AKTÜERYAL DEĞERLEMEDE NET PRİM VE ÖDENMİŞ TAZMİNAT YÖNTEMİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

M. Kenan TERZİOĞLU[1]

ÖZ

Sigorta şirketleri meydana gelen finansal ve demografik değişimler karşısında hem yükümlülüklerini karşılayacakları hem de büyümelerini sağlayacak getiri elde etmeyi amaçlarken, dalgalanan faiz oranlarını, enflasyon oranlarını, kur oranlarını ve türevlerini içeren piyasa risklerinden ve denetim kriterlerindeki ve vergi kanunları ile yapılan yasal düzenlemelerdeki değişimi içeren pazar dışı sistematik risklerden etkilenmektedir. Sigorta şirketleri, aynı belirsizliğe sahip menkul değerler için aktif bir piyasanın bulunmasından dolayı piyasa risklerindeki risk limitlerini ölçebilmekte, fiyatlayabilmekte ve risk limitlerini hazine araçlarını, türev ürünleri ve vadeli kur sözleşmelerini kullanarak yönetebilmektedir. Hayat sigortalarının değerlemesi yapılırken, gelecekte meydana gelmesi beklenen yüklemelerin daha önceki bir zamanda ortaya çıkmasından ve sermayeleştirilmesinden kaçınan ve sadece yüklemeler gerçekleştiği zaman ortaya çıkmasına izin veren yöntemlerin kullanılması gerekmektedir. Bu makale kapsamında Türkiye'de faaliyet gösteren sigorta şirketlerinin değerleme yaparken net prim değerleme yöntemi yerine ödenmiş tazminatlar değerleme yöntemini tercih etmeleri önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Ödenmiş Tazminat Değerleme Yöntemi, Thiele Diferansiyel Denklemi, Sermayeleşme, Bonus Sistemi

JEL Sınıflandırması: A12, C40, G22

COMPARISION OF NET PREMIUM AND PAID-UP METHOD IN ACTUARIAL VALUATION

ABSTRACT

While insurance companies aim not only meet its liabilities but also get surplus to ensure the growth in the occurrence of financial and demographic changes, they are affected by market risks including fluctuating interest rates, inflation rates, exchange rates and by systematic non-market risk including changes in audit criteria and legal arrangements made by tax laws. Insurance companies have ability to price and measure market risk limits and manage them by using treasury instruments, derivative products and futures currency contracts due to the presence of an active market for securities with same uncertainty. Methods that avoid occurrence of earlier time loadings, expected to occur in the future, and capitalization but only allowing loadings emerged at that time should be used in the valuation of life insurance. Within the scope of this article, using paid-up valuation method is recommended instead of net premium valuation method for insurance companies operating in Turkey.

Keywords: Paid-up Valuation Method, Thiele Differential Equation, Capitalization, Bonus System.

JEL Classification: A12, C40, G22

[1] *Arş.Gör., Trakya Üniversitesi İİBF, Ekonometri Bölümü, kenanterzioglu@trakya.edu.tr*

1. Giriş

Sigorta şirketleri risk yönetimi kapsamında yükümlülüklerinin kontrol altına alırken sermaye yapısını güçlendirmeye çalışmaktadır. Hayat sigortası ile üstlenilen yükümlülüklerin miktarı, vade sonundaki ekonomik koşulların sözleşmenin yapıldığı tarihteki ekonomik koşullardan farklılaşması sonucu değişim göstermektedir (Berkol, 1996,1-90). Hayat sigorta şirketlerinin karşılaştığı en yaygın problemlerden bir diğeri ise primlerin zamanında poliçe sahipleri tarafından yatırılmamasıdır. Bu durumda sigorta şirketi tarafından yapılan yatırımlardan elde edilen gelir azalmakta ve vade sonunda ödenecek tazminatlarda değer kayıpları yaşanmaktadır.

Sigorta şirketlerinin gelecekte, daha düşük bir gelir getirisine maruz kalmamaları için poliçe sahiplerinin ödeyecekleri primlerin, gelecekte oluşacak ekonomik koşulların öngörüsü yapılarak hesaplanması ve toplanan primlerin de vade sonunda değer kaybına uğramaması için uygun piyasa araçları ile değerlendirilmesi bir zorunluluk olmaktadır. Sigorta şirketleri, poliçe sahiplerinin ekonomik değişmelerden etkilenmesini en aza indirmek için kar paylı hayat sigortalarına yönelmektedirler (Doğan, 1993:1-63).

Finansal varlıkların adil değerlemesinin belirlenmesi için kullanılacak yöntem sırası standart belirleyici Ortak Çalışma Grubu (JWG) tarafından önerilmiştir. Buna göre; ürün için bir piyasa fiyatı mevcutsa piyasa fiyatı kullanılmalıdır. Tam olarak aynı ürün için herhangi bir piyasa fiyatının olmaması durumunda ise benzer araçla değerlenecek araç arasındaki fark ayarlanarak, benzer aracın piyasa fiyatı kullanılmalıdır. Piyasa fiyatı mevcut değilse ve piyasada benzer bir araç bulunmuyorsa, gelecek nakit akışlarının bugünkü değeri, risk ayarını içerecek şekilde kullanılmalıdır (American Academy of Actuaries, 2002:2-39).

Bilimsel bir değerleme yönteminde sözleşmelerin gerçekleşen ve gerçekleşmemiş durumlar göz önüne alınarak "gerçekleşen durum" ve "gelecek durum" olmak üzere iki parçada incelenmesi gerekmektedir. Linnemann (2002:629-647, 2003:153-176, 2004:81-104) tarafından sigorta poliçelerinin primleri ve tazminatları gerçekleşmiş ve gerçekleşmemiş olarak iki kısımda incelenmiştir.

Kar paylı işlemler, şirketin büyümesi için sermaye kaynağı oluşturduğu ve bağlı ortaklıkların kurulmasına olanak sağladığı için sigorta şirketleri için çekici bir ürün olmaktadır. Kar paylı hayat sigortası, sigortalının sigortacının karına katılma hakkı sağladığı hayat sigortası poliçeleridir. Kar paylı hayat sigortalarının özünde, poliçe sahiplerinin yatırım fonlarına katıldığı varsayılmaktadır. Poliçe sahiplerinin ödedikleri primden masraflar, sigorta türüne göre vade sonunda elde edeceği tazminat miktarları ve aldığı opsiyonlar karşılandıktan sonra kalan miktar yatırım fonunda değerlendirilmektedir. Yüklenmiş primlerden oluşan fonun yatırıma yönlendirilmesi ile elde edilen getiri bonus sistemi olarak poliçe sahiplerine dağıtılmaktadır. Sigorta süresi sonunda ödenen tazminat veya sigortalının ölümünde lehtarlara ödenen tazminat miktarının içinde, ödenmiş olan primlerin uygun yatırım araçlarında değerlendirilmesiyle elde edilmiş karlar da bulunmaktadır (Terzioğlu,2009:2-70).

Kar paylı hayat sigortası poliçelerinde meydana gelecek olumsuz durumlardan veya model sapmalarından korunmak için değerleme elemanlarının içinde güvenlik marjları bulunmaktadır. Hoem (1988:171-202) güvenlik sınırı kriterini rezerve göre incelerken Olivieri (1999:393-408) güvenlik sınırı kriterini yıllık beklenen karın birleşeni ve rezerve bağlı olarak incelemiştir. Kar paylı hayat sigortası poliçelerinde primler güvenlik sınırında sabitlenmektedir.

Ramlau-Hansen (1988: 225-236) tarafından sigorta süresi boyunca karın oluşumu ve birikimi incelenmiştir. Güvenlik marjlarının değerleme elemanlarına ilave edilmesi ile poliçe süresi boyunca tüm zamanlarda ortalama olarak bir karın ortaya çıkması beklenmekte ve primlere kar yüklenmekte ve elde edilen karların bonus olarak adil bir şekilde poliçe sahiplerine dönmesi beklenmektedir. Kar paylı hayat sigortalarında risk yönetimi yaklaşımı ile gelecekteki belirsizlikleri yönetebilmek için primlere aşırı yükleme yapılmakta ve vade sonunda ortaya çıkan piyasa durumları çerçevesinde aşırı yükleme veya kar bonus olarak poliçe sahiplerine dağıtımı gerçekleştirilmektedir. Ramlau-Hansen (1991:57-71) primlerden kazanılan karların adil bir şekilde nasıl dağıtılacağını incelemiştir. Bu makalede, sonuç bonus sistemi, vade sonu ödemelerini arttırmak için kullanılmaktadır. Bu yöntemle, sigorta şirketlerine yatırımlarını değişik yatırım araçlarına yönlendirerek risk almasına olanak sağlanmaktadır.

Makale kapsamında aktüerya matematiğiyle ilgili temel bilgiler anlatıldıktan sonra birinci ve ikinci seviye teknik tabanlarına göre ödenmiş tazminat değerleme yöntemi anlatılmakta, gelecek bonusların nasıl ortaya çıktığı ve sermayeleşmeden net prim değerleme yöntemine göre ne düzeyde kaçındığı gösterilmektedir.

2. Aktüeryal Metodoloji

Günlük piyasa koşullarında zamanın her birim değişiminde faiz yoğunluğunun ölçülmesi ve değerleme yapılırken bu faiz oranının kullanılması gerekmektedir. Zamandaki her birimlik değişime bağlı olarak hesaplanan faiz oranı anlık faiz oranı $\delta(t)$ olarak adlandırılmaktadır. Anlık faiz oranı $\delta(t)$ zamanın bir fonksiyonu olduğu için v^t iskonto faktörünün

$$v^t = e^{-\int_0^t \delta(t)\,dt}$$

biçiminde olduğu kabul edilmektedir (Kellison,1991:2-446). Sigorta kapsamı boyunca sigortalı ve sigortacı tarafından poliçe kurallarına göre gerçekleşen ödemeler ve sigorta süresince ödeme akışlarına bağlı olarak oluşan para miktarlarının gelişimi sigortalı ve sigortacı açısından önemli olmaktadır.

Sıfır zamanında başlayan ve n zamanında son bulan bir sözleşme kapsamında, [0,t] zamanı boyunca sözleşme şartlarına göre ödenen, gelir ve gideri ifade eden, toplam miktar $\mathcal{F}_n$ olarak gösterilmektedir. Ödeme fonksiyonu,

$$\Delta\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_\tau - {}_-\mathcal{F}_\tau$$

olmak üzere

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_0 + \int_0^t f_\tau \, d\tau + \sum_{0<\tau\leq\tau} \Delta\mathcal{F}_\tau \quad (2.1)$$

parçalı diferansiyel olarak yazılmaktadır. Eşitlik (2.1)'de integral ifadesi vadesi gelmiş sürekli ödemeleri toplarken, toplama işlemi ile yapılan "son toplam" ile ödemelerin toplamı bulunmaktadır (Norberg, 2002:1-552). t zamanında $\delta(t)$ faiz oranıyla nemalandırılan bir hesaptan A ödeme akışıyla üretilen gelirin/giderin, yatırıldığı/çekildiği durum ele alındığında, verilen denklemlere göre τ kısa zaman aralıkları göz önüne alındığında ve n dönem için tüm zaman aralıkları toplandığında, tüm nakit akışlarının t zamanındaki değeri

$$e^{\int_0^t \delta(t)dt} \int_0^n e^{-\int_0^\tau \delta(t)dt} dA_\tau$$

eşitliği ile hesaplanmaktadır. $(t, t+dt)$ yaş aralığında ölmenin $f(t)$ olasılığı; t zamanına kadar yaşama olasılığı $S(t)$ ve $t+dt$ yaşından önce koşullu ölme olasılığı $\mu(t)$'nin çarpımı olarak

$$f(t) = S(t)\mu(t) = e^{-\int_0^t \mu(t)}\mu(t) \quad (2.2)$$

düzenlenmektedir (Rotar, 2007:1-632). Ödenecek tazminatın aktüeryal bugünkü değeri,

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ 1} = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, \mu_x(t)dt + v^n \, {}_np_x \quad (2.3)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Sigorta şirketinin herhangi bir t zamanındaki yükümlülüğü, $t \in [0, n)$ için (t,n] süresinde ödenecek olan $\alpha(u)$ ve $\beta(n)$ sigorta tazminatlarının aktüeryal değeri

$$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} = k(t) = \int_t^n E(t,u)\mu(u)\alpha(u)du + E(t,n)\beta(n) \quad (2.4)$$

olarak hesaplanmaktadır. Bu tür poliçelerde hem ölme riski hem de yaşama riski teminat altına alındığından net primleri diğer hayat sigortaları primlerinden nispeten daha yüksektir. Yatırım amacına en uygun olan karma hayat poliçeleri, kar paylı ya da endeksli olarak düzenlenebilmektedir (Nomer et al., 2004:1-369).

Hayat annüitesi, annüitant olarak adlandırılan kişiye hayatta olması durumunda belli bir dönem boyunca genellikle eşit miktarlarda yapılan ödemelerdir. Ödemeleri, sigortalı yaşadığı süre boyunca yapılıyorsa tam hayat, sınırlı zaman yapılıyorsa dönemsel hayat annüitesi olarak adlandırılmaktadır. Yıllık bir birimin yıl içinde sürekli olarak ödendiği n yıllık bir hayat annüitesinin net tek primi (aktüeryal bugünkü değeri)

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, dt = \int_0^n {}_tE_x \, dt \quad (2.5)$$

eşitliği ile yazılır (Bowers et al., 1997:1-753). Sigortalının yükümlülüğü ise, (t,n] zaman süresi boyunca her bir zaman birimde ödenecek birim primlerdir. Bu primlerin aktüeryal değeri

$$\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = a(t) = \int_t^n E(t,u)du \qquad (2.6)$$

olarak hesaplanmaktadır (Linnemann, 2003:153-176). t zamanında bulunan poliçe için ayrılmış rezerv

$$V(t) = \int_t^n v(s,u)p(s,u)\mu(u)\,\alpha(u)du + v(t,n)p(t,n)\beta(n)$$

$$-\int_t^n \pi v(s,u)p(s,u) \qquad (2.7)$$

şeklinde yazılmaktadır. Hayat sigortalarında Thiele diferansiyel denklemi, sigorta portföyü için karın birikimini ve matematiksel rezervin beklenen gelişimi ile ilgili formülleri elde etmek için kullanılmaktadır. Teknik taban elemanlarının bazılarında meydana gelen kayıpların, diğer elemanlarından elde edilen kazançlarla nasıl dengelendiği Thiele diferansiyel denklemi ile görülebilmektedir. $\alpha(u)$, π ve μ 'nun sürekli olduğu her t zamanında (2.7) eşitliğinde t'ye göre diferansiyeli alındığında

$$\frac{d}{dt}V_t = \delta(t)V_t + \pi_t - \mu(t)[\alpha(t) - V_t] \qquad (2.8)$$

Thiele differansiyel denklemine ulaşılmaktadır. Thiele diferansiyel denkleminin sağ tarafındaki ifade, yaşayan her bir poliçe sahibine ait fonun her birim zamandaki değişimini göstermektedir. Eşitlik (2.8)'de bulunan $[\alpha(t) - V_t]$ ifadesi her birim zamandaki diğer bir duruma geçişte oluşacak risk altındaki net miktarı gösterirken $\mu(t)[\alpha(t) - V_t]$ ifadesi başka bir duruma geçişte meydana gelecek risk maliyetini göstermektedir (Linnemann,1993:63-74).

Denklik ilkesinin altında Thiele diferansiyel denklemi yeniden düzenlendiğinde

$$\pi_t = \frac{d}{dt}V_t - \delta(t)V_t + \mu(t)[\alpha(t) - V_t] \qquad (2.9)$$

eşitliğine ulaşılmaktadır.

$$\pi_t = \pi_t^s + \pi_t^r = \left[\frac{d}{dt}V_t - \delta(t)V_t\right] + [\mu(t)(\alpha(t) - V_t)]$$

t zamanındaki π_t primi, net prim rezervini artırmak için kullanılan, π_t^s, tasarruf primi ve t zamanındaki net risk miktarını kapsayan, π_t^r, risk primi olmak üzere iki bileşene ayrılmaktadır. Eşitlik (2.9) yeniden düzenlendiğinde;

$$\pi_t + \delta(t)V_t = \frac{d}{dt}V_t + \pi_t^r \qquad (2.10)$$

eşitliğine ulaşılmaktadır. Eşitlik (2.10)'da prime eklenmiş net prim rezervinden kazanılmış faizin, net prim rezervindeki değişime ve risk priminin finanse edilmesine yardım ettiği görülmektedir (Gerber,1997:1-217). Değişen ekonomik koşullardan sigortalının ödediği primlerin, tazminatların ve sigorta süresi boyunca oluşturulan rezervlerin etkilenmemesi veya en az düzeyde etkilenmesi için birinci_seviye teknik tabanında primler hesaplanırken piyasa koşulları altında faiz ve ölümlülük oranları en kötü durumlar göz önüne alınarak belirlenirken; ikinci_seviye teknik tabanında güncel durumda mevcut bulunan $\tilde{\delta}(t)$ faiz oranları ve $\tilde{\mu}(t)$ ölümlülük oranları göz önüne alınarak primler hesaplanmaktadır (Moller ve Steffensen, 2007:1-279).

Birinci_seviye teknik tabanında kullanılan ihtiyatlı faiz oranı ve ölümlülük oranları rezerv sağlama amacıyla kullanılırken gerçek duruma göre belirlenmiş ikinci_seviye teknik tabanı yaklaşımı, kar dağıtımını sağlamak için kullanılmaktadır. Birinci_seviye teknik tabanındaki ileriye doğru rezervin t'ye göre diferansiyeli alındığında $\tilde{g}(t)$;

$$\frac{d}{dt}V(t) + \tilde{g}(t) = \tilde{\delta}(t)V(t) + \pi - \tilde{\mu}(t)[\alpha(t)S - V(t)]$$

şeklinde beklenen karı gösteren ek bir terim elde edilmektedir. Birinci seviye net prim rezervinin elde bulundurulması, t zamanındaki her birim zaman için $\tilde{g}(t)$ beklenen kar miktarını ortaya çıkarmaktadır.

$$\tilde{B}_p(t) = V(t) - \tilde{V}(t) = \int_t^n \tilde{E}(t,u)\,\tilde{g}(u)\,du \qquad (2.11)$$

(2.11) eşitliğinde beklenen gelecek kar, ikinci_seviye teknik tabanına göre sermayeleştirilmektedir. Birinci_seviye teknik tabanındaki ileriye doğru net prim rezervi, ikinci_seviye teknik tabanı kullanılarak sabit net prim ve tazminatların değerlemesiyle ilişkili olan gelecek bonus yüklemelerinin sermayeleştirilmesini içermektedir. İkinci_seviye net prim rezervi $\bar{\bar{V}}(t)$,

$$\bar{\bar{V}}(t) = V(t) + [\pi - \tilde{\pi}]\tilde{a}(t) \qquad (2.12)$$

ikinci_seviye teknik tabanını kullanarak sabit net priminin ve tazminatın değerlemesiyle $[\pi - \tilde{\pi}]$ gelecek bonus yüklemesinin nasıl ikinci_seviye net prim rezervi tarafından sermayeleştirildiğini göstermektedir. Bu durumda, net prim metodu, π gelecek prim ödemeleri ile ilgili olan $[\pi - \tilde{\pi}]$ gelecek bonus yüklemelerinin ortaya çıkmasını engellemektedir.

$$\bar{\bar{B}}_p(t) = V(t) - \bar{\bar{V}}(t) = \tilde{B}_p(t) - [\pi - \tilde{\pi}]\tilde{a}(t) \qquad (2.13)$$

Net prim değerleme ilkesi kullanılarak, sabit net prim ve tazminatın birinci_seviye teknik tabanına göre değerlenmesiyle, $\tilde{g}(t)$ gelecek bonus yüklemeleri ile sabit primler π ve $\tilde{\pi}$ arasındaki farkdan bulunan gelecek yüklemeler arasındaki fark ikinci_seviye teknik tabanına göre sermayeleştirilmektedir.

$$\frac{d}{dt}\bar{\bar{V}}(t) + [\pi - \tilde{\pi}] = \tilde{\delta}(t)\bar{\bar{V}}(t) + \pi - \tilde{\mu}(t)[\alpha(t)S - \bar{\bar{V}}(t)] \qquad (2.14)$$

İkinci seviye net prim rezervini oluşturmak, t zamanındaki her birim zaman için $\pi - \tilde{\pi}$ sabit kar miktarını ortaya çıkarmaktadır. π primi ödendiğinde, her bir $\pi - \tilde{\pi}$ yüklemesi kar olarak görülmektedir.

2. Ödenmiş Tazminatlar Değerleme Yöntemi

Sigorta süresi boyunca geçen zamanda ödenmiş tazminat seviyesi, birinci_seviye teknik tabanına göre değerlenen net prim rezervleriyle ilişkili olan tek prim ödemesi ile elde edilen sigorta tazminatı olarak tanımlanmaktadır. Prim tazminat seviyesi ise aynı poliçe altında gelecek sabit ödemeli primlerle elde edilen sigorta tazminatı olarak tanımlanmaktadır. Sigorta tazminat seviyesi $S = \sum_{i=1}^{2} S_i(t)$, ödenmiş tazminatlar $S_1(t)$ ve prim tazminat seviyesi $S_2(t)$ olarak ikiye ayrılmaktadır. Sözleşmede net prim rezervine bağlı olarak yapılacak tek prim ödemesi için biriktirilebilecek ödenmiş tazminat seviyesi $S_1(t)$ geçmiş primlere dayanmaktadır.

k(t) > 0 iken ödenmiş tazminat seviyesi değişkeni $S_1(t)$

$$V(t) = S_1(t)k(t)$$

şeklinde verilmektedir. Bu yüzden, ödenmiş tazminat seviyesi geçmiş primlere dayanmaktadır. t zamanında yürürlüğe giren ve her zaman biriminde π miktarında gelecek sabit prim ödenen sözleşmenin prim tazminat seviyesi, $f(t) = \frac{a(t)}{k(t)}$ eşitliği verildiğinde ve k(t) > 0 koşulu altında, denklik ilkesine göre,

$$S_2(t) = \pi f(t) \tag{3.1}$$

olarak hesaplanmaktadır. Sigorta sözleşmesi yürürlüğe girdiğinde tazminat seviyeleri sırasıyla $S_1(0) = 0$ ve $S_2(0) = S$ şeklinde bulunmaktadır. $\beta(n) \neq 0$ koşulu altında, $S_1(n) = S$ ve $S_2(n) = 0$ ile $\beta(n) = 0$ ve $\alpha(n) > 0$ koşulu altında, $S_2(n) = \lim_{t \to n} S_2(t) = \pi[\alpha(n)\mu(n)]^{-1}$ elde edilmektedir. $t \in [0, n)$ aralığında i=1,2 için $S_i(t)$, t nin bir fonksiyonu olarak sınırlandırılmaktadır.

$$\frac{d}{dt} S_1(t) = -\pi \frac{d}{dt} f(t) \tag{3.2}$$

Eşitlik (3.2) ifadesi, t'nin bir fonksiyonu olan $f(t)$ azalırsa, yine t'nin bir fonksiyonu olan $S_1(t)$ nin artacağını göstermektedir. Bu durumda, $S_1(0) = 0$ olduğundan, $t \in [0, n]$ için $S_1(t) \geq 0$ eşitsizliğine ulaşılmakta ve burdan $V(t) \geq 0$ olduğu bulunmaktadır. $V(t)$'nin sigorta dönemi boyunca hiçbir zaman negatif değerler almadığı varsayılmaktadır. Ödenmiş tazminat seviyesinin t zamanındaki her bir birim artış oranına eşit olan sigorta tazminat seviyesini alan, birinci-seviye teknik tabanında t zamanında ödenen tek prim

$$\pi_1(t) = \left[\frac{d}{dt} S_1(t)\right] k(t) \tag{3.3}$$

olmaktadır. Ödenmiş tazminat seviyesine dayanan, ileriye dönük net prim rezervinin her bir zaman birimindeki artışın oranı

$$\frac{d}{dt} V(t) = \delta(t)V(t) + \pi_1(t) - \mu(t)[\alpha(t)S_1(t) - V(t)]$$

şeklinde verilmektedir. Thiele diferansiyel denkleminin çözümünden,

$$\int_0^n E(0,u)\pi_1(u)du = \int_0^n E(0,u)\mu(u)\alpha(u)S_1(u)du + E(0,n)\beta(n)S$$

elde edilmektedir. Eğer sigortalı t zamanında ölürse, t zamanındaki her bir zaman birimindeki $\pi_1(t)$ tekrarlanan tek prim ödemelerinin, t zamanında $\alpha(t)S_1(t)$'ye eşit olan tazminat seviyesini veya sigortalı n olan sigorta süresinin sonuna kadar yaşarsa vade geliminde $\beta(n)S$ tazminat seviyesini verdiği gösterilmektedir. Eşitlik (3.1)'de ki $f(t)$, t'nin fonksiyonu olarak diferansiyeli alındığında,

$$\pi = \sum_{i=1}^{2} \pi_i(t)$$

elde edilmektedir. t'nin fonksiyonu olan $\alpha(t)S_2(t)$'ye eşit olan sigorta tazminatına bağlı olan t zamanındaki herbir birim zaman için risk masrafı veya doğal prim

$$\pi_2(t) = \mu(t)\alpha(t)S_2(t) \tag{3.4}$$

eşitliği ile ifade edilir. Temel prim tazminatı $\alpha(t)S_2(t)$ şeklinde gösterilmektedir. $\alpha(t)S_2(t)$ prim tazminatıyla ilişkili olan risk masrafları doğal prim $\pi_2(t)$ prim ödemeleri ile ve $\alpha(t)S_1(t)$ ödenmiş sigorta tazminatıyla ilgili olan ve $\beta(n)S$ temel vade sonu tazminatı ile ilişkili olan risk masrafları, $\pi_1(t)$ prim ödemeleri ve $\delta(t)$ anlık teknik faiz tarafından finanse edilmektedir.

Sigortanın başlangıç zamanı ve vade sonu zamanı ele alındığında, $\alpha(t)$ ve $\beta(n)$ tazminatlarına göre elde edilecek $\pi_1(0)$ ve $\pi_2(0)$ prim ödemeleri, $\pi_2(0) = \mu(0)\alpha(0)S$ ve $\pi_1(0) = \pi - \mu(0)\alpha(0)S$ olarak hesaplanmaktadır. $\pi_1(t)$ ve $\pi_2(t)$ prim ödemeleri ise; $\beta(n) \neq 0$ koşulu altında $\pi_2(t) = 0$ ve $\pi_1(n) = \pi$, $\beta(n) = 0$ koşulu altında $\alpha(n) > 0$ iken $\pi_2(n) = \lim_{t\to n} \pi_2(t) = \pi$ ve $\beta(n) = 0$ ve $\alpha(n) > 0$ olduğunda, $\pi_1(n) = \lim_{t\to n} \pi_1(t) = 0$ şeklinde elde edilmektedir (Linnemann, 2004:81-104).

Sigorta tazminatlarının finansmanı birinci_seviye teknik tabanında iki kısma ayrılmaktadır. $\alpha(t)S_2(t)$ temel prim tazminatına ilişkin risk masrafı $\pi_2(t)$ doğal prim ödemesiyle finanse edilirken, $\alpha(t)S_1(t)$ temel ödenmiş sigorta tazminatına ilişkin risk masrafı ve aynı zamanda $\beta(n)S$ vade sonu tazminatı, $\pi_1(t)$ tekrarlanan tek prim ödemelerinden ve $\delta(t)$ anlık teknik faizden finanse edilmektedir.

Birinci_seviye ödenmiş tazminat rezervi t'nin fonksiyonu olarak diferansiyeli alındığında ve $\delta(t)$ ile $\mu(t)$, $\tilde{\delta}(t)$ ve $\tilde{\mu}(t)$ ile değiştirildiğinde, elde edilen diferansiyel denklemde $\tilde{g}_1(t) = \Delta\tilde{\delta}(t)V(t) + \Delta\tilde{\mu}(t)[\alpha(t)S_1(t) - V(t)] = S_1(t)\tilde{\gamma}(t)$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt}V(t) + \tilde{g}_1(t) = \tilde{\delta}(t)V(t) + \pi_1(t) - \tilde{\mu}(t)[\alpha(t)S_1(t) - V(t)] \tag{3.5}$$

biçiminde ek bir $\tilde{g}_1(t)$ terimi elde edilmektedir. Eşitlik (3.5)'de $\tilde{g}_1(t)$, t zamanında her birim zaman için $\pi_1(t)$ prim ödemesi ile $\alpha(t)S_1(t)$ temel ödenmiş tazminattan t zamanındaki her birim zamanda kazanılan bonus veya beklenen kar oluşumu ve t zamanında birinci_seviye ödenmiş tazminat rezervi $V(t)$ bulundurulması sonucu ortaya çıkmaktadır. $\pi_2(t)$ doğal prim ödemesiyle $\alpha(t)S_2(t)$ temel prim tazminatından t zamanındaki her bir zamanda kazanılan

$$\tilde{g}_2(t) = \tilde{g}(t) - \tilde{g}_1(t) = -\Delta\tilde{\mu}(t)\alpha(t)S_2(t)$$

bonus (risk) veya beklenen (risk) kar $\tilde{g}_2(t)$ olarak gösterilmektedir. İkinci_seviye ödenmiş tazminat rezervi $\tilde{V}_1(t)$, t zamanında

$$\tilde{V}_1(t) = S_1(t)\tilde{k}(t)$$

şeklinde verilmektedir. $S_1(t)$ ödenmiş tazminat seviyesi değişkeni, ikinci_seviye teknik tabanına göre rezerv edilmektedir. Gelecek prim ödemeleri tahmin edilmemektedir. $\tilde{V}_1(0) = V(0) = 0$ ve $\tilde{V}_1(n) = V(n) = \beta(n)S$ olarak kabul edilmektedir. $V(t) \geq 0$ koşulu altında $\tilde{V}_1(t) \geq 0$ olmaktadır. İkinci_seviye teknik tabana göre hesaplanmış t zamanındaki $\tilde{\pi}_1(t)$ tek primi, ödenmiş tazminat seviyesinin t zamanında her birim zamanındaki artış oranına eşit olmaktadır.

$$\tilde{\pi}_1(t) = \left[\frac{d}{dt}S_1(t)\right]\tilde{k}(t) \tag{3.6}$$

t zamanında her birim zaman da tekrarlanan tek prim ödemesi $\tilde{\pi}_1(t)$; eğer sigortalı t zamanında ölürse $\alpha(t)S_1(t)$ miktarında ikinci_seviye teknik tabanında ödenmiş sigorta tazminatını ve eğer sigortalı sigorta süresinin sonu olan n zamanına kadar yaşarsa $\beta(n)S$ miktarında ikinci_seviye teknik tabanında vade sonu tazminatını finanse etmektedir. İkinci_seviye teknik tabanında $\alpha(t)S_2(t)$ temel prim tazminatı için t zamanındaki birim zaman için doğal prim,

$$\tilde{\pi}_2(t) = \tilde{\mu}(t)\alpha(t)S_2(t) \tag{3.7}$$

olarak bulunmaktadır. t zamanındaki her birim zaman için tekrarlanacak olan tek prim ödemesi;

$$\tilde{\pi}(t) = \sum_{i=1}^{2}\tilde{\pi}_i(t) \tag{3.8}$$

biçiminde $\tilde{\pi}_1(t)$ ve $\tilde{\pi}_2(t)$ prim ödemelerinin toplamı şeklinde hesaplanır. (3.8) eşitliği ikinci_seviye teknik tabanındaki poliçe için temel sigorta tazminatını finanse etmektedir. t'ye göre diferansiyel alındığında ve $[\pi - \tilde{\pi}(t)]$ eklendiğinde, Thiele diferansiyel denklemine göre,

$$\frac{d}{dt}\tilde{V}_1(t) + [\pi - \tilde{\pi}(t)] = \tilde{\delta}(t)\tilde{V}_1(t) + \pi - \tilde{\mu}(t)[\alpha(t)S(t) - \tilde{V}_1] \tag{3.9}$$

olur. Eşitlik (3.9), ikinci_seviye teknik tabandaki ödenmiş tazminat rezervindeki her t anındaki değişimi göstermektedir. İkinci_seviye ödenmiş tazminat rezervi bulundurmak, t zamanındaki her birim zaman için $\pi - \tilde{\pi}(t)$ miktarında kar ortaya çıkarmaktadır. Değerleme sapmalarından sakınmak için, $\tilde{\pi}(t)$'nin sigortalı tarafından ödenen π'ye eşit veya daha az olması gerekmektedir.

4. Gelecek Bonusların Ortaya Çıkması Ve Sermayeleştirme

Sermayeleştirme, sigorta şirketinin birikmiş karının sermaye artırımında kullanılması olarak tanımlanmaktadır. Bu durumda sigorta şirketi elde ettiği karı anaparaya dönüştürmekte ve yatırıma yönlendirmektedir. Kar paylı hayat sigortalarında yüklenmiş primler, net tek prim ödemesi durumu dışında, sigorta süresi kapsamında belli bir süre boyunca poliçenin türüne göre farklı periyotlarda alınmaktadır. Bununla birlikte poliçe sahibinin sigorta süresi sona ermeden poliçeden ayrılması veya ödemelerini durdurması mümkündür. Bu durum göz önüne alınmadan sigorta şirketi gelecek primleri ödenecek gibi varsayarak bir matematiksel karşılık ayırırsa, elde etmesi olasılığa bağlı olan yüklü primleri de ödenmiş olarak varsaymaktadır.

$t \in [\tau, n]$ zamanın fonksiyonu olarak sabit olan $S_1(\tau)$ ödenmiş tazminatına göre $t \in [\tau, n]$ için birinci_seviye ödenmiş tazmiant rezervi, $\tilde{V}_1(\tau,\tau) = \tilde{V}_1(\tau)$ olmak üzere$V_1(\tau, t) = S_1(\tau)k(t)$ olarak bulunmaktadır. $S_1(\tau)$ sabit ödenmiş tazminat birinci_seviye teknik tabanına göre rezerv edilmektedir. $V_1(\tau, t)$'yi t'nin fonksiyonu olarak diferansiyeli alındığında, $t \in [\tau, n]$ için $\tilde{g}_1(\tau, t) = S_1(\tau)\tilde{\gamma}(t)$ eşitliği ile

$$\frac{d}{dt}V_1(\tau,t) + \tilde{g}_1(\tau,t) = \tilde{\delta}(t)V_1(\tau,t) + \pi_1(t) - \tilde{\mu}(t)[\alpha(t)S_1(\tau) - V_1(\tau,t)] \quad (4.1)$$

bulunmaktadır. $\tilde{g}_1(\tau, t)$; $\alpha(t)S_1(\tau)$ tazminatdan t zamanındaki her birim zamanda kazanılan beklenen kar veya bonus olarak adlandırılmaktadır. $\tilde{B}_p^{(1)}(t)$, $V(t)$ ve $\tilde{V}_1(t)$ arasındaki fark olarak alındığında

$$\tilde{B}_p^{(1)}(t) = V(t) - \tilde{V}_1(t) = S_1(t)[k(t) - \tilde{k}(t)] = \int_t^n \tilde{E}(t,u)\, S_1(t)\tilde{\gamma}(u)du$$
$$= \int_t^n \tilde{E}(t,u)\,\tilde{g}_1(t,u)du \quad (4.2)$$

şeklinde bulunmaktadır. Ödenmiş tazminat değerleme ilkesini kullanarak, $u \in [t, n]$ zaman aralığı için u'nun fonksiyonu olan $S_1(t)$ sabit ödenmiş tazminat seviyesi ile ilişkili olan gelecek bonus yüklemelerinin ikinci_seviye teknik tabanında t zamanındaki sermayeleştirilmesi, temel net primin ve temel tazminatın birinci_seviye teknik taban kullanılarak değerlemesiyle ortaya çıkmaktadır. Bu durumda sadece geçmiş primlerle ilişkili olan gelecek bonus yüklemeleri söz konusu olmaktadır.

Ödenmiş tazminat yöntemi, gelecekte yapılacak prim ödemelerini daha gerçekleştirilmeyeceğinden dolayı gelecek prim ödemelerine bağlı olan gelecek bonus yüklemelerini ortaya çıkarmamakta ve dolayısıyla net prim değerleme yönteminin aksine sermayeleştirme yaparken henüz ödenmemiş primleri göz ardı etmektedir. t'nin fonksiyonu olarak $\tilde{B}_p^{(1)}(t)$ differansiyallendiğinde ve Thiele diferansiyel denklemi $\tilde{B}_p^{(1)}(n) = 0$ sınır koşulu ile çözüldüğünde,

$$\tilde{B}_p^{(1)}(t) = \int_t^n \tilde{E}(t,u)\{\tilde{g}_1(u) - [\pi_1(u) - \tilde{\pi}_1(u)]\}du \tag{4.3}$$

eşitliğine ulaşılmaktadır. Birinci_seviye net prim rezervi ve ikinci_seviye ödenmiş tazminat rezervi arasındaki fark; $\tilde{g}_1(t)$ gelecek bonus yüklemelerinin ikinci_seviye teknik tabandaki sermayeleştirilmesinden, birinci ve ikinci_seviye teknik tabanında verilen $\pi_1(t)$ ve $\tilde{\pi}_1(t)$ tekrarlanan tek primler arasındaki farkda bulunan gelecek yüklemelerin arasındaki farka eşit olmaktadır.

$$\frac{d}{dt}\left[\tilde{V}_1(t) - \tilde{V}(t)\right] = \left[\tilde{\delta}(t) + \tilde{\mu}(t)\right]\left[\tilde{V}_1(t) - \tilde{V}(t)\right] - [\pi - \tilde{\pi}(t)] \tag{4.4}$$

olarak bulunmaktadır. $\tilde{V}_1(n) = \tilde{V}(n)$ olarak alındığında (4.4) eşitliği

$$\tilde{V}_1(t) - \tilde{V}(t) = \int_t^n \tilde{E}(t,u)\,[\pi - \tilde{\pi}(u)]du$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_t^n \tilde{E}(t,u)\,[\pi_i(u) - \tilde{\pi}_i(u)]du \tag{4.5}$$

şekline dönüşmektedir. Eşitlik (4.5), ikinci_seviye ödenmiş rezervi sabit net prim ve tazminatın ikinci seviye teknik tabanı kullanılarak değerlemesiyle kıyaslandığında, ikinci_seviye tekrarlanan tek prim değişkeni $\tilde{\pi}(t)$ ve sabit net prim π arasındaki farkda bulunan gelecek yüklemelerin ikinci_seviye ödenmiş tazminat rezervinde nasıl sermayeleştiğini göstermektedir. Ödenmiş tazminat yöntemi, π gelecek prim ödemeleri ile ilgili olan $\pi - \tilde{\pi}(u)$ gelecek bonus yüklemelerini ortaya çıkarmadığı için net prim değerleme yönteminde ortaya çıkan yanlış sermayeleşmeden kaçınmaktadır. (4.5) eşitliğinin sağ tarafı incelendiğinde,

$$\int_t^n \tilde{E}(t,u)\,[\pi_1(u) - \tilde{\pi}_1(u)]du = \int_t^n \tilde{E}(t,u)\,[\tilde{g}_1(u) - \tilde{g}_1(u,t)]du$$

$$= \int_t^n \tilde{E}(t,u)\,[S_1(u) - S_1(t)]\tilde{\gamma}(u)du$$

$\pi_1(t)$ ve $\tilde{\pi}_1(t)$ tekrarlanan net tek primlerin arasındaki farkda bulunan gelecek bonus yüklemelerin, ödenmiş tazminat seviyesindeki gelecek artışla ilgili olan ikinci_seviye teknik tabandaki faizi ve risk bonusunu finanse etmektedir. $\pi_2(t) - \tilde{\pi}_2(t) = \tilde{g}_2(t)$ olarak bulunduğundan, doğal primlerin $\pi_2(t)$ ve $\tilde{\pi}_2(t)$ arasındaki farkda bulunan gelecek bonus yüklemeleri, $\alpha(t)S_2(t)$ gelecek prim tazminatıyla ilgili olan beklenen risk bonusunu finanse etmektedir (Linnemann, 2002:629-647).

5. Sonuç

Kar paylı hayat sigortaları, ödenmiş tazminatlar değerleme yöntemi ile incelenmiştir. Ödenmiş tazminat değerleme yöntemiyle sadece geçmiş prim ödemeleriyle ilişkili olan gelecek bonus yüklemelerinin sermayeleştirildiği, bununla birlikte, gerçekleşmemiş prim ödemeleriyle ilgili olan gelecek bonus yüklemelerinin sermayeleştirilmesinden kaçındığı sonucuna ulaşılmıştır. Net prim değerleme yöntemi değerleme tabanına göre hesaplanan net prim ilkesine dayandığı için, daha sonraki yıllarda değerleme tabanındaki herhangi bir değişim karşısında, bu yöntemin kullanılmasının sağlıklı sonuçlar vermemektedir. Sabit net prim ödemesi, gelecek primler ve tekrarlanan net primler olarak iki kısma ayrıldığından ödenmiş tazminatlar değerleme yönteminin sigorta şirketinin yükümlülüklerinin değerlemesinde daha gerçekçi bir değerleme yaklaşımı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Sigorta kapsamında, bonuslar garanti edilmemiş sonuç bonuslar olarak dağıtıldığında ve ödenecek tazminatlar ödenmiş tazminat değerleme yöntemi kullanılarak değerlendirildiğinde, sigorta şirketi için, bir yatırım özgürlüğünün mümkün olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Poliçe sahibinin prim ödemelerine devam etmemesi durumunda poliçe ödenmiş durumuna dönüşmekte ve azalan tazminatla devam etmektedir. Bu durumda ikinci seviye net prim değerleme rezervi, ikinci seviye ödenmiş prim rezervi değerine düşmektedir. Ödenmiş tazminat değerleme yönteminde, poliçe sahibinin ödenmiş primleri göz önüne alındığı için değerleme kaybı olmamaktadır.

Ödenmiş tazminat değerleme yöntemi poliçe sahibinin prim ödemesinin devam etmesine bağlı olmadığı için piyasa koşullarını uygulanabilirliği mümkündür. Bu yöntemle, sigorta şirketlerine, yatırımlarını değişik yatırım araçlarına yönlendirerek risk almalarına olanak sağlanmaktadır. Sigorta şirketi güncel durumlar altında yükümlülüklerini değerlerken ödenmiş tazminatlar değerleme yönteminin kullanılması net prim değerleme yöntemine göre daha gerçekci bir değerleme yaklaşımı sunmaktadır.

Sigorta şirketleri için sermaye oluşturmak önemli olmakla birlikte gereğinden fazla sermayeleşme yapıldığında şirketin yatırıma ayırdığı miktar azalacağından şirket bir süre sonra güçlü sermaye yapısına sahip olsa bile zayıflamaktadır. Sigorta şirketlerinin ödenmiş tazminat değerleme yöntemini kullanarak, ödenmemiş primlerden ortaya çıkacak gelecek bonusların sermayeleştirilmesinden kaçındığı ve böylece yükümlülüklerinin karşılanmasında daha az risk aldığı bununla beraber daha geniş bir yatırım özgürlüğüne sahip olduklarından daha riskli yatırımlara yönlenebildikleri sonucundan hareketle Türkiye'de faaliyet gösteren sigorta kuruluşlarının değerleme yaparken net prim değerleme yöntemi yerine ödenmiş tazminatlar değerleme yöntemini kullanmaları önerilmektedir.

Kaynaklar

AMERICAN ACADEMY OF ACTUARIES, (2002), "Fair Valuation of Insurance Liabilities Principles and Methods", Public Policy Monograph, 2-39.

BERKOL, B.M., (1996), "Enflasyonist ortamda hayat sigortası işletmelerinde yatırımlar ve kar payı hesaplaması", T.C. Marmara Üniversitesi Bankacılık ve Sigortacılık Enstitüsü Sigortacılık Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, 1-90.

BOWERS, N.L., GERBER, H.U., HICKMAN, J.C., JONES, D.A., NESBITT, C.J.,(1997), "Actuarial Mathematics", Society of Actuaries, Schaumburg, IL., 753 .

DOĞAN, A.İ., 1993, Hayat sigortalarında kar payı ve Türkiye'deki uygulamaları, T.C. Marmara Üniversitesi Bankacılık ve Sigortacılık Enstitüsü Sigortacılık Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, 1-69.

GERBER, H.U., (1997), "Life Insurance Mathematics", Springer, 217 s.

HOEM, J.M., (1988), "The Versatility of Markov chain as a tool in the mathematics of life insurance", Transactions of 23rd International Congress of Actuaries,171-202.

KELLISON, S.G., (1991) "The Theory of Interest",Irwin McGraw-Hill, 446s.

LINNEMANN, P., (1993), "On the application of Thiele's differential equation in life insurance", Insurance:Mathematics and Economics, 13, 63-74.

LINNEMANN, P., (2002), "Comparison of net premium and paid-up benefit valuation principles," Blatter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathe matik 25, 629-647.

LINNEMANN, P., (2003), "An actuarial analysis of participating life insurance", Scandinavian Actuarial Journal, 2, 153-176.

LINNEMANN, P., (2004), "Valuation of participating life insurance liabilities", Scandinavian Actuarial Journal, 2, 81-104.

MOLLER, T., STEFFENSEN, M., (2007), "Market-Valuation Methods in Life Insurance and Pension Insurance", Cambridge University Press, 279 s.

NOMER, C., YALÇIN, B., YUNAK, H., ERSÖZ, F., EVREN, C., YÜCEL, A., ÖZÜNAl, F. KARAMAN, M., ÇUHACI, Y.K., (2004), "Açıklamalı Sigorta ve Reasürans Terimleri Sözlüğü", Milli Reasürans T.A.Ş., 369 s.

NORBERG, R., (2002), "Basic Life Insurance Mathematics", 552 s.

OLIVIERI, A., (1999), "Safe-side requirements in the framework of multistate models for insurances of the person", Applied Stochastic Models in Business and Industry, 15, 393-408.

RAMLAU-HANSEN, H., (1988), “The emergence of profit in life insurance”, Insurance: Mathematics and Economics, 7, 225-236.

RAMLAU-HANSEN, H., (1991), “Distribution of surplus in life insurance”, Astin Bulletin, 21, 57-71.

ROTAR,V.I., (2007), “Actuarial Models”, Chapman & Hall, 632 S.

TERZİOĞLU M.K., (2009), “Hayat Sigortalarında Değerleme Yaklaşımları”, Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Yüksek Lisans Tezi, 2-70.