİZİLERİN YAKINSAKLIĞI KAVRAMI ÜZERİNE İSPAT DEĞERLENDİRME BECERİLERİ

Muhammet Doruk
Atatürk Üniversitesi
mdoruk20@hotmail.com

Abdullah Kaplan
Atatürk Üniversitesi
akaplan@atauni.edu.tr

Özet

Bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerilerini incelemektir. Araştırmanın katılımcılarını, Doğu Anadolu Bölgesi'nde bulunan bir üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üçüncü sınıfında öğrenim gören 6 matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri yarı yapılandırılmış "Dizilerin Yakınsaklığı Kavramı İspat Değerlendirme Mülakat Formu" (DYKİDMF) yardımıyla elde edilmiştir. Veriler analiz edildiğinde, öğretmen adaylarının ispat değerlendirmede başarısız oldukları tespit edilmiştir. Bu başarısızlığın sebebi olarak, ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat edilmemesi ve öğretmen adaylarının ispatları öğrenmek için düşünce sürecine girmeden sadece ezberleme yoluna gittikleri göze çarpmaktadır. Ayrıca, ilgili dersten elde edilen akademik başarı ile ispat değerlendirme becerileri arasında bir ilişkinin olmadığı düşünülmektedir.

Anahtar kelimeler: Matematiksel ispat, matematik öğretmeni adayı, ispat değerlendirme.

PROSPECTIVE PRIMARY MATHEMATICS TEACHERS' PROOF EVALUATION ABILTIES ON CONVERGENCE OF SEQUENCE CONCEPT

Abstract

The purpose of this study is to determine prospective primary mathematics teachers' proof evaluation abilities on convergence of sequance concept. The participant of this study consist of 6 prospective mathematics teachers who were enrolled in the thirth grade in the primary mathematics education department from a university located in the east part of Turkey. The data of this study were gathered by means of semi structured "Convergence of Sequence Concept Proof Evaluation Interview Form" (CSCPEIF). When the data have been analyzed, it has been determined that prospective teachers are failed at proof evaluation. Two main points can be underlined as a fact of prospective teachers' failure; one is failure to heed the key ideas in proof section and the other one is learning the proofs by memorizing without any thought process. Also, it is thought that there is no relation between academic achievement and proof evaluation abilities.

Key words: Mathematical proof, prospective mathematics teacher, proof evaluation.

GİRİŞ

İspat kelime manası olarak, bir geçeğin ya da bir şeyin doğruluğunun gösterilmesi ve bir iddianın geçerli veya doğruluğunu test etme sürecidir (Oxford American Dictionary, 2004). Aslında ispat matematikte olduğu kadar günlük hayatta her gün kullanılır. Bilimsel araştırmaların hemen hepsinde vardır. Fakat bu araştırmalarda ispat kavramı bir ifadenin varlığını ve doğruluğunu göstermek için değil, bir ifadenin doğru olup olmadığını test etmek için kullanılmaktadır (Calude ve Marcus, 2004). Matematiksel ispatta ise iki amaç vardır. Birisi hipotezin mantıklı adımlarla bir sona götürüldüğünü göstermek diğeri ise varsayımlardan neden ve nasıl gidildiğini anlamaktır (Tall, 1998). O halde ispat bir teoremin sadece gerçek olduğunu değil aynı zamanda neden gerçek olduğunun

Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi
Journal of Research in Education and Teaching
Şubat 2013 Cilt:2 Sayı:1 Makale No:25 ISSN: 2146-9199

anlaşılmasına yardımcı olur. Bu şekilde düşünüldüğünde, ispatlar hem ikna edicidir hem de keşiflere neden olabilmektedir. Bu anlayışla yapılan ispatlar, sonuçların birbiri ile bağdaştırılarak matematiğin sistematikleşmesine katkıda bulunabilirler (Hanna ve Barbeau, 2009).

Birçok matematikçi ve matematik eğitimcisi ispatı matematik eğitiminin önemli bir parçası (Özer ve Arıkan, 2002) hatta matematiğin kalbi olarak değerlendirmektedir (Senk vd., 2009 akt. Bahtiyari, 2010; Turner, 2010). Matematiksel ispat öğrencilerin matematiksel kavramları daha iyi öğrenmesine yardımcı olan bir araçtır (Hersh, 1993). Matematiksel ispat yapmanın öğrencilere sağladığı faydalardan bir kaçı aşağıda sıralanmıştır.

- İspat yaparken öğrenciler formüllerin son halleri ile yeterli olmadığını ve açıklanması gerektiğini öğrenirler (Güven, Çelik ve Karataş, 2005).
- Matematiksel bilginin kurulmasında, gelişmesinde ve aktarılmasında etkin rol oynar (Stylianides, 2007).
- Matematiksel kavramların daha iyi anlaşılmasına ve matematiksel düşüncenin gelişmesine yardımcı olur (Hanna, 1991).
- Matematikçilerin yaptıklarının ne anlama geldiğini öğretir (İmamoğlu, 2010).
- İspatla birlikte matematiksel bilgiler gelişir ve olgunlaşır (Kitcher, 1984).
- Öğrencilerin kritik düşünme becerilerini geliştirir (Fawcett, 1938).
- Öğrencilere, problem çözme için yeni metotlar, stratejiler ve araçlar sunar (Rav, 1999).

Araştırmacıların çoğu tarafından ispatın matematik eğitimindeki önemi vurgulanmasına rağmen, matematiksel ispat her düzeyden öğrencilerin ve matematik öğretmeni adaylarının zorlandıkları bir kavramdır (Arslan 2007; Arslan ve Yıldız, 2010; Aydoğdu, Olkun ve Toluk, 2003: Coşkun, 2009). Moore (1994) matematiksel ispat yapma sürecinde öğrencilerin yaşadıkları zorlukları, tanımları ifade edememe, kavramların anlamlarını sezgisel olarak anlayamama, kavram imajlarını ispat yaparken kullanamama, genelleme ve örnek kullanımı eksikliği, tanımlardan nasıl bir ispat yapısı kullanacağını bilmeme, matematiksel dil ve notasyonları anlayamama ve ispata nasıl başlayacağını bilememeleri olarak belirtmektedir.

Öğrencilere ispatlama mantığının kazandırılmasında şüphesiz matematik öğretmenlerine büyük görev düşmektedir. Peterson, Carpenter ve Loef (1989) yaptığı bir araştırmada öğrencilerin performanslarının tamamen öğretmenin düşüncelerine ve bilgilerine bağlı olduğu sonucuna ulaşmıştır. Öğrencilerde ispatlama mantığının yerleşebilmesi için ispata gereken önem verilmeli, ilköğretim çağından itibaren ispat yapma teşvik edilmeli ve en önemlisi öğretmenler ispat konusunda yeterince bilgilendirilmeli ve eğitilmelidir (NTCM, 2000). Bu ifadelerden anlaşılıyor ki, bu günün öğrencisi ve geleceğin öğretmeni olan öğretmen adayların ispat yapma becerisine sahip olmaları önemlidir. Öğretmen adaylarının ispat yapma becerisi kazanmalarının önemine rağmen, ispat kavramı en çalışkan öğretmen adaylarında bile dirençle karşılaşılan bir konudur. Birçok öğrenci ve öğretmen adayı ispat yapmayı neden öğrenmeleri gerektiğini anlamaz ve birçoğu da mecburiyet olarak görür (Mansi, 2003).

Öğretmen adaylarının ispat yapma konusunda yaşadıkları zorlukların sebepleri irdelendiğinde, üniversitelerde okutulan matematik dersleri ilk bakışta öğretmen adaylarının zor anlayacağı ispatlarla dolu olduğu ve bu yüzden öğretmen adayları dersi geçebilmek için ispatları anlamadan ezberledikleri görülmektedir (Concradie ve Frith, 2000). Üniversitelerde okutulan bu dersler genellikle geleneksel metotla anlatıldığı için çoğu zaman öğrenciler kavramları içselleştirmeden, teoremler ve ispatları içeriğini bile bilmeden ezberleyerek sınavlara girer ve sınavları da geçerler. Ayrıca matematikçilere göre matematiksel ispat içerisindeki bilgilerden ziyade anahtar düşüncelerle doludur. Fakat matematikçiler öğretim esnasında anahtar fikirlere gerekli vurguyu yapmamakta daha da önemlisi değerlendirmede kullanmamaktadırlar (Raman, 2003). Geçerli fikirlerin ve ispatların oluşumu ve fikirlerin kritik edilmesi matematik yapmanın ayrılmaz bir parçasıdır. Eğer bu muhakeme becerisi kazandırılmazsa, o zaman matematik bir işlem dizisini takip etmek ve ne anlama geldiğini düşünmeden örnekleri taklit etmek olur (Ross, 1998).

Matematiksel ispat ile ilgili ülkemizde yapılan araştırmaların özellikle son on yıl içinde geliştiği bilinmektedir (Güler ve Dikici, 2012). Bu yüzden, matematiksel ispat ile ilgili araştırmalardan elde edilecek sonuçlarının ilgili alan yazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu çalışmada da ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerilerini belirlemek ve ispatı değerlendirirken nelere dikkat ettiklerini anlamak amaçlanmıştır. Literatüre bakıldığında, ispat değerlendirme becerilerine yönelik araştırmaların sınırlı sayıda olduğu görülmektedir. Diziler kavramı ile ilgili matematiksel ispat çalışmalarına ise rastlanmamıştır.

Araştırmanın Modeli

Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı esas alınmıştır. Çünkü nitel araştırmalar, araştırma yapılan ya da yapılması planlanan kişilerin sahip oldukları deneyimlerinden doğan anlamların sistematik olarak incelenebilmesinde tercih edilen bir yaklaşımdır (Ekiz, 2003). Nitel araştırma yaklaşımının doğal ortama duyarlılık sağlaması, araştırmacının katılımcı rolü olması, bütüncül bir yaklaşıma sahip olması, algıların ortaya konmasını sağlaması, araştırma deseninde esnekliği olması ve tümevarımcı bir analize sahip olması önemli özellikleridir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu özellikler çerçevesinde kullanılacak en iyi araştırma deseninin Özel Durum Çalışması (Case Study) olduğu kanısına varılmıştır. Bu çalışmada da öğretmen adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerinde ispat değerlendirme süreçleri kapsamında, ispat değerlendirme becerileri, ispatı değerlendirirken nelerden faydalandıkları ve ispatın doğruluğuna ilişkin değerlendirmelerinde nelerin etkili olduğu bütüncül olarak ele alınıp birbiriyle karşılaştırılmıştır. Her ne kadar özel durum çalışmaları hem nicel hem de nitel araştırma yöntemlerinde kullanılsa da, nitel araştırma yöntemleri açısından bakıldığında, özel durum çalışmaları bir veya birkaç durumu, olguyu ya da olayı sınırlı sayıda örneklem ile her yönüyle derinlemesine inceleme olanağı sunmaktadır. Bu süreçte ortam, birey veya süreçler bütüncül bir yaklaşımla araştırılmakta ve süreçteki roller ve ilişkiler üzerine odaklanılmaktadır. Ayrıca özel durum çalışmalarının birden fazla veri toplama tekniğine yer vermesi, zengin ve birbirini destekleyecek veri çeşitliliğine ulaşılmayı sağlayacaktır (Çepni, 2005; Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Katılımcılar

Bu çalışma Doğu Anadolu Bölgesinde bulunan bir üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören altı matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Öğretmen adayları dört yıllık olan ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün üçüncü sınıfındadırlar. Üçü kız, üçü erkek olan öğretmen adaylarının yaş ortalaması yirmi ikidir. Araştırmada kullanılan isimler öğretmen adaylarının kendi isimleri değildir. Kullanılan isimler araştırmacılar tarafından belirlenen takma isimlerdir. Katılımcılar seçilirken diziler konusunda sahip oldukları bilgilerinin hatırlanır olmasına dikkat edilmiştir. Bu amaçla, araştırma diziler konusunun öğretildiği analiz 3 dersinin bitiminden hemen sonra ikinci dönemin ilk haftasında gerçekleştirilmiştir. Katılımcılar belirlenirken analiz 3 dersinden başarı ile geçmiş, farklı harf notlarından öğrenciler tercih edilmiştir. Bu sebepten, katılımcı seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örneklemesi esas alınmıştır. Çünkü maksimum çeşitliliğe dayalı bir örneklemede amaç, genelleme yapmak için bu çeşitliliği sağlamak değildir, aksine çeşitlilik gösteren durumlar arasında herhangi ortak ya da paylaşılan olguların olup olmadığını bulmaya çalışmak ve bu çeşitliliğe göre problemin farklı boyutlarını ortaya koymaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Katılımcıların özellikleri tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1: Katılımcıların Özellikleri

Özellikler	Katılımcılar					
	Giray	Mehmet	Yunus	Aslı	Yasemin	Gülay
Yaş	22	21	24	21	21	21
Analiz 3 dersi harf notu	AA	BB	CC	BA	BA	CB

Araştırma grubu seçiminde, analiz 3 dersini başarıyla geçmiş öğrenciler harf notlarına göre listelenmiş daha sonra bu listelerden katılımcılar rastgele seçilmiştir. Analiz 3 dersini DC harf notu ile geçen öğrenci olmadığı için araştırma grubuna dâhil edilememiştir. Konuyla ilgili daha fazla bilgi verilebileceği düşüncesiyle BA harf notundan iki öğrenci araştırma grubuna seçilmiştir. Analiz 3 dersinden alınan harf notlarına göre en başarılı öğretmen adayı Giray ve en az başarılı olan ise Yunus olduğu görülmektedir.

Verilerin Toplanması

Araştırmanın verileri yarı yapılandırılmış "Dizilerin Yakınsaklığı Kavramı İspat Değerlendirme Mülakat Formu" (DYKİDMF) yardımıyla elde edilmiştir. DYKİDMF iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde öğretmen adaylarına ispat değerlendirirken kendilerine gerekli olan tanımlar verilmiştir. Bu tanımlar dizi ve dizilerin yakınsaklığı tanımlarıdır. İkinci bölümde ise öğretmen adaylarının daha önceki derslerinde ispatladıkları "*Yakınsak bir dizinin tek bir limiti vardır*" teoremi kullanılmıştır. İspattan "$\forall n > n_0 = maksimum\{n_1, n_2\}$" parçası çıkartılarak ispatı değerlendirmeleri istenmiştir. Burada ispattan çıkartılan parça ispatlardaki anahtar fikirlere bir örnektir. Bu teoremin ispatında n_0'ın işlevi, birinci yakınsaklık tanımından elde edilen, n_1 teriminden

Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi
Journal of Research in Education and Teaching
Şubat 2013 Cilt:2 Sayı:1 Makale No:25 ISSN: 2146-9199

sonraki terimler için geçerli olan $|s_n - s| < \varepsilon$ eşitsizliği ile ikinci yakınsaklık tanımından elde edilen, dizinin n_2 teriminden sonraki terimler için geçerli olan $|s_n - s^*| < \varepsilon$ eşitsizliğini ortak olarak kullanılabilmeyi sağlamasıdır. n_0=maksimum$\{n_1, n_2\}$ seçilmesi her iki eşitsizliğin de ortak olarak kullanılmasına olanak sağlamaktadır. n_0'ın bu şekilde seçilmemesi halinde iki eşitsizlik birlikte kullanılamamakta, yapılan işlem eşitsizlik kurallarına göre geçersiz olmaktadır. Katılımcıların yazdıkları ifadelerin ne anlama geldiğinin ne kadar farkında olduklarını görebilmek amacıyla bu teorem ve teoremin bu parçasının çıkartılması tercih edilmiştir.

Katılımcılardan ispatı değerlendirmeleri istenmiş ve bu değerlendirmenin sonucunda ispat için doğrudur, eksiktir ya da yanlıştır şeklinde bir karar vererek gerekçelerini yazmaları istenmiştir. DYKİDMF'de kullanılan tanımların ve ispatın uygunluğu Analiz ve fonksiyonlar teorisi anabilim dalında uzman bir akademisyen tarafından denetlenmiştir. Ayrıca, mülakat formunun oluşturulması ve uygulanmasında nitel araştırma yöntemleri alanında uzman iki akademisyenin görüşlerine başvurulmuştur.

Görüşülen öğretmen adayları, kendilerini ifade edebilecek ve kolay ulaşılabilme özelliklerine sahip öğretmen adayları arasından gönüllülük esasına göre seçilmiştir. Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden önce araştırmanın tamamen gönüllük ilkesine göre yürütüleceği, çalışmaya devam etmek istemeyen öğretmen adaylarının istedikleri anda çalışmadan ayrılabilecekleri araştırmacılar tarafından açıklanmıştır. Ayrıca, öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerin ses kaydı altına alınacağı ve bu durumun kendileri için bir sakıncasının olup olmadığı öğretmen adaylarına sorulmuş ve bu konudaki izinleri alınmıştır. Araştırmacılar tarafından öğretmen adaylarının isimlerinin ve bilgilerinin kimseyle paylaşılmayacağı ve araştırmada kendi isimleri yerine takma isimler kullanılacağı belirtilmiştir. Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlar 25–30 dakika sürmüştür. Mülakatların tamamı birinci yazar ile öğretmen adaylarının birebir görüşebilecekleri, dışsal faktörlerin katılımcının dikkatini dağıtmayacağına inanılan bir ortamda gerçekleştirilmiştir. Aşağıda DYKİDMF'de öğrencilere verilen tanımlar ve ispat sunulmuştur.

Tanım 1 (reel sayı dizisi). *$f: N \to R$ şeklinde tanımlanan fonksiyona reel sayı dizisi denir.*
Tanım 2 (dizilerin yakınsaklığı). *$(s_n) \longrightarrow s \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in N$ öyleki $\forall n > n_0$ için $|s_n - s| < \varepsilon$.*

Teorem: *Yakınsak bir dizinin tek bir limiti vardır.*
İspat. *Kabul edelim ki (s_n) dizisinin limiti tek olmasın. Örneğin*

$$(s_n) \to s \quad \text{ve} \quad (s_n) \to s^*$$

olsun. $(s_n) \to s$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_1 \in N$ öyleki

$$\forall n > n_1 \quad \text{için} \quad |s_n - s| < \varepsilon$$

dir. $(s_n) \to s^*$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_2 \in N$ öyleki

$$\forall n > n_2 \quad \text{için} \quad |s_n - s^*| < \varepsilon$$

olur. Buradan

$$|s - s^*| = |s - s_n + s_n - s^*| \leq |s - s_n| + |s_n - s^*|$$
$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

olur. Herhangi iki reel sayı arasındaki farkın mutlak değerinin her pozitif sayıdan küçük olması bu iki sayının eşit olması ile mümkün olacağından,

$$s = s^*$$

olmalıdır.

Verilerin Analizi

Öğretmen adaylarının görüşlerinden elde edilen verilerin çözümlenmesinde içerik analizi kullanılmıştır. İçerik analizi, elde edilen ham verilerin anlamlandırılarak belirli bir çerçeve oluşturulması ve beliren durum netlik kazandıktan sonra düzenlenerek kod ve kategorilerin ortaya çıkarak somutlaşmasını sağlamaktadır (Patton, 2002). İçerik analizi yaklaşımı, nitel mülâkat verilerinin ve açık uçlu soruların analizinde sıkça kullanılan bir yöntemdir. Araştırmada, içerik analizi yöntemlerinden 'kategorisel analiz' kullanılmıştır. Çalışmada veri çeşitlemesi yapılarak katılımcılardan sesli düşünmeleri istenmiş katılımcıların yazılı ifadeleri ve ses kayıtları birlikte değerlendirilmiştir. Çalışmada ilk olarak ses kayıtları yazıya dökülmüştür. Veriler yazıya dökülürken anlaşılamayan ve ifadelerden çıkartılan yorumlar için katılımcılarla görüşülerek anlaşılmayan ifadeler aydınlatılmış ve ifadelerden çıkartılan yorumlardan onay alınmıştır. Mülakat verilerinin yazıya dökülmesi işleminin ardından, araştırmacı tarafından ham verilerden kod ve kategoriler oluşturulmuştur. Kod ve

Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi
Journal of Research in Education and Teaching
Şubat 2013 Cilt:2 Sayı:1 Makale No:25 ISSN: 2146-9199

kategorilerin oluşturulması aşamasından sonra araştırmacının iki meslektaşı tarafından kod ve kategoriler incelenmiştir. Son olarak alınan dönütlerle birlikte kategorilere son hali verilmiştir. Katılımcıların yazılı ve sözlü ifadeleri üzerinde hiçbir düzeltme yapılmadan sıklıkla betimsel olarak sunulmaya çalışılmıştır. Bu sayede araştırma verilerinin güvenilirliğinin artırılması hedeflenmiştir.

BULGULAR

Katılımcıların ispatı değerlendirirken nelere dikkat ettiklerini anlamak amacıyla, katılımcılara "ispatı değerlendirirken nelere dikkat ediyorsunuz?" sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar incelenerek, ispatı değerlendirirken nelere dikkat ettiklerine yönelik görüşleri "Tanım-yöntem-işlem-sonuç-uyum", "Tanım-işlem-sonuç-ezber", "Tanım-işlem-sonuç-uyum", "Tanım-sonuç-uyum", "Tanım-işlem-ezber" ve "Tanım-sonuç" kategorileri altında toplanmıştır. Aşağıda bu kategoriler ve katılımcıların görüşleri sunulmuştur.

Tablo2: Katılımcıların İspatı Değerlendirirken Nelere Dikkat Ettiklerine Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adaylarının görüşleri
Tanım ↓ Yöntem ↓ İşlem ↓ Sonuç ↓ Uyum	***Aslı:*** *Tanıma baktım. Tanımdaki ifadeler güzel yerleştirilmiş. Zaten baştan dediğim gibi tek bir limiti vardır. Burada biraz uç bir ifade tek deyince benim aklıma hemen iki farklı limit olduğunu ortaya koyup sonunda da olmayana ergi yöntemini kullanmak aklıma gelmişti. Burada da o şekilde kullanılmış ve tanımlar güzel kullanılmış. Onun dışında dediğim gibi bu ε'lar toplanmış 2ε. 2ε'u öğrenci büyük bir şey de zannedebilirdi.* $\frac{\varepsilon}{2}$ *olsa daha iyi olabilirdi diye düşünüyorum. Ama onun dışında ispatın yapımı doğru. Yani ε sıfıra çok yakın olduğunu ve zaten keyfi olarak seçtiğimi bildiğim için bu ispatı anladım.*
Tanım ↓ İşlem ↓ Ezber	***Gülay:*** *Tanımın kullanışı doğru ama şurada eşitsizliğin kullanılmasını tam olarak hatırlamıyorum. Doğru olduğunu da hatırlamıyorum. Daha önce yaptık bu ispatı. Yani buradan çözüldüğünü hatırlıyorum ama sonucun bazılarını hatırlamıyorum. Yani buraya varmamız gerektiğini hatırlıyorum ama gerekçesini hatırlayamıyorum. Doğru olup olmadığı hakkında bilgi… Şuradaki farkın da çok küçük bir şey olduğu, bunların değerlerinin de eşit olduğunu söylüyor. Yani ben eksik derim herhalde. Aslında hocanın bize anlattığı şekilde yazılsaydı kafam karışmazdı.* ***Giray****: Dizinin tanımından yararlanıyorum. Şu toplama çıkarmaya ve bu mutlak değer eşitsizliğine bakılması gerek başka da bir şey yok. İki limiti olmadığını yani s ve* s^*. s_n, *s ye yakınsadığından her ε>0 için, bazı eleman* $n_1 \in N$ *vardır öyleki, her* $n > n_1$ *için* $\lvert s_n - s \rvert < \varepsilon$ *dur. Bu tanımından dolayı doğrudur. Aynı şekilde s*'a da yakınsar. Aynı şekilde* $n > n_1$ *için* $\lvert s_n - s^* \rvert < \varepsilon$. *O da doğru.* $s = s^*$, *eşittir.* s_n *dizisini ekleyip çıkarttığımızda… Şurada ε yerine* $\frac{\varepsilon}{2}$ *gibiydi ispatta. ε, bir eksiklik var gibi. ε olmayacak mıydı acaba sonuç? Burayı* $\frac{\varepsilon}{2}$ *alıyorduk. Galiba şey ya, burası* $\frac{\varepsilon}{2}$. *Fark eder mi? İspatta biraz eksiklik vardır.*
Tanım ↓ İşlem ↓ Sonuç ↓ Uyum	***Yunus:*** *İspatta yukarıdaki tanımlardan yararlandım. Ondan sonra herhangi bir işlem hatası var mı ona baktım veya nasıl diyeyim mutlak değer kavramını doğru mu kullandık yanlış mı kullandık ona baktım. Aynı şekilde* s_n*'yi hem ekleyip hem de çıkarttığımızda bir sakıncası var mı ona baktım. Sonucun doğru olduğunu gördüm ε'dan küçük olduğunu gördüm. Dediğim gibi teoremin doğru olduğunu düşünüyorum. Doğru olduğunu düşünmekte tüm aşamaların doğru olduğunu düşünüyorum ve yukarıdaki tanıma da uygun olduğunu düşünüyorum. Bunun için de teoremin doğru olduğunu düşünüyorum. Yukarıdaki tanımla yapılan işlemler birbiriyle uyumludur. İspatın herhangi bir yerinde hata yapılmadığını düşünüyorum.*

Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi
Journal of Research in Education and Teaching
Şubat 2013 Cilt:2 Sayı:1 Makale No:25 ISSN: 2146-9199

Tanım → Sonuç → Uyum	***Yasemin:*** *Tanımın nasıl kullanıldığına baktım. Hani daha sonra bu tanımla şeyi birleştirmiş yakınsak bir dizinin tek bir limiti vardır ya, iki farklı limit almıştık. Bu iki farklı limiti tanımla birleştirerek $s = s^*$demiş. Hem tanımı kullanmış hem de iki farklı ifadeyi birleştirerek tekrar sonuca bağlamış. Bu yüzden bence doğrudur. Ayrı ayrı mesela s_n s'ye ve s^*'a gidiyor. Eğer bu ikisini birleştiremeyen biri olsaydı hem s'ye yakınsadığı hem de s^* kabul edildiği için iki farklı noktaya yakınsayabilir tek bir değeri yoktur gibi bir ifade kullanabilirdi. Ama burada en sonunda verilen tanımdaki ifadeyle birleştirildiği için $s = s^*$çıkmış. Bu da bir tek limiti olduğunu göstermiş.*
Tanım → Sonuç	***Mehmet:*** *Tanım, bir kere zaten tanımları kullanıyoruz. Zaten biz bir teoremi ispatlarken tanımlardan ve aksiyomlardan yaralanıyoruz her zaman. Burada da çoğunlukla tanım 2'yi kullandık. Aynen uyguladım. Ben sonucun da iyi bağlandığı için doğru diye düşündüm.*

Tablo 2 incelendiğinde, Gülay ve Giray'ın ispatı değerlendirirken tanımların doğru kullanılmasına, kullanılan işlemlerin doğru olup olmamasına ve ispatın daha önceki ezber bilgileri ile uyumluluğuna dikkat ettikleri görülmektedir. Gülay ve Giray'ın ispat hakkındaki bilgileri ezber merkezli olduğu için ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat etmedikleri ortaya çıkmıştır. Gülay ve Giray ispat ile eski ezber bilgileri arasında farklılık olduğunu düşünmektedir.

Aslı ispatı değerlendirirken nelere dikkat ettiğine yönelik ifadelerinden, tanımın doğru kullanılmasına, kullanılan ispatlama yönteminin doğruluğuna, yapılan işlemlerin doğruluğuna, istenen sonuca ulaşılıp ulaşılmamasına ve ifadeler arasındaki uyuma dikkat ettiği sonucuna ulaşılmıştır. Diğer katılımcılardan farklı olarak Aslı, ispatı değerlendirirken ispatlama yönteminin doğru kullanılıp kullanılmamasına dikkat etmiştir. Ayrıca Aslı ispatı değerlendirirken diğer katılımcılardan daha çok faktörü göz önünde bulundurmuştur. Yunus ispatı değerlendirirken tanımların kullanımına, işlem hatası olup olmamasına, istenen sonuca ulaşılmasına ve ifadeler arası uyuma dikkat etmiştir. Yasemin'in ifadelerinden, ispatı değerlendirirken tanımların kullanımına, istenen sonuca ulaşılmasına ve ifadeler arası uyuma dikkat ettiği sonucuna varılmıştır. Mehmet'in ise ispatı değerlendirirken tanımların doğru kullanılmasına ve istenen sonucun elde edilmesine dikkat ettiği kanısına varılmıştır. Mehmet diğer katılımcılara oranla ispatı değerlendirirken daha az faktörü dikkate almıştır.

Katılımcıların görüşleri doğrultusunda elde edilen verilere göre genel bir değerlendirme yapıldığında, katılımcılar ortak olarak tanımların doğru kullanılıp kullanılmamasına ve ispatın sonunda bulunması gereken ifadenin olup olmamasına dikkat ettikleri tespit edilmiştir. Bu görüşler doğrultusunda, Gülay ve Giray ispatı eksik olarak, diğer katılımcılar ise (Aslı, Yunus, Yasemin, Mehmet) doğru olarak değerlendirme eğilimindedir.

Katılımcıların ispatı değerlendirilen nelere dikkat ettikleri hakkındaki görüşlerinin ardından, katılımcılardan ispatın doğruluğuna ilişkin bir hüküm vermeleri ve gerekçelerini yazmaları istenmiştir. Tablo 3'te katılımcıların ispatı değerlendiklerinde verdikleri kararlara ve yazdıkları gerekçelere yer verilmiştir.

Tablo 3: Katılımcıların İspatı Değerlendirdiklerinde Verdikleri Kararlar ve Gerekçeleri

Katılımcılar	**Karar**		**Gerekçe**
	Doğru	**Eksik**	
Aslı	✓		*Teoremi okuduğumda dizinin bir tek limitinin olduğunu görünce hemen aklıma olmayana ergi metodu geldi. İspata baktığımda benim düşündüğüm yöntemin kullanıldığını gördüm. İspat tamamen doğrudur. Tanım doğru uygulanmış sonuçta iki farklı limitin olduğu kabul edip tek bir limiti olduğunu gördüğümüz için ispat doğrudur. Kullandığımız yöntem bu ispata uymuştur.*
Yasemin	✓		*Teoremin ispatında dizinin yakınsaklığından faydalanılmıştır. İki farklı yakınsanan sayının birbirine eşit olduğu gösterilmiştir. Dizinin yakınsaklık tanımında $\lvert s_n - s\rvert < \varepsilon$ ve $\lvert s_n - s^*\rvert < \varepsilon$ şeklinde olacağı belirtilmiştir. Teoremin ispatında bu tanımlar kullanılmış ve istenen sonuca ulaşılmıştır. Sonuç olarak $s = s^*$ bulunmuştur. Bu yüzden ispatın doğru bir şekilde yapıldığını düşünüyorum.*

Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi
Journal of Research in Education and Teaching
Şubat 2013 Cilt:2 Sayı:1 Makale No:25 ISSN: 2146-9199

Giray		✓	*$\lvert s_n - s\rvert < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\lvert s_n - s^*\rvert < \frac{\varepsilon}{2}$ almalıyız.* *$\lvert s - s_n + s_n - s^*\rvert \leq \lvert s - s_n\rvert + \lvert s_n - s^*\rvert < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ olur.* *Bu da $s = s^*$'ı verir*
Yunus	✓		*Yukarıdaki tanımla yapılan işlem birbiriyle uyumludur. İspatın herhangi bir yerinde hata yapıldığını düşünmüyorum.*
Mehmet	✓		*Yukarıdaki verilen teoremin ispatının tanımlardan yararlanarak doğru olduğunu düşünüyorum. Ayrıca bu teoremin ispatını daha önceden görmüş olmam, ispatı tekrar yapmamı kolaylaştırdı.*
Gülay		✓	*Sonuç kısmındaki cümleyi tam olarak kavrayamamış olmam. Ayrıntılı bilgi gerekebilir.*

Tablo 3'e göre, Gülay ve Giray ispatın eksik olduğunu belirtmiş fakat yeterli bir açıklama yapamamışlardır. İspatı değerlendirirken farklı noktalara odaklanmışlardır. Giray daha önce görmüş olduğu bu ispatı değerlendirdiğinde, ezberlediği ispattaki sembolden başka sembol kullanıldığı için ispatın eksik olduğunu belirtmiştir. Giray'ın buradan da anlaşıldığı gibi, yeterince küçük bir pozitif reel sayı olan ε sayısını kavramadan bu teoremi sadece ezberleme yoluna gittiği görülmektedir. Giray'ın ezberlediği teoremde $\frac{\varepsilon}{2}$ sayısı kullanılmış fakat çalışmada ε sayısı kullanılmıştır. Burada ε sayısı, yeterince küçük keyfi bir pozitif reel sayı olduğundan tanımda ε ya da $\frac{\varepsilon}{2}$ yazılması hiçbir şeyi değiştirmeyecektir.

Gülay ise herhangi iki reel sayının farkının mutlak değerinin her pozitif reel sayıdan küçük olması durumunu kavrayamadığı için ispatı eksik olarak değerlendirmiştir. Herhangi iki reel sayının farkının mutlak değeri her pozitif reel sayıdan küçük olması durumu sadece mutlak değerli ifadenin sıfır olması, yani farkı alınan iki sayının birbirine eşit olması ile mümkündür. Gülay'ın yazdığı gerekçeye bakılarak, eşitsizlik, mutlak değer ve ε kavramlarını tam olarak kavrayamadığı anlaşılmaktadır.

Aslı, Yasemin, Yunus ve Mehmet ise teoremin doğru ispatlandığını düşünmektedirler. İki farklı eşitsizliğin hangi şartlar altında ortak olarak kullanılabileceğine dikkat etmemişlerdir. Bunun sebebi olarak, bir dizinin bir noktaya yakınsamasının hangi şartlar altında gerçekleştiğini tam olarak anlamadıkları ve söz konusu kavramı içselleştiremedikleri söylenebilir.

Katılımcılar ispatı değerlendirirken çoğunlukla sonuç odaklı bir yaklaşım sergilemişlerdir. Bu bakımdan, katılımcıların ispatın doğruluğunu gösterme fonksiyonuna daha fazla odaklandıkları görülmektedir. Ayrıca katılımcılar ispatın en önemli fonksiyonu olan "Açıklama" yani bir ifadenin neden doğru olduğunu gösterme işlevini dikkate almadıkları yorumu yapılabilir. Katılımcıların ispatı değerlendirirken yaşadıkları zorluklara bakıldığında ise, katılımcıların matematiksel dil ve notasyonları anlamada eksiklikleri olduğu ve ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat etmedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Katılımcıların yaşadıkları bu zorlukların sebebi olarak ispatı anlamadan ezberleme yoluna gitmeleri görülmektedir.

SONUÇ VE TARTIŞMA

Çalışmada katılımcılar ispat değerlendirmede başarısız olmuşlardır. Bu başarısızlığın sebebi olarak, katılımcıların ispattaki anahtar düşüncelerin farkında olmamaları ön plana çıkmaktadır. Matematikçilere göre ispat anahtar düşüncelerle doludur, ancak bu durum birçok öğrenci için böyle değildir. Çünkü öğrencilerin o konu hakkındaki bilgisi anahtar fikir oluşturacak düzeyde değildir. Matematikçiler öğretim esnasında anahtar fikirlere gerekli vurguyu yapmamakta daha da önemlisi değerlendirmede kullanmamaktadırlar (Raman, 2003). Bu çalışmada da görüldüğü gibi öğrenciler ispatlardaki anahtar düşüncelerin farkında olmadan ispatları ezberleme yoluna giderek dersleri başarı ile geçmektedirler. Bu durum derslerde ispatın üzerinde fazla durulmaması ve değerlendirmede de kullanılmamasından kaynaklanmaktadır. Bu bakımdan derslerde ispatın içindeki anahtar fikirler vurgulanmalı ve dersin değerlendirilmesi sürecinde kullanılmalıdır. Çünkü bir matematikçinin ispatı okuduğunda, dikkatini en çok yoğunlaştırdığı şey tümdengelim ve sonuçlandırma şeması değildir. Onun dikkatini en yoğunlaştırdığı şey, ispatta aralarında yeni ilişkilerin aydınlatıldığı, anlamayı davet eden matematiksel fikirler ve anlamanın en önemli öğesi olan mantıktaki boşlukların arasındaki köprü vazifesini gören sezgilerdir (Hanna, 1991).

Katılımcıların ispatı değerlendirirken çoğunlukla sonuç endeksli bir yaklaşım sergiledikleri görülmüştür. Bu çerçeveden değerlendirildiğinde, katılımcıların ispatın doğruluğunu gösterme fonksiyonuna daha fazla odaklandıkları görülmektedir. Ayrıca katılımcılar ispatın en önemli fonksiyonu olan "Açıklama", yani bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklama fonksiyonuna (Hanna, 2000) dikkat etmedikleri tespit edilmiştir.

Katılımcıların ispatı değerlendirirken yaşadıkları zorluklara bakıldığında ise, katılımcıların (Moore, 1994) yapmış olduğu çalışmadan elde edilen sonuçları destekler bir şekilde matematiksel dil ve notasyonları anlamada eksiklikleri olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Katılımcıların yaşadıkları bu zorlukların sebebi olarak ispatı anlamadan ezberleme yoluna gittikleri görülmektedir. Concradie ve Frith (2000) çalışmasında da üniversitelerde okutulan matematik dersleri ilk bakışta öğretmen adaylarının zor anlayacağı ispatlarla dolu olduğunu ve bu yüzden öğretmen adayları dersi geçebilmek için ispatları anlamadan ezberlediklerini belirtmiştir.

Araştırmada, katılımcıların dizilerin yakınsaklığı kavramının öğretiminin üzerinden fazla zaman geçmemesine, teoremlerin ispatında gerekli olan tanımların katılımcılara verilmesine, çalışmada kullanılan teoremin daha önceden derslerde ispatlanmasına ve katılımcıların bu konunun öğretildiği dersi başarı ile geçmiş öğrencilerden seçilmesine rağmen ispat değerlendirme çalışmasında başarısız oldukları ortaya çıkmıştır. Bu durum literatüre bakıldığında, Weber (2001)'in "Öğretmen adaylarının bir teoremi ya da bir kavramı hatırlıyor olması onların ilgili ispatı yapmalarını garanti etmez. İspatı yaparken başarısız olur ve ne yapacağını bilmediği için çıkmaza girer. Bunun sebeplerini anlamak için öğretmen adaylarının ispat yapmaya çalışırken kullandıkları yöntemleri anlamak daha faydalı olur." şeklindeki araştırma sonucunu desteklemektedir.

Derslerde ispat yapılırken, dersin öğretiminden sorumlu olan öğretim elemanları ispatı kendileri yapmadan, öğrencilere ispat yapmaları için fırsat vermeli ve bu sayede öğrenciler ispat yapmaya teşvik edilmelidir. Öğrenciler de ispatlarla karşılaştıklarında onları ezberleme yoluna gitmeden kendileri ispatlamayı denemelidir. Bu şekilde öğrenciler ispatlardaki anahtar fikirlerin farkına varabilirler. İspatları yaparken yazdıkları ifadelerin ne anlama geldiğinin farkında olarak ispatlardaki incelikleri keşfedebilirler. Böylelikle, ispatı ezberlenmesi gereken semboller dizisi olarak değil matematiksel kavramların daha iyi anlaşılmasını sağlayan bir araç olarak görmeleri mümkün olur.

Not: Bu çalışma 07-09 Kasım 2012 tarihlerinde Antalya'da 16 Ülkenin katılımıyla düzenlenen "World Conference on Educational and Instructional Studies - WCEIS-2012"da sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

KAYNAKÇA

Arslan, Ç. (2007*). İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi*. Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar, *Eğitim ve Bilim*, Cilt 35, Sayı 156.

Aydoğdu, T. Olkun, S. ve Toluk, Z. (2003). İlköğretim öğrencilerinin çözdükleri matematik problemlerini kanıtlama süreçleri, *Eğitim Araştırmaları,* 4(12), 64-74.

Bahtiyari A. Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Calude, C. S. ve Marcus, S. (2004). Mathematical Proofs at a Crossroad? LNCS 3113, pp. 15–28, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Conradie, J. ve Frith, J. (2000). Comprehension Tests in Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 42, 225-235.

Coşkun, F. (2009). *Ortaöğretim Öğrencilerinin Van Hiele Geometri Anlama Seviyeleri İle İspat Yazma Becerilerinin İlişkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çepni, S. (2005). *Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş*, genişletilmiş ikinci baskı, Üçyol Kültür Merkezi, Trabzon.

Ekiz, D. (2003*). Eğitim Araştırma Yöntem ve Metodlarına Giriş*, Anı Yayıncılık, Ankara.

Fawcett, H. P. (1938). The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof. (NCTM year book 1938). New York: Teachers' College, Columbia University.

Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Orta Öğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspat Hakkındaki Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi,* 20, 2, 571-590.

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi, 30,* 319.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Hingham, MA: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics* 44:5–23.

Hanna, G. ve Barbeau, E. (2009). Proof In Mathematics University Of Toronto, Canada http://www.math.toronto.edu/barbeau/hannajoint.pdf.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining*. Educational Studies in Mathematics, 24,* 389–399.

İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi.* Yayınlanmamış doktora tezi. Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge.* New york: Oxford university press.

Mansi, K. E. (2003). Reasoning And Geometric Proof In Mathematics Education A Review Of The Literature A thesis submitted to the Graduate Faculty of North Carolina State University in partial fulfillment of the Degree of Master of Science.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. Educational Studies in Mathematics, 27, 249-266.
National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standarts for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oxford American Dictionary. (2004).

Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 2, 1083-10989.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative Research & Evaluation Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Peterson, P. L., Carpenter, T. C. ve Loef, M. (1989). Teachers' Pedegogical Contend Beliefs In Mathematics. *Cognition And Instruction* 6, 1-40.

Raman, M. J. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics,* 52(3), 319-325.

Rav, Y. (1999). Why do we proof theorems? *Philosophia mathematica, 7*(1), 5-41.

Ross, K. A. (1998). The place of Algorithms and Proofs in School Mathematics. *Doing and Proving.* March, 252-255

Stylianides, A. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20.

Tall, D. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some?, Conference of the University of Chicago School Mathematics Project.

Turner, J. W. (2010). A Brief Introduction to Proofs. 23.03.2012 tarihinde http://www.google.com.tr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&frm=1&source=web&cd=1&ved=0CCkQFjAA&url=http%3A%2F%2Fpersweb.wabash.edu%2Ffacstaff%2Fturnerw%2FWriting%2Fproofs.pdf&ei=YG5sT6XgLqHW0QWsp6TPBg&usg=AFQjCNHtvXRGppPMiuolT_edwQa00e_hUw&sig2=obqGpMIyytWpP9AmOVwfMA adresinden alınmıştır.

Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need for Strategic Knowledge. Educational Studies in Mathematics, 48, 101-119.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Seçkin Yayınları, Ankara.