GÜVENİLİR OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN ARALIK ÇİZELGELEMESİ PROBLEMİ

Deniz TÜRSEL ELİİYİ*, **Selma GÜRLER****

ÖZET

Bu çalışmada, her biri zaman-bağımlı arızalara tabi m adet özdeş paralel makineden oluşan bir sistem için aralık çizelgelemesi problemi ele alınmıştır. Sistemde yapılması gereken her işin sisteme giriş zamanları ve son teslim tarihleri önceden bilinmektedir. Bir iş eğer sisteme girdiği anda yapılmaya başlanmaz ise kaybedilmiş sayılmaktadır. Çalışmada iki değişik tip makine sistemi ele alınmıştır. Birinci sistemde m-taneden-k-tane yapısı, ikinci sistemde ise paralel bir yapı vardır. Problemde amaçlanan, yapılan işlerin getireceği toplam karı maksimize etmektir. İki durumda da problemler tanımlanmış ve muhtemel kullanım alanları belirtilmiştir. Her iki problem için optimal çözümleri üretecek matematiksel modeller geliştirilmiştir. Çözüm önerileri ve gelecek için çalışma alanları belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Aralık Çizelgelemesi, Güvenilirlik, m-Taneden-k-Tane Yapısı, Paralel Yapı

INTERVAL SCHEDULING PROBLEM FOR UNRELIABLE SYSTEMS

ABSTRACT

In this study, we consider interval scheduling in a system of *m* identical parallel servers subject to time-dependent failures. Each task has a fixed ready time and deadline. A task, which does not start processing at its ready time, is lost. We consider two different system structures: A *k*-out-of-*m* structure, and a parallel structure. The aim is to maximize the total weight of the processed jobs. We define the problem, and develop mathematical models to solve the problem optimally in both structures. We identify some reductions of the models, and propose possible solution procedures based on these reductions.

Keywords: Interval Scheduling, Reliability, k-out-of-m Structure, Parallel Structure

* *İzmir Ekonomi Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, İzmir*

** *Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, İzmir*

1. GİRİŞ

Aralık Çizelgelemesi Problemi (AÇP) çizelgeleme alanında yeni gelişmeye başlayan bir alandır. Problemde önceden belirlenmiş sisteme giriş zamanları ve son teslim tarihleri olan işler, belirli sayıda kaynak (makine) üzerinde işlem görecektir. AÇP rezervasyon sistemlerinde çokça karşılaşılan bir problemdir. Rezervasyon sistemi örnekleri hizmet sektöründe otel odası, araç tamir veya araç kiralama sistemlerinde görülebilir. Bu tip sistemlerde müşteriler işlere, oda, teknisyen veya araçlar ise makinelere karşılık gelmektedir. Rezervasyon sistemleri, üretim sektöründe işler ve makineler olarak karşımıza çıkmaktadır. Her iki ortamda da işler makinelere belirli işlem zamanlarında talepte bulunmaktadır. Problem hangi işlerin işlenmek üzere seçileceği veya tüm işleri işleyebilmek için gereken makine sayısı gibi çeşitli kararların alınmasını gerektirmektedir.

Literatürde tipik bir rezervasyon sistemi paralel bir makine yapısına işaret etmektedir. Problem şu şekilde ifade edilebilir: m adet paralel makinede işlenmesi gereken n adet iş bulunmaktadır. Herhangi bir j işinin sisteme giriş zamanı r_j ve son teslim tarihi d_j önceden bilinmektedir ve bu parametreler j işinin hangi zaman diliminde işlenmesi gerektiğini göstermektedir. Eğer bir iş sisteme girdiği anda işlenmeye başlanmalı ise AÇP, Sabit İş Çizelgelemesi Problemi (SÇP) olarak da adlandırılmaktadır. SÇP'de herhangi bir j işinin işlenme zamanı (p_j), o işin son teslim zamanı ve sisteme giriş zamanları arasındaki farka eşittir (d_j - r_j). Dolayısıyla eğer bir iş işlenmek üzere kabul edilirse, işlenmeye r_j zamanında başlayacak ve d_j zamanında işlenmesi bitirilecektir. Çalışmamızda bu yapıda bir AÇP ele alınmaktadır.

Amaç fonksiyonlarına göre AÇP operasyonel ve taktik problem olmak üzere iki ana gruba ayrılır. Operasyonel problemde her işin belirli bir ağırlığı (w_j) bulunmaktadır. Bu ağırlık o işten gelecek karı veya o işin karar vericiye göre olan önemini temsil etmektedir. Problemde amaçlanan, eldeki belirli sayıda makine ile işlenebilecek iş kümesinin toplam ağırlığını maksimize etmektir. Taktik problem daha üst seviye bir problemdir. Bu problemde amaç, sisteme giren tüm işleri işleyebilmek için gereken makine sayısını minimize etmektir. AÇP'nin en temel varsayımlarından biri her bir işin en fazla bir makinede işlenebilecek olmasıdır. Bütün makineler hız açısından özdeştir. İşlerin bölünmesine, yani bir makinede başlanan işleme diğer bir makinede devam edilmesine izin verilmemektedir. Tüm makineler tüm zamanlarda çalışmaya hazırdır.

Literatürde AÇP'nin bir çok pratik uygulamasından bahsedilmiştir. Problem üretim ve işlemler yönetimi alanında önemli bir problem olarak belirlenmiştir. Kroon (1990) tarafından yapılan bir çalışmada, bir havayolu şirketinin uçak bakım ekibinin taktik kapasite planlamasında, yani sayısının belirlenmesinde, ana modeli AÇP oluşturmuştur. Daha sonraki bir çalışmalarında Kroon vd., (1995) problemi, operasyonel bazda ele almışlardır. Bu çalışmada belirli sayıda bakım mühendisinin hizmet verebileceği uçak kümesinin öncelikleri maksimize edecek şekilde belirlenmesi söz konusudur. Eliiyi ve Azizoğlu (2006a) çeşitli zaman kısıtları altında operasyonel problemin çözümü üzerine yoğunlaşmışlardır. Problemin hizmet ve üretim alanında pek çok uygulaması mevcuttur. Problemin teorisi ve uygulama alanları hakkında detaylı bilgi Kovalyov vd.'nin (2007) yaptığı bir çalışmada verilmektedir.

Wolfe ve Sorensen (2000), problemi dünyayı gözlemleyen uyduların çizelgelenmesinde kullanmışlardır. Dünyanın yörüngesinde yeryüzündeki çeşitli iklimsel ve fiziki değişiklikleri ölçmek ve gözlemlemek üzere yüzlerce uydu yer almaktadır. Bir uydu yörüngede dolaşırken farklı zamanlarda veri toplayabileceği pozisyonları yakalamaktadır. Toplanılan görsel verinin anında yeryüzündeki çeşitli alıcı merkezlere gönderilmesi gerekmektedir. Ancak alıcı istasyonların sayısı az miktarda olduğundan bütün verilerin aynı anda alınabilmesi bazı zamanlarda mümkün olmamaktadır. Buna göre yazarlar hangi verinin alınacağına karar verilmesi problemini SÇP olarak modellemişlerdir.

Güvenilirlik bir sistem, bileşen veya ekipmanın, istendiğinde ve tesisin o anki koşullarında, istenen zaman aralığında fonksiyonunu tam olarak yerine getirme olasılığı olarak tanımlanabilir. Dolayısıyla güvenilirlik hayatta kalma veya yaşama olasılığıdır. Bozulma oranı ise t anına kadar yaşamını sürdürmüş bir bileşenin gelecek zaman diliminde bozulma olasılığını verir. Güvenilirlik testleri iki farklı şekilde yapılmaktadır. Birinci ölçüm şekli, sistemi çalışır veya çalışamaz durumda olarak iki kategori halinde gören testlerden oluşmaktadır. İkinci ölçüm şeklinde ise sayısal yöntemler kullanılmakta; bozulmaya kadar kalan zaman tahminlenmekte ve güvenilirlik ölçümü bu tahmine dayalı olarak yapılmaktadır.

Güvenilirlik tek bir sistem bileşeniyle sınırlandırılamaz. Paralel ve m-taneden-k-tane sistemleri endüstriyel ve teknik alanlarda çokça uygulaması olan özdeş olmayan bileşenlerden oluşmuş sistemlerdir. Bu sistemlerde güvenilirliği artırmak için yapısal yedekleme kavramı kullanılmaktadır. Bir m-taneden-k-tane sistemi eğer m bileşeninden k tanesi çalışıyorsa çalışır durumda olarak adlandırılmaktadır. Dolayısıyla sistem eğer m-k+1 veya daha fazla bileşeni bozulursa bozulur. Bütün bileşenlerin çalışmaya aynı anda başladığını düşünülürse bu sistemde m-k adet bileşenin aktif bir şekilde yedekte tutulduğu görülebilir. Örnek olarak üç paralel sabit diski olan bir sunucu bilgisayarı ele alınsın. Bu sunucunun düzgün çalışması için en az iki sabit diskin çalışır durumda olması gerektiği farz edilsin. Her sabit disk farklı üreticiler tarafından yapılmış olabilir ve dolayısıyla güvenilirlikleri farklı olabilir. Bu sistem *3*-taneden-2-tane sistemine bir örnek oluşturmaktadır. Paralel (k=1) ve seri sistemler (k= m) m-taneden-k-tane sistemlerinin özel durumları olarak öne çıkmaktadır. Güvenilir olmayan sistemlerle ilgili araştırmalarda iki tip bozulma ele alınmıştır. Çalışmaya bağlı bozulmalar sadece bileşen veya makine çalışırken gerçekleşebilir. Zamana bağlı bozulmalar ise makine çalışırken veya çalışmazken herhangi bir zamanda gerçekleşebilir.

Güvenilir olmayan makinelerle çizelgeleme konusu birçok araştırmacı tarafından özellikle esnek üretim sistemleri alanında çokça çalışılmış ve bilinen bir konudur. Bu çalışmalara örnek olarak Aktürk ve Görgülü (1998), Dutta (1990) ve Mehta ve

Uzsoy (1998) verilebilir. Stadje (1995) güvenilir olmayan tek bir makine üzerinde işlerin çizelgelenmesi üzerinde çalışmıştır. Bildiğimiz kadarıyla literatürde güvenilir olmayan makinelerle SÇP üzerine yapılmış herhangi bir çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışma operasyonel SÇP'yi stokastik bozulmalara tabi bir makine sisteminde ele almaktadır. Problem başlangıçta belirli sayıda makineyle başladığı için operasyoneldir. Bir makine bozulduğunda planlama periyodunun sonuna kadar çalışamaz durumda kaldığı kabul edilmektedir. Bu durum, değiştirme zaman ve maliyetinin yüksek olmasıyla açıklanabilir. Problemdeki makine sistemi bir *m*-taneden-*k*-tane sistemi olarak düşünülmüştür. Sistem *k*'nın genel hali ve k=1 olan paralel durum için ayrı şekillerde incelenmiştir.

Daha önce bahsedilen gözlem uyduları yukarıda anlatılan sistem için iyi bir örnek oluşturmaktadır. Gözlem uyduları stokastik yaşam sürelerine ve zamana bağlı bozulmaya tabidir. Gözlem uyduları yörüngedeki konum, güneşin açısı, sensör ayarları veya başka faktörlere bağlı olarak değişik yaşam dağılımlarına sahip olabilmektedir. Bir uydu bozulduğunda yerine yenisinin konulması çok uzun süreler alabilmektedir. Dolayısıyla problem operasyonel bir problem olduğundan ve sıklıkla çözüleceğinden, bu sürenin problemin planlama periyodunun dışına taştığı rahatlıkla varsayılabilir. Uydu sisteminin çalışabilmesi için *m* uydudan *k* tanesinin çalışır durumda olması gerekmektedir. Sistemdeki ortalama veri yükü kritik önemdeki verilerin kaybolmaması için böyle bir yapının varlığını gerektirebilir. Bahsedilen sistem yapısı bilgisayar sunucularında veya arama motorlarında da uygulanabilecek pratik önem arz eden bir yapıdır. Dolayısıyla modellerimiz literatürdeki bu boşluğu doldurmak üzere tasarlanmıştır.

Bir sonraki bölüm problemin tanımını ve matematiksel modellerin geliştirilmesiyle ilgili açıklamaları içermektedir. Paralel ve *m*-taneden-*k*-tane sistemleri için farklı varsayımlar yapılmış ve iki problem farklı modellenmiştir. Üçüncü bölümde her iki problem için çeşitli çözüm yöntemleri önerilmiştir. Dördüncü bölüm sonucu ve gelecek çalışma konularını sunmaktadır.

2. PROBLEM TANIMI

Bu bölümde, *m*-taneden-*k*-tane ve paralel olmak üzere iki farklı sistem yapısı altında problemin tanımı ve matematiksel modelleri sunulacaktır. Her iki model için aşağıda verilen tipik çizelgeleme varsayımları kullanılmıştır:

- Tüm makineler hız bakımından özdeştir.
- Tüm makineler sıfır zamanında başlamaya hazır durumda ve kullanılmamış (yeni) olarak sistemde bulunmaktadır.
- Bir makine aynı anda en fazla tek bir işi işleyebilir.
- Bir işe başlandıktan sonra o iş bölünmeksizin veya başka bir makineye aktarılmaksızın işlenmelidir.

- Bir işin karı ancak o iş tamamlandıktan sonra elde edilebilir, parçalı işleme izin verilmez.
- Bir iş aynı anda en fazla bir makinede işlenebilir.
- İş ile ilgili parametreler ve makine sayısı kesin olarak bilinmektedir.

Her iki model için de kullanılan temel parametreler şunlardır:
m: makine sayısı,
n: iş sayısı.

Modelde kullanılacak indisler şu şekildedir:
j : iş indisi, $j=1,...,n$.
s: makine indisi $s=1,...,m$.

İşler ile ilgili parametreler aşağıda verilmiştir:
r_j: j işinin başlama zamanı, $j=1,\ldots,n$.
d_j: j işinin bitiş zamanı, $j=1,\ldots,n$.
p_j: j işinin işlem zamanı, $p_j = d_j - r_j$, $j=1,\ldots,n$.
w_j: j işinin ağırlığı, $j=1,\ldots,n$.

Genel olarak tüm nümerik verilerin pozitif tamsayı olduğu kabul edilmektedir. Zaman ekseni eşit olmak zorunda olmayan periyotlara bölünmüştür. Bunun için, tüm başlama ve bitiş zamanlarının bir tarihsel sırası kurgulanır. Daha açık bir ifade ile, $\{t_1, t_2,...\}$, r_j'ler ve d_j'lerin tarihsel sırada eş olanlar atılarak elde edilen sıralanmış dizisi olsun. P_i ise, i=1, 2,... için $[t_i, t_{i+1})$ zaman aralığında işlemden geçirilecek olan işlerin kümesi olsun.

Makineler ile ilgili parametre aşağıda tanımlanmaktadır:

Y_s: s makinesinin yaşam zamanı. $s=1,\ldots,m$.

Y_s, s makinesinin yaşam zamanını gösteren rassal değişkendir. Öyleyse, Y_s negatif olmayan sürekli bir rassal değişkendir. $F(y_s)$, Y_s rassal değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Buna göre herhangi bir s makinesinin güvenilirlik ve olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$R_s(t) = 1 - F(y_s) = P(Y_s \geq t)$$

$$f(y_s) = F'(y_s)$$

Her iki modelde de herhangi bir makinenin yaşam zamanının Y_s, $s=1,\ldots,m$, (α_s, λ_s) parametreleri ile Weibull dağılan rassal değişken olduğu varsayılmıştır. Weibull dağılımı üssel dağılımın genel halidir. Üssel dağılımın tersine bozulma fonksiyonu sabit değildir ve daha yaygın uygulama alanlarında karşımıza çıkmaktadır. İki parametreli Weibull dağılımı, güvenilirlikte en çok kullanılan zamana bağımlı olasılık dağılımıdır. Hem azalan hem de artan bozulma fonksiyonunu modellemede kullanılabilir. Bu dağılımda α parametresi dağılımın şeklini, λ parametresi ise dağılımın ölçeğini belirler. Dağılım, α<1 ise azalan bozulma fonksiyonuna, α>1 ise artan bozulma fonksiyonuna sahiptir. α=1 olduğu durumda üssel dağılan fonksiyonun bozulma fonksiyonu zamandan bağımsız ve sabittir (Barlow ve Proschan, 1975). Weibull dağılımına göre s makinesinin yaşam zamanına ait dağılım fonksiyonu şu şekilde oluşmaktadır:

$$F(y_s) = 1 - e^{-(\lambda_s y_s)^{\alpha_s}}, \quad y_s \geq 0, \ (\alpha_s, \lambda_s) > 0.$$

Dikkat etmek gerekirse, makinelerin yaşam zamanları aynı dağılıma sahip olmadığı düşünülerek genel durum ele alınmıştır. Yani Weibull dağılımının parametreleri makineden makineye değişebilir. Yukarıda verilen kurgulamanın özel bir hali olarak aynı dağılmaları durumunda $(\alpha_s, \lambda_s) = (\alpha, \lambda)$, $\forall s$, olacaktır.

Yukarıdaki tanımlamalara göre, belirli bir t_i zamanında bir s makinesinin güvenilirlik fonksiyonu makinenin yaşam zamanının t_i zamanına eşit ya da büyük olma olasılığıdır. Yani;

$$R_s(t_i) = P(Y_s \geq t_i) = e^{-(\lambda_s t_i)^{\alpha_s}} \text{'dir.}$$

Yukarıdaki tanımların ışığında bir sonraki bölümde problemin m-taneden-k-tane bir sistem için tanımı yer almaktadır.

2.1. m-taneden-k-tane Sistemi Modeli

Bu bölümde, sistemin yaşıyor olması için m tane makineden en az k tane makinenin yaşıyor olması koşulu altında işlerin çizelgelemesi için kurulan matematiksel model sunulacaktır. Bu amaçla, yukarıdaki tanımlamalara ek olarak iki tane gösterge değişkene ihtiyaç vardır.

ψ_{si}: s makinesi için ikili gösterge değişkeni, $s=1,\ldots,m$.
ϕ_i : m-taneden-k-tane sisteminin t_i zamanındaki yapı fonksiyonu.

Makine s için t_i zamanındaki durumu belirlemek amacıyla ψ_{si} ikili gösterge değişkeni kullanılmıştır:

$$\psi_{si} = \begin{cases} 1, & \text{eğer makine } s \text{ çalışıyorsa,} \\ 0, & \text{eğer makine } s \text{ çalışmaz durumdaysa.} \end{cases} \qquad \forall s, i.$$

Bu noktada ek varsayımlara gerek duyularak m-taneden-k-tane sisteminde herhangi bir makinenin güvenilirliği için alt limit tanımlanmıştır. Bu sınır değer karar verici tarafından belirlenen makine güvenilirliği için en düşük kabul edilebilir değeri tanımlamaktadır. Diğer bir deyişle, t_i zamanında makinenin güvenilirliği sınır değerin altında kaldığında makinenin bozulduğu ve $[t_i, t_{i+1})$ aralığı ve sonrasında herhangi bir işi tamamlayamayacağı varsayılır. Bu varsayım güvenilirliğin basitçe matematiksel modelde yer almasını kolaylaştırır. Ancak sistemi bu şekilde modellemenin, bir makinenin gerçekten bozuluncaya kadar bozuk olarak sayılamayacağı gerçek bir sistem için yaklaşık bir sonuç vereceği göz önüne alınmalıdır. Daha küçük bir alt limit daha iyi bir yaklaşım anlamına gelmektedir. Bu açıklamayla beraber ikili gösterge değişkeni ψ_{si} aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\psi_{si} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } P(Y_s \geq t_i) \geq L, \\ 0, & \text{eğer } P(Y_s \geq t_i) < L. \end{cases} \qquad \forall s, i.$$

m-taneden-k-tane sisteminin yapı fonksiyonu ϕ , sistemin durumunu göstermektedir. Daha açık bir ifadeyle,

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{eğer sistem çalışıyorsa,} \\ 0, & \text{eğer sistem çalışamaz durumdaysa.} \end{cases}$$

Sistemde kesikli zaman noktalarında gözlem yapıldığından, yapı fonksiyonu t_i'nin bir fonksiyonu olarak tanımlanır. Sistem m makineden en az k tanesinin yaşıyor olması koşulu altında çalışır. Diğer durumlarda sistemin bozuk olduğu varsayılır. Bu sebeple, t_i zamanında m-taneden-k-tane sisteminin yapı fonksiyonu ϕ_i aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\phi_i = \begin{cases} 1, & \text{eğer } \sum_s \psi_{si} \geq k, \\ 0, & \text{eğer } \sum_s \psi_{si} < k. \end{cases}$$

Açıkça görülmektedir ki, t_i zamanında sistem bozulduysa t_{i+1}, t_{i+2}, … zamanları için de sistem aynı şekilde kalacaktır.

Tanımlanan ikili karar değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$x_{js} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } j \text{ işi } s \text{ makinesinde işleniyorsa,} \\ 0, & \text{diğer türlü.} \end{cases} \qquad \forall j, s.$$

Probleme ait kısıtlar:

- Her bir iş j en fazla bir makinede işlenir:

$$\sum_{s=1}^{m} x_{js} \le 1 \qquad j = 1,\dots,n \,. \tag{1}$$

- Bir makine aynı anda birden fazla iş işleyemez. Yapı fonksiyonunun değeri de bu kısıt içinde düşünülmüştür:

$$\sum_{j\in P_i} \left(x_{js}\psi_{si}\phi_i \right) \le 1 \qquad s = 1,\dots,m \;\forall i \,. \tag{2}$$

- İşler bir makineden başka makineye aktarılamaz veya bir işin işlem süresi bölünemez:

$$x_{js} \in \{0,1\} \qquad s = 1,\dots,m \qquad j = 1,\dots,n \,. \tag{3}$$

(1), (2) ve (3) numaralı kısıtlara bağlı olarak tanımlanan problem için elde edilen tamamlanmış model aşağıdaki gibidir:

$$\text{Enb. } \sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_j x_{js} \tag{4}$$

Kısıtlar; (1), (2) ve (3).

(4) numaralı amaç fonksiyonu tamamlanan işlerin toplam ağırlığını en büyüklemektedir. Diğer bir deyişle amaç fonksiyonu, toplam karı maksimize etmektedir. Bunu gerçekleştirirken model, her bir makinenin ve bir bütün olarak sistemin güvenilirliğini dikkate almaktadır. Ağırlıklar tüm işler için aynı olduğunda, $w_j = w$, $\forall j$, problem tamamlanan işlerin sayısını en büyükleme problemine indirgenmiş olur.

2.2 Paralel Sistem Modeli

Bu bölümde, makinelerin paralel sistemi üzerinde işlerin çizelgelemesi üzerine kurulan matematiksel model elde edilmiştir.

Bir paralel sistem daha önce de belirtildiği gibi m-taneden-k-tane sisteminin k=1 için özel halidir. Sistemin işlevini gerçekleştirebilmesi için en az bir bileşenin çalışıyor olması gerekir.

Paralel sistem için oluşturulmak istenilen model beklenen kar fonksiyonu üzerine kurgulanmıştır. Bir s makinesi j işini ancak r_j zamanında çalışıyor ise işleyebilir. Bununla birlikte makinenin bu işi bitirebilmesi için d_j zamanında hala çalışıyor olması gereklidir. Bu noktada ele alınan problemde kısmi işlemeye izin verilmediği varsayıldığında işten elde edilecek olan kar ancak iş bitirildiğinde gerçekleşecektir. Bu varsayım altında sadece işin başlatılması değil işin bitirilmesi de önem kazanmaktadır. Bu nedenle bir işin bitirilmesi olasılık fonksiyonu hesaplanırken r_j zamanında s makinesinin güvenilirliği yerine, r_j zamanındaki (Y_s-r_j) koşullu güvenilirlik fonksiyonunun kullanılması gereklidir. Bu koşullu güvenilirlik, s makinesinin r_j zamanındaki geriye kalan yaşam zamanı olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi ifade edilir (Barlow ve Proschan, 1975).

$$R_s(d_j \mid r_j) = P(Y_s \geq d_j \mid Y_s \geq r_j)\ ,\ \ s=1,\ldots,m.$$

Yukarıda tanımlanan koşullu güvenilirlik, s makinesinin, r_j zamanında çalışıyor olma koşulu altında, d_j zamanında j işini bitirme olasılığını hesaplar.

Daha önceki bölümde de belirtilen karar değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x_{js} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } j \text{ işi } s \text{ makinesinde işleniyorsa,} \\ 0, & \text{diğer türlü.} \end{cases} \qquad \forall j, s.$$

Probleme ait kısıtlar aşağıdaki gibidir:

- Her bir iş j en fazla bir makinede işlenir:

  $$\sum_{s=1}^{m} x_{js} \leq 1 \qquad j = 1,\ldots,n$$

- Bir makine aynı anda birden fazla iş işleyemez:

  $$\sum_{j \in P_i} x_{js} \leq 1\, s = 1,\ldots,m \qquad \forall i \qquad (5)$$

- İşler bir makineden başka makineye aktarılamaz veya bir işin işlem süresi bölünemez:

  $$x_{js} \in \{0,1\} \qquad s = 1,\ldots,m \qquad j = 1,\ldots,n$$

Probleme ilişkin tamamlanmış model (1), (3) ve (5) koşulları altında aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\text{Enb. } \sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(R_s(d_j \mid r_j)w_j x_{js}\right) \qquad (6)$$

Kısıtlar; (1), (3) ve (5).

(6) numaralı amaç fonksiyonu işlerin beklenen toplam ağırlıklarını; başka deyişle beklenen toplam karını maksimize etmektedir. Bunu yaparken model, yukarıda tanımlandığı gibi, her makinenin işe başlama zamanında çalışıyor olması koşulu altında güvenilirliğini dikkate almaktadır.

3. ÇÖZÜM YAKLAŞIMLARI

Bu bölümde, önceki bölümlerde tanımlanan problemlere bazı çözüm yaklaşımları sunulmuştur.

Bölüm 2.2'de paralel makinelerden oluşan yapı için elde edilen amaç fonksiyonu, işlerin toplam beklenen ağırlıklarını en büyüklemektedir. Geliştirilen bu modelde amaç fonksiyonuna koşullu güvenilirlik değerlerinin ilave edilmesi, x_{js} değişkenlerinin amaç fonksiyonu katsayılarının sadece işlere bağımlı olmasını değil aynı zamanda işlendiği makinelere bağlı olmasını gerektirir. Tüm j ve s için r_j zamanındaki s makinesinin geriye kalan yaşam zamanı $R_s(d_j | r_j)$ hesaplandıktan sonra, j=1,…,n, ve s=1,…,m için $w_{js} = R_s(d_j | r_j) w_j$ olmak üzere, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\text{Enb} \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} w_{js} x_{js} \,. \tag{7}$$

Bundan dolayı problemin makinelere bağımlı ağırlıklar içeren Operasyonel Aralık Çizelgelemesi problemine indirgendiği görülmektedir. Bu problem Eliiyi ve Azizoğlu (2006b) tarafından çalışılmıştır ve rasgele ağırlıkların varlığında problemin NP-zor olduğu yazarlar tarafından ispat edilmiştir. Yazarlar problem için 100 işe kadar kullanılabilecek bir Dal ve Sınır algoritması geliştirmişlerdir. Bu çalışmada önerilen algoritma güvenilir olmayan paralel yapıdaki makinelerin aralıklı çizelgeleme problemini çözmek için de kullanılabilir.

İkili gösterge değişkenli modelde ise m-taneden-k-tane sisteminde problemin zamana bağımlı bozulma yapısı, tüm makinelerin sıfır zamanında çalışmaya başladığı ve bozulma zamanlarının hesaplanabildiği düşünüldüğünde, makine erişilebilirlik kısıtları olan bir Operasyonel Aralık Çizelgelemesi problemine indirgenmektedir. Erişilebilirlik kısıtı genellikle her makine veya makine setleri için ardışık vardiya saatlerinin modellenmesinde ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla bir makinenin bozuluncaya kadar geçireceği sürenin o makinenin vardiyası veya erişilebilirlik süresi olarak modellenmesi mümkün olmaktadır. Problemde makinelerin farklı güvenilirliğe sahip olması sebebiyle indirgenmiş problem makineler için farklı erişilebilirlik değerleri gösterecektir. Erişilebilirlik kısıtları altında Operasyonel Aralık Çizelgelemesi problemi Kolen, Lenstra ve Papadimitriu (1986) tarafından çalışılmış ve problemin NP-zor olduğu gösterilmiştir. Kolen ve Kroon (1993) problem üzerine çalışan diğer yazarlardır ve problemi modellemişler ve çözüm algoritmaları geliştirmişlerdir. Bu nedenle makinelerin *m*-taneden-*k*-tane yapısı ile ilgili problem NP-zor bir problemdir ve problemin optimal çözümü için Dal ve Sınır algoritması gibi enümerasyona dayalı yöntemler kullanılmalıdır.

4. SONUÇ VE GELECEK ÇALIŞMA KONULARI

Bu çalışmada zamana bağlı bozulma gösteren özdeş olmayan *m* adet paralel makineden oluşan bir sistemde Sabit İş Çizelgeleme Problemi (SÇP) ele alınmıştır. Problemde her işin başlangıç ve bitiş zamanları önceden belirlidir. Başlangıç zamanında işleme alınmayan bir iş işlenemeyip sistem için kayıp olarak nitelendirilmektedir. Problemdeki makine sistemi bir *m*-taneden-*k*-tane sistemi olarak düşünülmüştür. Sistem *k*'nın genel hali ve k=1 olan paralel durum için ayrı şekillerde incelenmiştir. Amaç fonksiyonu işlenen işlerin toplam ağırlığını (kar veya göreli önemini) maksimize etmeyi amaçlar.

Çalışmada problem matematiksel olarak tanımlanmış, iki ayrı durum için farklı kabullerden yola çıkılarak matematiksel programlama modelleri geliştirilmiştir. Her iki durum için çeşitli çözüm yöntemi önerileri getirilmiştir. Bu çalışma, problemin pratik değeri ve bu alandaki ilk çalışma olması sebebiyle önemlidir. Çalışmada önerilen çözüm yöntemleri problemin uygulama alanı olabilecek her durumda kullanılabilir.

Çalışmada sunulan çözüm önerilerinin ortaya çıkaracağı sonuçların hem kalite, hem de çözüm zamanları açısından incelenebilmesi için deneysel bir çalışma tasarlanabilir. Bu çalışma çözüm yöntemlerinin optimal sonuçları ne kadar zamanda bulduğunu ve çeşitli problem büyüklükleri için nasıl performans gösterdiklerinin anlaşılmasında kullanılabilir. Deneysel çalışmada makine yaşam sürelerinin Gamma veya normal dağılım gibi değişik dağılımlardan gelebileceği unutulmamalıdır. Ayrıca problemin çözümü için optimal sonuç bulmayan, ancak kısa sürelerde iyi sonuçlar üretebilen sezgisel yöntemler de incelenebilir.

Başka bir gelecek çalışma konusu ise benzer bir problem ortamında hem işlerin çizelgelenmesini hem de makinelerin bakım ve tamir işlerinin planlanmasını içeren bir çalışma yapmaktır. Bu çalışma makinelerin bakım sürelerinin daha kısa olduğu bazı örnekler için yararlı olacaktır. Bu tip ortamlarda makinelerin ne kadar zamanda bir bakıma alınacağı da ayrı bir optimizasyon konusu oluşturacağından çok amaçlı bir problemden bahsetmek de söz konusu olabilecektir.

Son olarak, zaman yerine çalışmaya bağlı bozulmaların olduğu bir sistem ayrı bir çalışma konusunu oluşturabilir. Bu sistemde modeller tamamıyla farklı bir hale dönüşeceği için bakım planlanmasının ve iş çizelgelemenin yöntemleri de tamamen farklı olacaktır.

5. KAYNAKÇA

Akturk, M. S. ve Gorgulu, E., (1998), "Match-up Scheduling Under a Machine Breakdown", European Journal of Operational Research, 112, 80-96.

Barlow, R. E. ve Proschan, F., (1975), Statistical Theory of Reliability and Life Testing, Holt, Rinehart and Winston Inc.

Dutta, A., (1990), "Reacting to Scheduling Exceptions in FMS Environments", IIE Transactions, 22, 300-314.

Eliiyi, D. T. ve Azizoğlu, M., (2006a), "Spread Time Constraints in Operational Fixed Job Scheduling", International Journal of Production Research, 44, 4343-4365.

Eliiyi, D. T. ve Azizoğlu, M., (2006b), "A Fixed Job Scheduling Problem with Machine-Dependent Job Weights", International Journal of Production Research, (Kabul edildi).

Kolen, A. J. W. ve Kroon, L. G., (1993), "On The Computational Complexity of (Maximum) Shift Class Scheduling", European Journal of Operational Research, 64, 138-151.

Kolen, A. J. W., Lenstra, J. K. ve Papadimitriu, C. H., (1986), Interval Scheduling Problems, Manuscript, Centre for Mathematics and Computer Science, C.W.I., Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam.

Kovalyov, M. Y., Ng, C. T. ve Cheng, T. C. E., (2007), "Fixed Interval Scheduling: Models, Applications, Computational Complexity and Algorithms", European Journal of Operational Research, 178, 331-342.

Kroon, L. G., (1990), Job Scheduling and Capacity Planning in Aircraft Maintenance, PhD Thesis, Erasmus University, The Netherlands.

Kroon, L. G., Salomon, M. ve Van Wassenhove, L. N., (1995), "Exact and Approximation Algorithms for The Operational Fixed Interval Scheduling Problem", European Journal of Operational Research, 82, 190-205.

Mehta, S. V. ve Uzsoy, R. M., (1998), "Predictable Scheduling of a Job Shop Subject to Breakdowns", IEEE Transactions on Robotics and Automation, 14, 365-378.

Stadje, W., (1995), "Selecting Jobs for Scheduling on a Machine Subject to Failure", Discrete Applied Mathematics, 63, 257-265.

Wolfe, W. J. ve Sorensen, S. E. (2000), "Three Scheduling Algorithms Applied to The Earth Observing Systems Domain", Management Science, 46, 148-168.