

LİSE 12.SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİK İSPAT SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Arş. Gör. Emine Şimşek
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi
eminesimsekbasaran@gmail.com

Ali Şimşek
Emine ve Mehmet Baysal Lisesi
simsekali_399@hotmail.com

Öğr. Gör. Sefa Dünder
Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi
sefadundar@gmail.com

Özet

Araştırmanın amacı lise 12. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat yapma süreçlerinin incelenmesidir. Araştırma nitel araştırma modellerinden olup, durum çalışması modeli kullanılmıştır. Çalışma 2012-2013 öğretim yılında Bolu ilinde bulunan bir devlet genel lisesinin, fen grubunda öğrenim gören 7 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere 9 geometrik ispat sorusu sorulmuş, verdikleri yanıtlardan ve araştırmacıların yanıtları incelemesinden sonra öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerden veriler toplanmıştır. Verilerin analizinde yüzde ve frekans tablolarından yararlanılmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin geometri sorularını ispatlamadaki başarıları ve ispat süreçleri ortaya çıkarılmıştır. Çalışmanın sonuçlarına dayanılarak çeşitli öneriler sunulmuştur. Araştırma ile öğrencilerin ispat yapma süreçleri ortaya konarak konu ile ilgili eğitimcilere ve araştırmacılara faydalı bilgiler sağlamak amaçlanmaktadır.

Anahtar Sözcükler: İspat, ispat yapma süreci, 12. sınıf öğrencileri.

THE INVESTIGATION OF HIGH SCHOOL 12th GRADE STUDENTS' GEOMETRIC PROOF PROCESS

Abstract

The purpose of this study was to determine the high school 12th grade students' geometric proving process. This research is one of the qualitative research methods and case study model is used in this study. The study is applied on seven 12th grade students studying at a public high school located in Bolu on the academic year 2012-2013. Students were asked nine questions of geometric proof. Research data was obtained through the answers that students gave during the tests, and the semi-structured interviews, conducted with the students after the evaluation of the responses. For the analysis of data, percentage and frequency tables were used. As a result of the study students' proving processes, their prior knowledge, and the difficulties and fallacies they had are revealed in this process. Various suggestions are put forward based on the results of the study. The aim is to provide useful knowledge for the educationalists and researchers concerned with the subject through revealing students' proof giving process with this research.

Key Words: Proof, proving process, 12th grade students.

GİRİŞ

İspat bir şeyin neden doğru olduğunu açıklamaktır (Rotman, 2002; Hanna, 1989). İspat ve ispat yapma tüm matematiğin merkezidir (Jones ve Rodd, 2001). İspat öğrencilerde saf akıl yürütme gücünün yansıtılabileceği önemli bir etkinliktir. Geometri ise, ispatın her türünün uygulanabileceği matematiğin en uygun öğrenme alanıdır (Zaimoğlu, 2012). İspat matematiğin önemli bir parçasıdır ve elbette öğrencilerle ispat fonksiyonu önemi ve sınırlılıklarına işaret edilerek tartışılmalıdır (Hanna, 2000).

NCTM süreç standartlarından biride akıl yürütme (muhakeme) ve ispattır (NCTM, 2000). Muhakemenin anlamı; “sonuçlardan, yargılardan, gerçeklerden ya da önermelerden bir sonuç çıkarma işlemi; önermeleri, yargıları bir kalıba bağlamak ve bunlardan emin olmaktır” (Altıparmak ve Öziş, 2005). Aşağıda bu süreçte öğrencilerden beklenen beceriler yer almaktadır:

Tablo 1: NCTM süreç standartları ve öğrencilerden bu süreçte beklenenler (NCTM, 2010)

NCTM Süreç Standardı	Beklenenler
Akıl Yürütme ve İspat	İspat ve akıl yürütmeyi matematiğin temel yönleri olarak tanıma
	Matematiksel varsayımda bulunma ve inceleme
	Matematiksel kanıt ve ispat geliştirme ve değerlendirme
	Farklı ispat yöntemleri ve akıl yürütme becerileri seçme ve kullanma

Muhakeme sadece matematiksel değil aynı zamanda temel bir yetenektir. İspat ve muhakeme insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu yeteneklerdir. Bu yeteneğin gelişimi okullarda izlenen programa ve belirlenecek uygun stratejilere bağlıdır. Öyle ki bu stratejileri istenilen yapıda belirleyemezseniz insanda doğuştan var olan ispat ve muhakeme yeteneklerini zamanla yok edip, ezberleme yolunu seçen, neden-sonuç zincirini takip edemeyen bireyler yetiştirmiş olursunuz (Altıparmak ve Öziş, 2005).

NCTM standartlarında da yer aldığı gibi muhakeme ve ispat matematik programlarında yer alan özel zamanlar ve özel konular ayrılmış özel aktiviteler olmamalı, konu ne olursa olsun sınıf içi tartışmaların doğal, sürekli bir parçası olmalıdır. NCTM standartlarından da ispatın bir birim, bir ünite olarak öğretilmeyeceği görülür (Jones ve Rodd, 2001).

İspat öğrenme ve öğretme araştırmalarında son zamanlarda artış söz konusudur. 1990 ile 1999 yılları arasında matematik eğitiminde önde gelen dergilerden birinde bu konuda yüze yakın sayıda araştırma yer almıştır. Nicolas Balacheff 1997’den beri, Matematiksel İspatları Öğrenme ve Öğretme Üzerine Uluslararası Bülten (International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof) isimli web sitesini yürütmektedir ve bu web sitesi günümüze kadar beş binin üzerinde ziyaret edilmiştir. Sitede ispat üzerine teorik ve ampirik araştırmalar, kitaplar ve makaleler yer almaktadır. Bu gelişmeler matematik eğitiminde ispatın önemini kanıtlar niteliktedir (Hanna, 2000).

İspat okuma ve yazma üniversite matematiğinin temel ayırt edici özelliklerinden biridir (Almedia, 2000). Lisans öğrencileri için önceki deneyimleri sınırlı olduğunda ispat yapma oldukça zor olacaktır. Matematiksel muhakeme okul yılları boyunca öğrencilerin matematiksel deneyimlerinin bir parçası olursa, öğrenciler bu düşünce tarzına alışmış olur (Jones ve Rodd, 2001). Öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat ve ispat yapma ile ilgili görüşlerini, kabullenmelerini veya tutumlarını ortaya çıkarmaya yönelik olarak çok sayıda araştırma yapılmıştır (Almeida, 2000; Weber, 2011; Üzel ve Özdemir, 2009; İpek, 2010; Furinghetti ve Morselli, 2011; İskenderoğlu ve Baki, 2011; Doruk, Kıymaz ve Horzum, 2012; Güler ve Dikici, 2012; Köğçe, 2012). Almedia (2003)’ a göre son yıllarda yapılan araştırmalar ile ortaöğretim ve lisans öğrencilerinin matematiksel ispatları anlamaları hakkındaki endişeler dile getirilmektedir. Matematiksel ispatın bu kadar önemli olmasına ve eğitiminde üzerinde durulmasına rağmen öğrenciler ispat yapmada sıkıntılar yaşamaktadır (Marrades ve Gutierrez, 2001; Özer ve Arıkan, 2002; Sarı, Altun ve Aşkar, 2007; Golzy, 2008; Coşkun, 2009; Arslan ve Yıldız, 2010; İpek, 2010; Uğurel ve Morali, 2011; Zaimoğlu, 2012).

Öğretim programları öğrenciyi informal bir durumla karşılaştırıp, formal bir matematiksel yapıya ulaşmasını sağlayan bir öğrenme döngüsü benimser. Bu döngü Problem → Keşfetme → Hipotez Kurma → Doğrulama → Genelleme → İlişkilendirme → Çıkarım aşamalarından oluşur (MEB, 2011). Bu yaklaşımda öğrenci kendi faaliyet ve çabaları sonucunda bir problem durumu ile başladığı matematiksel çalışma sürecini, ulaştığı ve ilişkilendirdiği bir matematiksel durum ile sonlandıracaktır. Tabi ki bu sürecin başarı ile yapılandırılmasında öğretmen ve öğrencilere önemli roller ve sorumluluklar yüklenmektedir (MEB, 2011). Öğrenci bu süreçte;

- Varsayımda bulunma, ilişkilendirme ve genelleme yapmalı,
- Ulaştığı matematiksel sonucu açıklamalı,
- Problem çözmeli ve kuralı,
- Keşfetme ortamında ulaştığı sonuçların doğruluğunu göstermeli,
- Sınıf içi tartışmalara ve grup çalışmalarına aktif olarak katılmalıdır (MEB, 2011).

Öğrencilerin sahip olması gereken beceriler incelendiğinde, öğrencilerin bu becerilere sahip olup olmadığı veya bu becerilere sahip olma düzeyleri merak konusudur. Öğrencilerin ispat yapma sürecindeki başarıları, ön doğrular ile yaşadıkları zorlukları tespit etmeyi amaçlayan bir araştırmaya ihtiyaç duyulmuştur. Bu ihtiyaç doğrultusunda aşağıdaki problemlere cevap aranmıştır:

1. Lise 12.sınıf öğrencilerinin geometri sorularını ispatlamada başarıları nasıldır?
2. Lise 12.sınıf öğrencilerinin geometri sorularını ispatlama süreçleri nasıldır?

YÖNTEM

Araştırma Modeli

Araştırmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması (case study) deseni kullanılmıştır. Durum çalışması, güncel bir olguyu kendi gerçek yaşam çerçevesi içinde çalışan ve durumları çok yönlü, sistemli ve derinlemesine inceleyen görgül bir araştırma yöntemidir (Yıldırım ve Şimşek, 2005: 277). Durum çalışmalarının büyük bölümünde genelleme bir amaç değildir, çünkü her durumun kendi eşsizliğini keşfetmek temel amaçtır ve araştırmacılar her durumu yeni ve sıra dışı etkileşimler, olaylar, açıklamalar, yorumlamalar ve etki-tepki ilişkileri ortaya çıkarmak umuduyla incelerler (Çıray, 2012).

Çalışma Grubu

Çalışma Bolu İli Mengen İlçesi'nde bulunan bir genel lisesinin fen grubunda öğrenim gören 7 öğrenci ile yürütülmüştür. Çalışmaya katılan öğrenciler gönüllüdür.

Veri Toplama aracı

Veri toplama aracı olarak Golzy (2008)' nin araştırmasında kullandığı, literatür taraması sonucu kendisi tarafından geliştirilen dokuz geometrik ispat sorusu kullanılmıştır. Dokuz ispat sorusu Türkçe' ye çevrildikten sonra üç uzmandan, bu soruların lise 12.sınıf öğrencilerinin ispat yapmasına uygun olup olmadığı ile görüşler alınmış ve uygun olduğu görüşü sonucunda araştırmada kullanılmaya karar verilmiştir.

İkinci veri toplama aracı ise; öğrencilerin ispat sorularına verdikleri yanıtlar incelendikten sonra, yanıtlarda görülen belirsizlikleri ve eksikleri gidermek için öğrencilerle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmelerdir. "Yarı yapılandırılmış görüşme tekniğinde, araştırmacı önceden sormayı planladığı soruları içeren görüşme protokolünü hazırlar. Buna karşın araştırmacı görüşmenin akışına bağlı olarak değişik yan ya da alt sorularla görüşmenin akışını etkileyebilir ve kişinin yanıtlarını açmasını ve ayrıntılandırmasını sağlayabilir" (Türnüklü, 2000: 547). Öğrencilerin çözümleri incelenerek, her öğrenciye yanıtlarına göre farklı sorular yöneltmiştir.

Veri Toplama Süreci

Araştırma 2012-2013 Eğitim-Öğretim yılı kasım ve aralık aylarında gerçekleştirilmiştir. Dokuz ispat sorusu üç tane üçerli gruba ayrılarak yedi öğrenciye birer hafta aralıklarla uygulanmıştır. Bu ispat sorularını yanıtlamaları için, zaman sınırlaması yapılmamıştır. Öğrencilerin yanıtları incelendikten sonra öğrencilerle ayrı ayrı yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmeler için öğrenci cevapları incelenerek ispat sürecindeki boşluklara işaret eden, süreci derinlemesine incelemeyi sağlayacağı düşünülen sorular hazırlanmıştır. Görüşmelerde öğrenci cevabına göre farklı sorular da sorulmuş ve öğrenci yanıtları görüşme sırasında kaydedilmiştir.

Tablo 2: Veri Toplama Süreci

Veri Toplama Aracı	Veri Kaynağı	Süre
Dokuz Geometrik İspat Sorusu	7 lise 12.sınıf fen grubu öğrencisi	İspat sorularının çözümü için süre sınırlaması yapılmamıştır. Araştırma üç hafta sürmüştür.
Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler	7 lise 12.sınıf fen grubu öğrencisi	Her öğrenci ile 15 – 30 dakika

Verilerin Analizi

Her bir soruda, öğrencilerin verdikleri cevaplar tek tek irdelenmiş, yanıtlar dört kategoriye ayrılarak değerlendirilmiştir. Bu analizde Soylu ve Soylu (2006) ile Yeşildere (2006) tarafından geliştirilen sınıflama ile puanlama sisteminden yararlanılmış ve her bir kategorinin karşılığı aşağıdaki şekilde belirlenmiştir:

- *Doğru ispat*; öğrencilerin şematik veya cebirsel yaklaşımla soruda istenenlerin tamamını elde edebilmesidir (Soylu ve Soylu, 2006). İspat yapma şekli ve açıklaması doğru, düşüncelerini doğru matematiksel gösterim ve sembollerle ifade eden, akıl yürütme biçimini net olarak ifade eden ve tam bir anlama içerisinde olduğunu belirten cevaplara verilmiştir (Yeşildere, 2006).
- *Kısmen doğru ispat*; sorulan soru ile ilgili bilgilerin bir kısmını içeren cevaplara verilmiştir. İşlem hatası, eksik bilgi veya sonuca ulaşamama söz konusudur (Soylu ve Soylu, 2006).
- *Yanlış ispat*; ispat yapma sürecinde yanlış cevaplara verilmiştir.
- *İspat yok*; yanıtız cevaplara verilmiştir.

Bu sınıflamaya göre, her soruda öğrenci yanıtlarının hangi sınıfa ait olduğu belirlenmiş ve öğrenci sayısına göre tablolaştırılıp, yorumlanmıştır. Öğrenci yanıtları ve yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen verilerin incelenmesi sonucu öğrencilerin geometri sorularını ispatlamadaki başarıları ve her soru için ispat süreçleri tespit edilip yorumlanmıştır.

BULGULAR VE YORUMLAR

Öğrencilerin Geometri Sorularını İspatlamadaki Başarılarına İlişkin Bulgular ve Yorumlar

Araştırmanın birinci alt problemi olan “Lise 12.sınıf öğrencilerinin geometri sorularını ispatlamada başarıları nasıldır?” sorusuna çözüm aranırken, öğrencilerin geometrik ispat sorularına verdikleri cevaplar sınıflanmış ve bu sınıflama için yüzde ve frekanslar hesaplanmıştır.

Tablo 3: İspat Sorularına Verilen Yanıtların Yüzde ve Frekansları

	Doğru İspat		Kısmen Doğru İspat		Yanlış İspat		İspat Yok	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Birinci İspat Sorusu	0	0	6	85.7	1	14.3	0	0
İkinci İspat Sorusu	5	71.4	2	28.6	0	0	0	0
Üçüncü İspat Sorusu	5	71.4	0	0	2	28.6	0	0
Dördüncü İspat Sorusu	3	42.9	0	0	1	14.3	3	42.9
Beşinci İspat Sorusu	5	71.4	1	14.3	0	0	1	14.3
Altıncı İspat Sorusu	4	57.1	2	28.6	0	0	1	14.3
Yedinci İspat Sorusu	0	0	1	14.3	0	0	6	85.7
Sekizinci İspat Sorusu	4	57.1	0	0	0	0	3	42.9
Dokuzuncu İspat Sorusu	4	57.1	1	14.3	0	0	2	28.6
TOPLAM	30	47.6	13	20.6	4	6.4	16	23.4

Tablo 3' ten de görüldüğü gibi öğrencilerden alınan 63 yanıtta ortalama %47.6' sı doğru, %20.6' sı kısmen doğru, %6.4' ü yanlış ve %23.4' ü ise boştur. Öğrencilerin yanıtlarının yarısından daha azının doğru olduğu görülmekte, cevapsız soruların fazla olması ise dikkat çekmektedir.

Öğrencilerin Geometri Sorularını İspatlama Süreçlerine İlişkin Bulgular ve Yorumlar Öğrencilerin Birinci Geometri İspat Sorusunda İspat Süreçleri

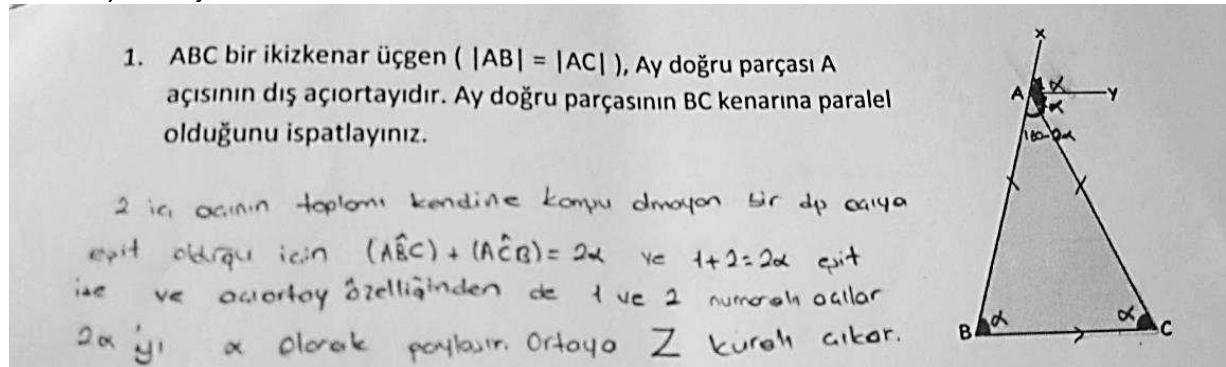
Tablo 3' ten de görüldüğü gibi öğrencilerin %85.7' si birinci soruyu kısmen ispatlayabilmiş, %14.3' ü ise yanlış ispat yapmıştır. Birinci soruda öğrencilerin gerçekleştirdikleri ispat süreçleri aşağıdadır:

Ö₁: Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamından yararlanarak \hat{A} , \hat{B} ve \hat{C} ' yi cebirsel olarak göstermiş, bütünler açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasından yararlanarak A_1 ve A_2 açılarını cebirsel olarak göstermiş, A_1 ve C açılarının ölçüleri eşit olduğundan paraleldir demiş.

Ö₄: Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamından yararlanarak \hat{A} , \hat{B} ve \hat{C} ' yi cebirsel olarak göstermiş, bütünler açılarının ölçüleri toplamının 180° olmasından yararlanarak A_1 ve A_2 açılarını cebirsel olarak göstermiş, A_1 ve C açılarının ölçüleri eşit olduğundan Z kuralına göre paraleldir demiş fakat Z kuralının ne olduğuna dair bir açıklama yapmamış.

Ö₂, Ö₃, Ö₆ ve Ö₇: Üçgende iki iç açının ölçüleri toplamının kendilerine komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşit olmasından yararlanarak A_1 ve C açısının eşit olduğu göstermiş ve Z kuralına göre doğru parçalarının paralel olduğunu söylemişlerdir. Fakat Z kuralının ne olduğuna dair bir açıklama yapılmamış.

Ö₅: İkizkenar üçgenin iç açılarını cebirsel olarak yazmış, ancak A_1 ve A_2 açılarını hesaplayamamış ve ispatı tamamlayamamış.



Şekil 1: Birinci soruya ait bir cevap örneği (Ö₂ öğrencisine aittir)

Öğrencilerin genel olarak sonuca ulaşmada doğru adımlar izlediği, doğruların paralellğine \hat{A}_2 ve \hat{C} ölçülerinin eşitliğinden dolayı karar verdikleri görülmektedir. Yapılan görüşmeler sonrasında öğrencilerden bir tanesi Z kuralını; paralel doğrular arasında kalan iç ters açılarının eşit olması olarak açıklayabilmiş, iki tanesi paralel doğrular arasında kalan açılardan farklı yönlerde bakanların eşit olması olarak açıklamış, iki tanesi ise bilmediklerini söylemişlerdir.

Ö₂: "Aslında Z kuralı diye bir kural yok, aklımızda kalması için böyle bir isim koyulmuş. Aslında kural paralel doğrular arasında kalan iç ters açılarının ölçülerinin eşit olmasından geliyor."

Öğrencilerin İkinci Geometri İspat Sorusunda İspat Süreçleri

Tablo 3' ten de görüldüğü gibi öğrencilerin %71.4' ü ikinci soruyu doğru bir şekilde ispatlayabilmiş, %28.6' sı ise kısmen doğru ispatlayabilmiştir. İkinci soruda öğrencilerin gerçekleştirdikleri ispat süreçleri aşağıdadır:

Ö₂, Ö₄, Ö₆ ve Ö₇: Verilen dörtgende iç açılarının toplamı ile ilgili bir denklem elde etmişler, DMC ve ANB üçgenlerinin iç açılar toplamından $s(\hat{M})$ ve $s(\hat{N})$ ile ilgili denklemler elde etmişlerdir. $s(\hat{M})$ ve $s(\hat{N})$ toplamında birinci denklemi kullanarak, $s(\hat{M}) + s(\hat{N}) = 180^\circ$ olduğunu ispatlamışlardır.

Ö₁: DMC ve ANB üçgenlerinin iç açılar toplamından $s(\widehat{M})$ ve $s(\widehat{N})$ ile ilgili denklemler elde etmiş, ortadaki küçük dörtgende iç açılar cebirsel olarak yazıp, dörtgende iç açılar ölçüleri toplamından bir denklem daha elde etmiştir. $s(M)$ ve $s(N)$ toplamında ikinci denklemi kullanarak, $s(\widehat{M}) + s(\widehat{N}) = 180^\circ$ olduğunu ispatlamıştır.

Ö₃: $s(M)$ ve $s(N)$ 'i; "bir dörtgende karşı iki açının açıortayları arasındaki dar açının ölçüsü diğer iki açının ölçüleri farkının mutlak değerinin yarısına eşittir" bilgisini kullanarak dörtgenin iç açıları cinsinden yazmış, fakat bunun dışında işlem yapmamıştır.

Ö₅: Verilen dörtgende iç açılar toplamı ile ilgili bir denklem elde etmiş, $s(\widehat{M})$ ve $s(\widehat{N})$ 'i; "bir dörtgende karşı iki açının açıortayları arasındaki dar açının ölçüsü diğer iki açının ölçüleri farkının mutlak değerinin yarısına eşittir" bilgisini kullanarak dörtgenin iç açıları cinsinden yazmış, fakat üç denklemi ispat yapmakta kullanmamış ve ispatı tamamlayamamıştır.

2. ABCD dörtgeninde AN, BN, DM ve CM doğru parçaları A, B, C ve D açılarının iç açıortaylarıdır.
 $s(\widehat{M}) + s(\widehat{N}) = 180^\circ$ olduğunu ispatlayınız.

(1)

$$2a + 2b + 2c + 2d = 360$$

$$a + b + c + d = 180$$

$$m + n = 180 + 180 - a - b - c - d$$

$$m + n = 180 + 180 - (a + b + c + d)$$

$$s(m) + s(n) = 180 + 180 - 180$$

$$180$$

bir dörtgenin iç açısı
 $180 \cdot (n - 2)$
 $180 \cdot (4 - 2) \rightarrow 180 \cdot 2$
 360

$m = 180 - c - d$
 $n = 180 - a - b$

Şekil2: İkinci soruya ait bir cevap örneği (Ö₆ öğrencisine aittir)

2. ABCD dörtgeninde AN, BN, DM ve CM doğru parçaları A, B, C ve D açılarının iç açıortaylarıdır.
 $s(\widehat{M}) + s(\widehat{N}) = 180^\circ$ olduğunu ispatlayınız.

$m = \frac{a+b}{2}$
 $n = \frac{c+d}{2}$

$$\frac{a+b+c+d}{2} = m+n$$

$$a+b+c+d = 2(m+n)$$

Şekil3: İkinci soruya ait bir cevap örneği (Ö₃ öğrencisine aittir)

Öğrencilerden beş tanesi ispat yapmada doğru adımlar izlemiş ve ispatı tamamlayabilmişlerdir. İki öğrenci "bir dörtgende karşı iki açının açıortayları arasındaki dar açının ölçüsü diğer iki açının ölçüleri farkının mutlak değerinin yarısına eşittir" bilgisinden yola çıkmış fakat ispatı tamamlayamamışlardır. Öğrencilere görüşmelerde bu bilginin nereden geldiği sorulmuş ancak formül olarak bildiklerini fakat nereden geldiğini bilmediklerini söylemişlerdir. Öğrenciler verilen bilgilerin kendilerine bu formülü hatırlattığını söylemişlerdir.

Öğrencilerin Üçüncü Geometri İspat Sorusunda İspat Süreçleri

Tablo 3' ten de görüldüğü gibi öğrencilerin %71.4' ü üçüncü soruyu doğru bir şekilde ispatlayabilmiş, %28.6' sı ise yanlış ispat yapmıştır. Üçüncü soruda öğrencilerin gerçekleştirdikleri ispat süreçleri aşağıdadır:

$\bar{Ö}_2, \bar{Ö}_4, \bar{Ö}_6$ ve $\bar{Ö}_7$: CBD ve ABD üçgenlerinde, iki iç açının ölçüsü toplamının kendilerine komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşit olmasından faydalanarak ispatı tamamlamışlardır.

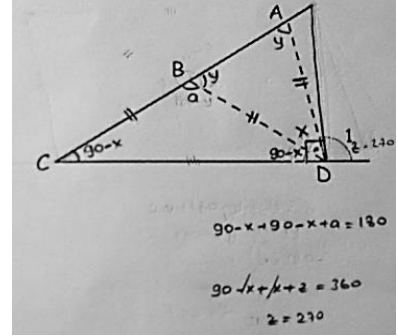
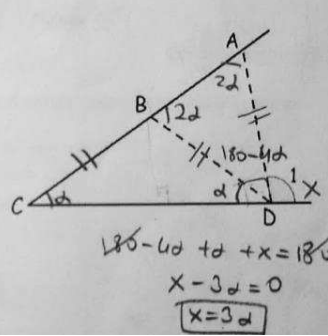
$\bar{Ö}_1$: CBD üçgeninde iki iç açının ölçüsü toplamının kendilerine komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşit olmasından faydalanarak DBA açısının ölçüsünü hesaplamış, ikizkenar DBA üçgeninin açılarının ölçülerini hesaplamış ve D doğrusal açısını oluşturan üç açının toplamının 180° olmasından yararlanarak, D_1 açısının ölçüsünün C açısının ölçüsünün 3 katı olduğunu ispatlamıştır.

$\bar{Ö}_3$: Cebirsel olarak iki üçgenin iç açı ölçülerini yerleştirmiş, fakat bu ölçüleri aynı bilinmeyen ile ifade etmediğinden çözüme gidememiştir.

$\bar{Ö}_5$: Verilen CAD üçgenini dik üçgene tamamlayarak başlamış, bu dik açı ölçüsünden de yararlanarak, iki üçgende iç açıları cebirsel olarak farklı bilinmeyenler ile ifade etmiş çözümünü burada bırakmış ve ispat yapamamıştır.

3. Yandaki şekilde $|AD| = |BD| = |BC|$ dir.
 $s(D_1) = 3 \cdot s(C)$ olduğunu ispatlayınız.

$$x = 3d$$



Şekil4: Üçüncü soruya ait bir cevap örneği (sırasıyla $\bar{Ö}_1$ ve $\bar{Ö}_5$ öğrencilerine aittir)

Beş öğrenci ispat yapmada doğru adımlar izlemiş, iki öğrencinin ise iki üçgende iç açı ölçülerini aynı bilinmeyen cinsinden ifade etmede sıkıntı yaşamıştır. Öğrenciler bir üçgende iki iç açının ölçüsü toplamının kendilerine komşu olmayan dış açının ölçüsüne eşit olması bilgisini kullanmamışlardır.

Öğrencilerin Dördüncü Geometri İspat Sorusunda İspat Süreçleri

Tablo 3' ten de görüldüğü gibi öğrencilerin %42.9' u dördüncü soruyu doğru bir şekilde ispatlayabilmiş, %14.3'ü yanlış ispat yapmış ve %42.9'u ise yanıt vermemiştir. Dördüncü soruda öğrencilerin gerçekleştirdikleri ispat süreçleri aşağıdadır:

$\bar{Ö}_1, \bar{Ö}_2, \bar{Ö}_4$: E, D ve F noktalarını bir doğru parçası yardımıyla birleştirmişler, kenar uzunluklarının eşitliğinden ECD ve EBF üçgenlerinin eş olduğunu söylemişler ve D açısının oluşturan üç açının toplamının 180° olduğunu hesaplayıp, E, D ve F noktalarının doğrusal olduğunu ispatlamışlardır.

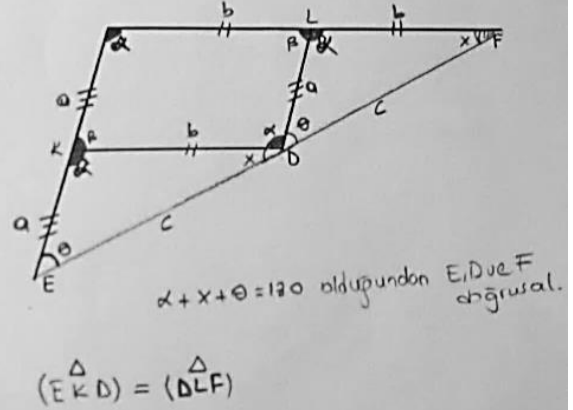
$\bar{Ö}_3, \bar{Ö}_5$: E, D ve F noktalarını bir doğru parçası yardımıyla birleştirmiş, eş kenar uzunluklarını cebirsel olarak isimlendirmiş, bunun dışında başka işlem yapmamışlardır.

$\bar{Ö}_6$: [AF]' na E noktasından geçen bir paralel doğru parçası çizildiğinde noktaların doğrusal olacağını söylemiştir.

$\bar{Ö}_7$: E, D ve F noktalarını bir doğru parçası yardımıyla birleştirmiş, bunun dışında başka işlem yapmamıştır.

4. ABCD paralelkenarında AB ve AC doğru parçaları uzatılarak üzerlerinde $|AB| = |BF|$, $|AC| = |CE|$ olacak şekilde E ve F noktaları seçiliyor. E, D ve F noktalarının aynı doğru üzerinde (doğrusal) olduğunu ispatlayınız.

$\widehat{KBD} \rightarrow \widehat{LDF}$ yönde açılar
 $\widehat{LFD} \rightarrow \widehat{KDE}$ yönde açılar



Şekil 6: Dördüncü soruya ait bir cevap örneği (Ö₂ öğrencisine aittir)

Üç öğrencinin doğru ispat yaptığı, diğer öğrencilerin ise ispata nereden başlayacaklarını bilemedikleri ve herhangi bir işlem yapamadıkları gözlenmiştir.

Öğrencilerin Beşinci Geometri İspat Sorusunda İspat Süreçleri

Tablo 3' ten de görüldüğü gibi öğrencilerin %71.4' ü beşinci soruyu doğru bir şekilde ispatlayabilmiş, %14.3' ü kısmen doğru ispatlayabilmiş ve %14.3' ü ise yanıt vermemiştir. Beşinci soruda öğrencilerin gerçekleştirdikleri ispat süreçleri aşağıdadır:

Ö₁, Ö₃, Ö₄, Ö₅, Ö₆: Soruda ifade edildiği gibi, bir eşkenar üçgen çizerek, bu üçgenin iç bölgesinde bir nokta alıp, bu noktadan kenarlara yükseklikler çizmişlerdir. Bu noktayı üçgenin köşeleri ile birleştirip içlerinde yükseklikleri olan ve eşkenar üçgeni oluşturan üç üçgen elde etmişlerdir. Bu üçgenlerin alanlarının, eşkenar üçgeninin alanına eşit olacağını yazıp, elde ettikleri denklemden, üç yükseklik toplamının, üçgenin yüksekliğine eşit olduğunu ispatlamışlardır.

Ö₂: Diğer öğrenciler gibi soruda ifade edilen şekli çizmiş, alanlar toplamını eşkenar üçgenin alan formülü

olduğunu düşündüğü $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ 'e eşitlemiş, ancak bu eşitlikten sonra işlem yapmamış ve ispatı tamamlayamamıştır.

Ö₇: Diğer öğrenciler gibi soruda ifade edilen şekli çizmiş, sadece üç yükseklik toplamının $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ 'ye eşit olacağını yazmış ancak ispat yapmamıştır.

5. Bir eşkenar üçgenin iç bölgesinde alınan bir noktanın üçgenin kenarlarına olan uzaklıklar toplamının üçgenin yüksekliğine eşit olduğunu ispatlayınız.

Eşkenar üçgenin üçgenin 4 açıları toplamı 180° dir üç kenarında birbirine eşittir. $\frac{180}{3}$ bölerssek her bir iç açıları 60° olur.

$$\frac{m_4 \cdot b}{2} = \frac{m_1 \cdot b}{2} + \frac{m_2 \cdot b}{2} + \frac{m_3 \cdot b}{2}$$

$$m_4 \cdot b = b(m_1 + m_2 + m_3)$$

$$m_4 = m_1 + m_2 + m_3$$

Alandan buldum.

Şekil 8: Beşinci soruya ait bir cevap örneği (Ö₆ öğrencisine aittir)

Öğrencilerin çoğunlukla ispat yapmada doğru adımlar izledikleri görülmüştür. Bir öğrencinin eşkenar üçgenin

alan formülü olan $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ 'ü yanlış hatırladığı görülmüştür. Aynı öğrenci denklem çözümünde ortak paranteze alma ve sadeleştirme işlemlerini de gerçekleştirememiştir. Bu öğrenci yapılan görüşme sırasında eşkenar üçgenin alan formülünü yanlış hatırladığını söylemiş ve doğru alan formülünü trigonometri bilgisi ile ispatlamıştır. Sadeleştirme işlemi yapmamasına ise "Böyle bıraksam olur diye düşünmüştüm." şeklinde cevap vermiş, görüşme sırasında sadeleştirme yapabildiği gözlenmiştir.

Ö₇: "Nereden geldiğini bilmiyorum (yazdığı yükseklik ifadesi için), aklımda öyle kalmış, yazdıklarımın bir ispat olup olmadığını da bilmiyorum."

Öğrencilerin Altıncı Geometri İspat Sorusunda İspat Süreçleri

Tablo 3' ten de görüldüğü gibi öğrencilerin %57.1' i dördüncü soruyu doğru bir şekilde ispatlayabilmiş, %28.6' s kısmen doğru ispatlayabilmiş ve %14.3' ü ise yanıt vermemiştir. Altıncı soruda öğrencilerin gerçekleştirdikleri ispat süreçleri aşağıdadır:

Ö₄, Ö₆: Soruda ispatlanması istenen alan formülü $A = s \cdot (s - b)$ de $s = \frac{b + c + d}{2}$ ifadesini yerine yazmış ve hesaplamaları sonucunda $A = \frac{c \cdot d}{2}$ elde etmiştir. Yani verilen alan formülünün aslında üçgenin taban ve yüksekliğinin çarpımının yarısı olduğunu göstermiş ve ispatı tamamlamışlardır.

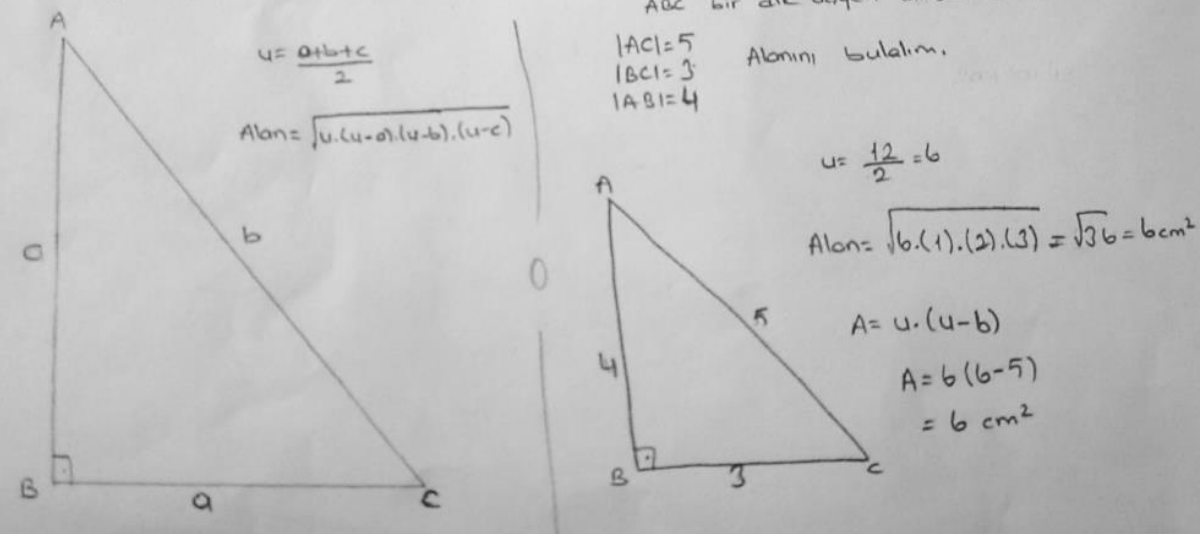
Ö₁, Ö₂: Öğrenciler dik üçgenin kenar uzunluklarına 3, 4 ve 5 ile 6, 8 ve 10 değerlerini vermişlerdir.

$u = \frac{b + c + d}{2}$ olmak üzere $A = \sqrt{u \cdot (u - b) \cdot (u - c) \cdot (u - d)}$ formülü ile alan hesabı yapıp üçgenlerin alanını hesaplamışlar ve $s = \frac{b + c + d}{2}$ olmak üzere $A = s \cdot (s - b)$ formülü ile alan hesabı yapıp, sonuçların aynı çıktığını gösterip $A = s \cdot (s - b)$ formülü ile de üçgenin alanının hesaplanabileceğini değer vererek ispatlamışlardır.

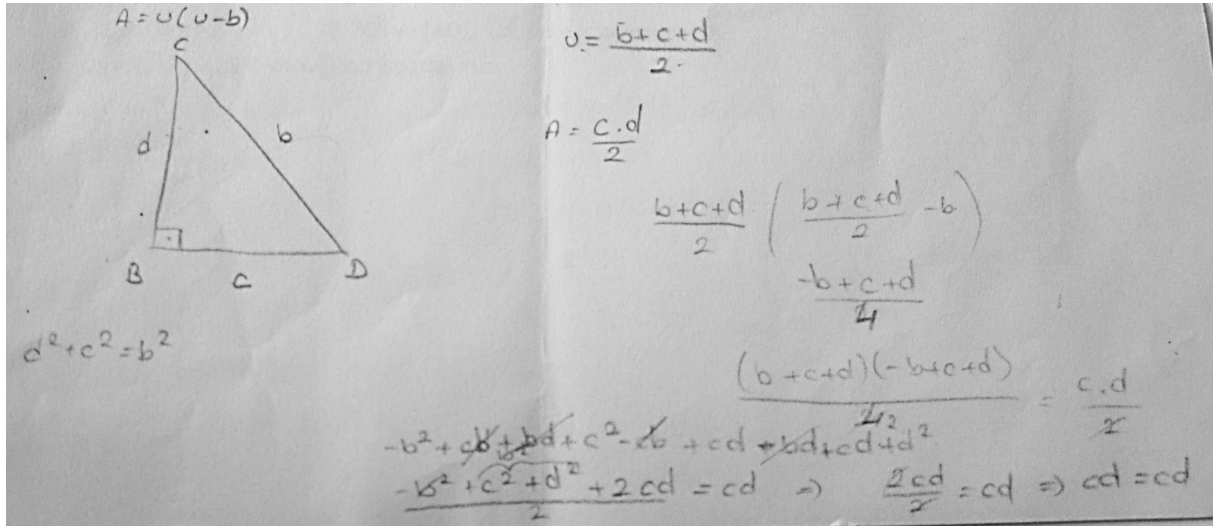
Ö₃, Ö₅: Öğrenciler dik üçgenin kenar uzunluklarına 3, 4 ve 5 değerlerini vermişlerdir. $u = \frac{b + c + d}{2}$ olmak üzere $A = \sqrt{u \cdot (u - b) \cdot (u - c) \cdot (u - d)}$ formülü ile alan hesabı yapıp üçgenin alanını hesaplamışlar, ancak bunun dışında işlem yapmayıp, $A = s \cdot (s - b)$ formülünün alan hesabında kullanılabileceğini ispatlamamışlardır.

Ö₇: Yanıt vermemiştir.

6. Bir CBD dik üçgeninde $s(\hat{B}) = 90^\circ$ dir. $2s = b + c + d$ olmak üzere bu dik üçgenin alanını $A = s(s - b)$ ile bulunabileceğini ispatlayınız.



Şekil 9: Altıncı soruya ait bir cevap örneği (Ö₂ öğrencisine aittir)



Şekil10: Altıncı soruya ait bir cevap örneği (Ö₄ öğrencisine aittir)

İki öğrencinin istenen ispatı gerçekleştirdiği, iki öğrencinin ise bildikleri bir dik üçgen kenar uzunlukları ve bir alan formülünden yararlanarak iki alan değerinin eşit olmasıyla ispat yaptıkları görülmüştür. Öğrencilerin genel

olarak $u = \frac{b+c+d}{2}$ olmak üzere $A = \sqrt{u \cdot (u-b) \cdot (u-c) \cdot (u-d)}$ alan formülünden yararlandığı görülmüştür.

Öğrencilerin Yedinci Geometri İspat Sorusunda İspat Süreçleri

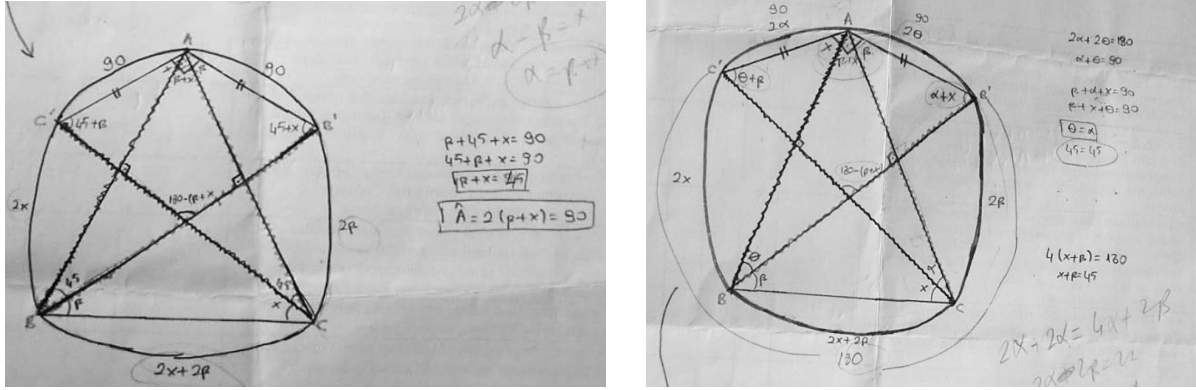
Tablo 3' ten de görüldüğü gibi öğrencilerin %14.3'ü kısmen doğru ispatlayabilmiş ve %85.7' si ise yanıt vermemiştir. Yedinci soruda öğrencilerin gerçekleştirdikleri ispat süreçleri aşağıdadır:

Ö₆: Soruda ifade edilenleri şekil üzerinde gösterebilmiş, $[AB']$ 'nin, $[AC']$ 'na dik olduğunu kabul etmiş ve A, B, C, C', B' noktalarından geçebilen bir çember çizmiştir. Üçgende açıları cebirsel olarak yazmış ve çemberin yay uzunluklarını bu açı ölçülerinden yararlanarak yazmıştır. Çemberde yay ölçüleri ile yaptığı hesaplamalar sonucu bu üçgenin tepe açısı 45° olan bir ikizkenar üçgen olduğunu bulmuştur. Çember yay uzunlukları ile yaptığı hesaplamalar sonucunda $|AB'| = |AC'|$ olduğunu görmüştür. Öğrenci sadece bir üçgen için istenenin ispatını yapmıştır. Her zaman beş noktadan bir çember geçmesi mümkün değildir.

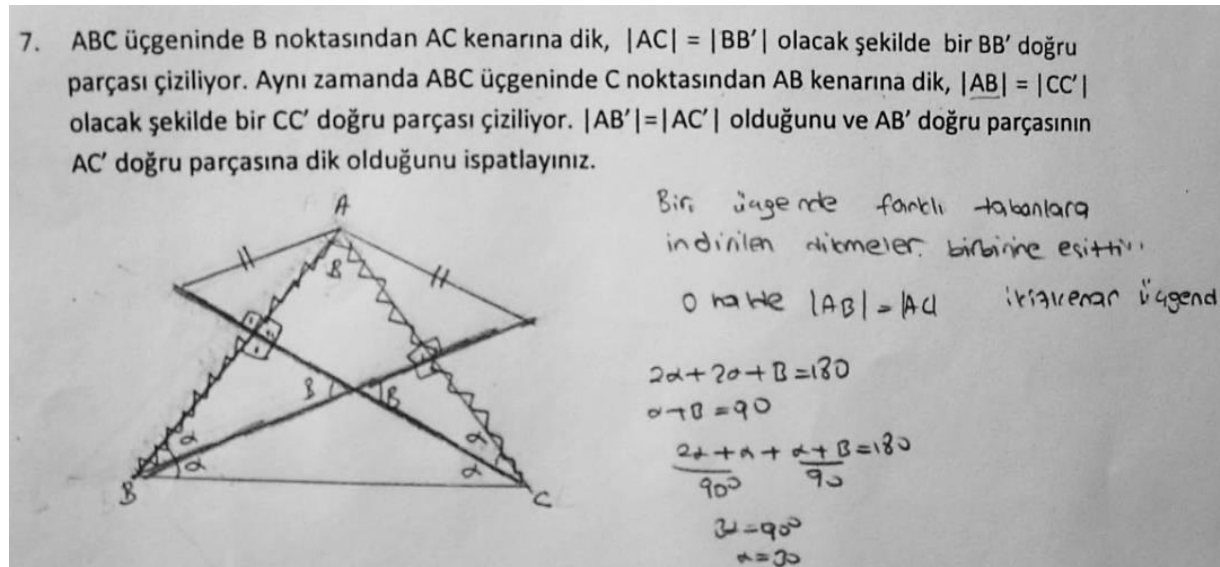
Ö₁: Soruda ifade edilenleri şekil üzerinde göstermiş, kenarlara inen dikmelerin aynı zamanda açıortayda olacağını söyleyip, üçgenin bir eşkenar üçgen olacağını söylemiş, ispat yapmamıştır.

Ö₂, Ö₅: Sadece soruda ifade edilenleri şekil üzerinde göstermişlerdir.

Ö₃, Ö₄, Ö₇: Yanıt vermemişlerdir.



Şekil 11: Yedinci soruya ait bir cevap örneği (Ö₆ öğrencisine aittir)



Şekil 12: Yedinci soruya ait bir cevap örneği (Ö₁ öğrencisine aittir)

Öğrencilerin çoğunlukla sorunun görselini çizibildikleri, ancak nereden ispata başlayacaklarını bilemedikleri gözlenmiştir. Bir öğrenci çember yaylarının ölçüsü yardımı ile ispatı yapmaya çalışmış ancak hata yapmıştır.

Ö₆: Bu beş noktadan bir çemberin geçebileceği durumu ele aldım. Çemberde bir açının gördüğü yay ölçüsü ile arasındaki ilişkiyi kullanarak açıları hesapladım ve AB' doğru parçasının AC' doğru parçasına dik olduğunu ve |AB'| = |AC'| ispatladım.

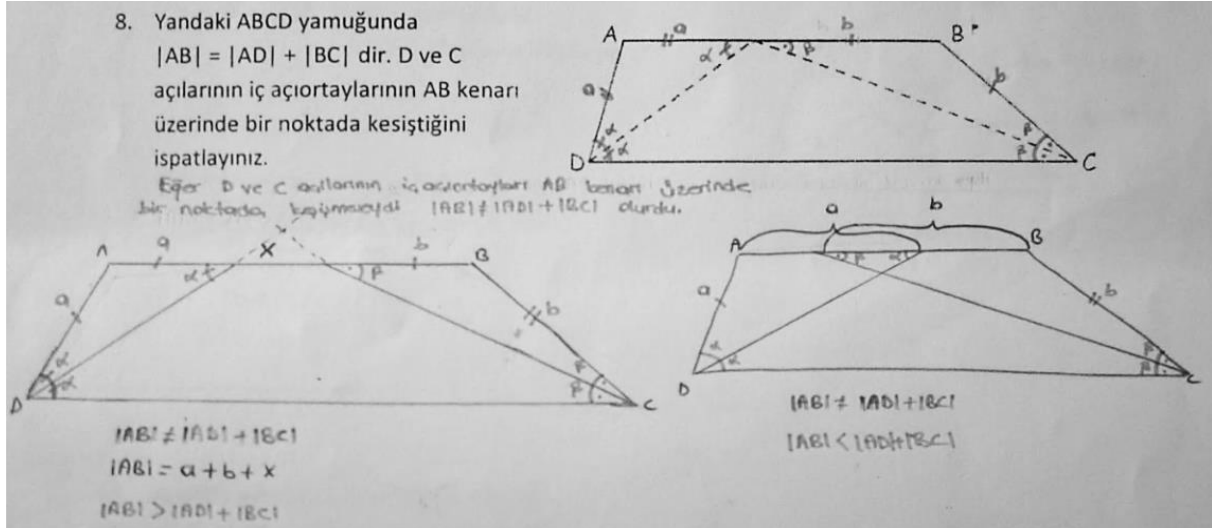
Öğrencilerin Sekizinci Geometri İspat Sorusunda İspat Süreçleri

Tablo 3'ten de görüldüğü gibi öğrencilerin %57.1' i sekizinci soruyu doğru bir şekilde ispatlayabilmiş ve %42.9' u ise yanıt vermemiştir. Sekizinci soruda öğrencilerin gerçekleştirdikleri ispat süreçleri aşağıdadır:

Ö₁, Ö₂, Ö₄ ve Ö₆: Yamukta paralel olan alt taban ve üst taban arasında iç açıortayların oluşturduğu içters açılardan eşit olmasından dolayı ikizkenar üçgenler tespit etmişler, |AB| = |AD| + |BC| olduğundan iç açıortayların AB kenarı üzerinde bir noktada kesiştiğini ispatlamışlardır. Ö₂ ve Ö₄ öğrencileri, |AB| > |AD| + |BC| olduğunda iç

açıortayların kesim noktasının yamuğun dış bölgesinde, $|AB| < |AD| + |BC|$ olduğunda iç açıortayların kesim noktasının yamuğun iç bölgesinde olacağını da ifade etmişlerdir.

Ö₃, Ö₅, Ö₇: Yanıt vermemişlerdir.



Şekil 13: Sekizinci soruya ait bir cevap örneği (Ö₂ öğrencisine aittir)

Öğrencilerden dördünün doğru ispat yaptıkları, üçünün ise ispata başlayamadıkları görülmüştür. İspat yapamayan öğrencilerin ispata başlamada ve sürdürmede hangi bilgileri kullanacaklarını bilmedikleri görülmüştür.

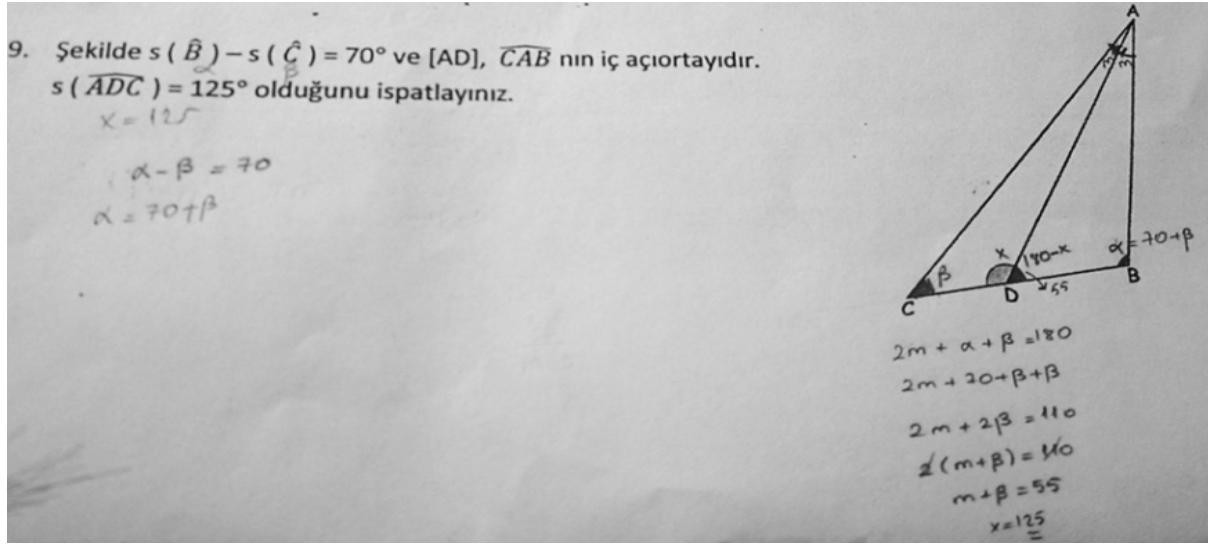
Öğrencilerin Dokuzuncu Geometri İspat Sorusunda İspat Süreçleri

Tablo 3' ten de görüldüğü gibi öğrencilerin %57.1' i dokuzuncu soruyu doğru bir şekilde ispatlayabilmiş, %14.3' ü kısmen doğru ispatlayabilmiş ve %28.6' sı ise yanıt vermemiştir. Dokuzuncu soruda öğrencilerin gerçekleştirdikleri ispat süreçleri aşağıdadır:

Ö₁, Ö₂, Ö₅ ve Ö₆: İki üçgenin iç açı ölçülerini verilenler doğrultusunda birbiri ile ilişkili olarak yazarak, üçgenin iç açılarının ölçüsü toplamından $s(\widehat{ADC}) = 125^\circ$ olduğunu ispatlamışlardır.

Ö₄: Soruda ispatlanması istenen $s(\widehat{ADC}) = 125^\circ$ olacağı bilgisini doğru kabul etmiş, iki üçgenin iç açı ölçülerini birbiri ile ilişkili olarak yazarak, üçgenin iç açılarının ölçüsü toplamı bilgisi ile $s(\widehat{B}) - s(\widehat{C}) = 70^\circ$ olduğunu ispatlamıştır. Öğrenci istenen bilgidен yola çıkarak verilen bilginin doğru olduğunu ispatlamıştır.

Ö₃, Ö₇: Yanıt vermemişlerdir.



Şekil 14: Dokuzuncu soruya ait bir cevap örneği (Ö₅ öğrencisine aittir)

Bu ispat sorusunda da, yanıt veremeyen öğrencilerin nereden başlayacaklarını bilmedikleri, yaptıkları çözümleri sildikleri, silinen çözümlerden ise farklı üçgenlerin iç açılarını birbiri cinsinden ifade etmekte ve aralarında ilişkiler kurmakta yetersiz oldukları görülmüştür.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Öğrencilerin dokuz ispat sorusuna verdiği yanıtlar incelendiğinde, ispat yapma yeterliklerinin beklenenden az olduğu görülmüştür. Öğrencilerin verdiği yanıtların yarısından daha azı doğru iken, kısmen doğru yaptıkları ispatlara ilişkin yapılan görüşmelerde de öğrenciler ispatları tamamlayamamışlardır. Yapılan görüşmelerde öğrencilerin yazdıklarının nedeni sorulduğunda, yazdıklarının doğruluğundan emin olmaktan ve açıklama yapmaktan ziyade yazdıklarının doğruluğundan endişe duydukları görülmüştür.

Coşkun (2009)' un çalışmasına paralel olarak bulgular bazı ispat sorularında doğru ispat yapabilen öğrencilerin olmadığını veya çok az sayıda olduğunu göstermiştir. Öğrencilerin ispata nereden başlayacağını bilemedikleri sıklıkla gözlenmiştir. Weber (2001) de öğrencilerin ispat için gerekli bilgilerinde eksiklikler olduğunu ifade etmiştir. Öğrenciler bazı sorularda üniversiteye geçiş sınavlarında kendilerine kolaylık sağlayacaklarını düşünüp ezberledikleri formülleri kullanmışlar; ancak yapılan görüşmelerde öğrencilerin çoğunluğu bu formüllerin nereden geldiğini bilemediklerini söylemişlerdir. Öğrencinin formülü yanlış hatırladığı durumla da karşılaşmıştır ki, bu durumda öğrenci ne ispatı tamamlayabilmiş ne de herhangi bir sonuç elde edebilmiştir. Bu durum ezberin kalıcı ve mantıklı öğrenmeyi sağlamadığını da göstermektedir (Güler ve Dikici, 2011). Çalışma grubunun fen grubu öğrencileri olmasından dolayı bu durum şaşırtıcıdır. Araştırma sonuçları öğrencilerin benzer ispat yöntemlerini kullandıklarını göstermiştir (Özer ve Arıkan, 2002; Köğçe, 2012; Zaimoğlu, 2012). Öğrencilerin bilinmeyenlere değer verme yoluna gittikleri de gözlenmiştir. Böylece istenenin doğruluğunu tek bir örnekle göstermiş ve genelleme yapma yoluna gitmemişlerdir. Arslan ve Yıldız (2010) da çalışmalarında ortaöğretimde varsayımda bulunma ve ispatlama gibi matematiksel düşünme becerilerine fazla yer verilmediğinden bu sonuçların hiç de şaşırtıcı olmadığını ifade etmişlerdir.

Matematik öğretmenlerinin, öğretmen adaylarının, ortaöğretim, ortaokul ve ilkököl öğrencilerinin ispat düzeyleri ve matematik öğretmenlerinin öğrencilerine matematiksel ispatı öğretme yolları üzerine sınırlı sayıda araştırma olduğu ifade edilmektedir (Jones, 2000; Güler ve Dikici, 2012). Bu yüzden ilköğretim, ortaöğretim ve üniversite düzeyinde öğrencilerin matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini, matematiksel ispat süreçlerini, ispat yapma sürecinde kullandıkları yöntemleri belirlemeye yönelik çalışmalar yapılmalıdır. Okullara giriş sınavlarının öğrencilerin akıl yürütme ve ispat yapma becerilerine etkileri araştırılmalıdır. Bir öğrencinin ispat yapma sürecinde değişkenlerin etkisini ortaya çıkaracak araştırmalar da bu alana katkı sağlayacaktır.

Not: Bu çalışma 25-27 Nisan 2013 tarihlerinde Antalya’da 28 Ülkenin katılımıyla düzenlenen “ International Conference on New Trends in Education – ICONTE – 2013 ”da sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

KAYNAKÇA

Arslan, S., Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim, 35* (156), 17-31.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates’ interaction with proof: some implications form mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(6), 869–890.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(4); 479-488.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. 2005. Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi, 1*(6), 25-37 .

Coşkun, F. (2009). *Ortaöğretim öğrencilerinin van hiele geometri anlama seviyeleri ile ispat yazma becerilerinin ilişkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çıray, S. (2012). *Case-Study: Örnek olay (durum) çalışması*.
<http://edtechsdu.wikispaces.com/file/detail/case+study.pptx> adresinden alınmıştır.

Doruk, B.K., Kıymaz, Y., & Horzum, T. (2012). *İspat yapma ve ispatta somut modelden yararlanma üzerine sınıf öğretmeni adaylarının görüşleri*. X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi’ nde Sunulmuş Bildiri. Niğde Üniversitesi, Niğde.

Furinghetti, F., & Morselli, M. (2011). Beliefs and beyond: hows and whys in the teaching of proof. *ZDM Mathematics Education, 43*, 587-599.

Golzy, J. (2008). *A cultural study of classroom discourse and its impact on students’ initiation of geometry proofs*. Doctora Thesis, Faculty of the Graduate School of The State University of New York at Buffalo.

Güler, G., Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 20*(2), 571-590.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 20-25.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5-23.

İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

İskenderoğlu, T., Baki, A. (2011). Quantitative analysis of pre-service elementary mathematics teachers’ opinions about doing mathematical proof. *Educational Sciences: Theory & Practice, 11*(4), 2285-2290.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 53-60.

Jones, K., & Rodd, M. (2001). *Geometry and proof*. A report based on the meeting at Manchester Metropolitan University, 3rd March 2001; 95-100. http://eprints.soton.ac.uk/14691/1/Jones_Rodd_BSRLM_21-1_2001.pdf adresinden alınmıştır.

Köğçe, D. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri. *X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi' nde sunulmuş bildiri*. Niğde Üniversitesi, Niğde.

Marrades, R., & Gutierrez, A. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125. http://itumweb.ume.maine.edu/center/Math/Geometer/ProofsProducedBySecondaryStudents_Marrades_Gutierrez.pdf adresinden alınmıştır.

MEB. (2011). *Ortaöğretim matematik (9, 10, 11 ve 12. sınıflar-haftalık 4 saat) dersi öğretim programı & Ortaöğretim matematik (10, 11 ve 12. sınıflar-haftalık 2 saat) dersi öğretim programı*. MEB, Ankara.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-9988.

Özer, Ö. & Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri.

V.Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 16-18 Eylül Ankara, Bildiriler Kitabı, II, 1083-1089.

Rotman, J. (1998). *Journey into mathematics: An introduction to proofs*. Prentice Hall.

Sarı, M., Altun, A., Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: Örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40 (2), 295-319.

Soylu, Y., & Soylu, C. (2006). Matematik derslerinde başarıya giden yolda problem çözmenin rolü. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 7 (11), 97-111.

Türnüklü, A. (2000). Eğitimbilim araştırmalarında etkin olarak kullanılabilir nitel bir araştırma tekniği: Görüşme. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Yönetimi Dergisi*, 24, 543-559.

Uğurel, I., Morali, S. (2011). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 135-154.

Üzel, D., Özdemir, E. (2009). Elementary mathematics teacher candidates' attitudes towards proof and proving. *e-Journal of New World Sciences Academy*, 4 (4), 1226-1236.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101-119. <http://link.springer.com/article/10.1023%2FA%3A1015535614355> adresinden alınmıştır.

Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6,7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgi oluşturma süreçlerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış Doktora Tezi Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayınları.

Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*. Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.