BEKLEME HATTI PROBLEMLERİNİN TEMEL YAPISI VE TEK KANALLI SERVİS SİSTEMİNİN MATEMATİK ANALİZİ

Dr. Yük. Müh. Ender ŞENKAL

Herhangi bir servis sistemi, çoğu kere *müşteri* olarak adlandırılan bir grup elemanın ihtiyaç duyduğu servisi ortaya koymak amacını gütmektedir. Servise ihtiyaç gösteren müşterilerin meydana getirdiği *bekleme hatlarına*, başka bir deyişle *kuyruklara*, önceden tespit edilmiş disiplinlere göre servis yapılır. Servisten çıkan müşteriler bir müddet sonra tekrar servise ihtiyaç gösterip yeniden sıraya girebilecekleri gibi, bazen de sistemin bir sonraki istasyonunda servis görmek üzere ikinci bir bekleme hattı teşkil ederler.

Günlük yaşantımızda «bekleme hattı sistemleri» -kuyruk sistemleri- ile sık sık karşılaşılmaktadır. Bu sistemlerde bekleme hatları, bazen insanlar, bazen malzemeler ve bazen de taşıt araçları ve makinalar tarafından meydana getirilmektedir. Örneğin, kafeterya, sinema, tiyatro, klinik, otobüs durakları ve bilet gişelerindeki bekleme hatları insanlar tarafından; üretim sistemlerindeki iş istasyonlarında görülen bekleme hatları ise malzemeler ve iş parçaları tarafından teşkil edilmektedir. Arabalı vapur iskelelerinde ve geçişlerin paralı olduğu köprülerin başlarında da taşıt araçlarının meydana getirdiği bekleme hatları ile karşılaşılır.

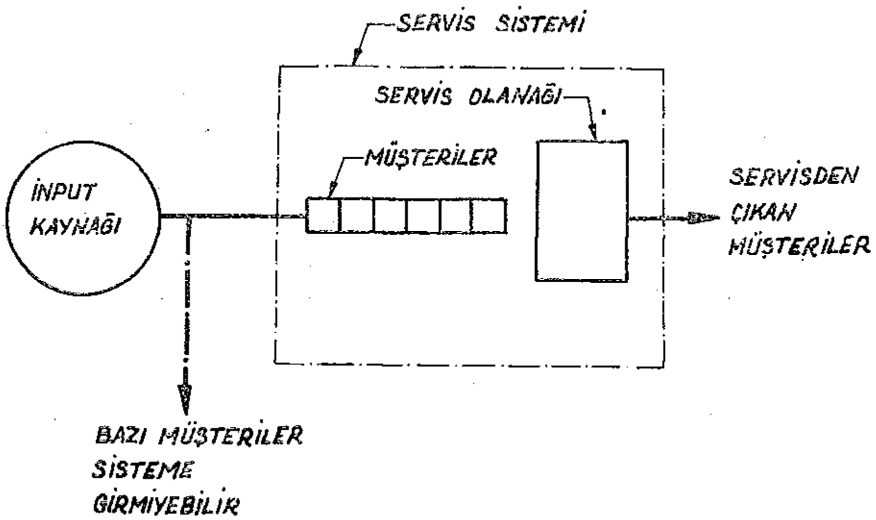
Bekleme hattı problemleri genellikle, ya servise ihtiyaç gösteren bir grup müşterinin servis için beklemesi veya servis yapma araçlarının boş kalarak müşteri beklemesi durumunda ortaya çıkmaktadır. Servise ihtiyaç gösteren toplam müşteri sayısı servis araçları sayısını aşacak olursa bazı müşteriler beklemek zorunda kalır; toplam servis aracı sayısı servise ihtiyaç gösteren müşteri sayısını aştığında da bir kısım servis araçları boş kalır. Dolayısı ile, bekleme hattı sistemi ile ilgili her türlü maliyet unsuru ve müşteri geliş mekanizması karakteristiklerinin ışığı altında toplam sistem maliyetini minimum yapan servis kapasitesini tayin etmek gerekecektir.

Bekleme hattı teorisi (kuyruk teorisi), müşterilerin gelme ve servis görme zamanlarının önceden kesin olarak tespit edilemediği, dolayısı ile müşterilerle servis araçları arasında tam bir uyuşmanın sağlanamadığı birçok duruma uygulanabilmektedir. Bekleme hattı teorisi, özellikle, servis sisteminde kullanılacak servis araçlarının sayısını ve tipini uygun bir şekilde tespit etmede kullanılır. İleride sisteme gelecek olan müşterilerin gelme ve servis görme zamanlarının her ikisinin de bilindiği durumlar ise bekleme hattı teorisinden başka metodlar tarafından ele alınır.

BEKLEME HATTI SİSTEMİ

Herhangi bir bekleme hattı esasında, bir veya daha çok sayıda *servis olanağına (servis aracına)* sahip bulunan bir *servis sistemi* etrafında teşekkül eder. Servise ihtiyaç gösteren bireyler çoğu kere *topluluk* adı verilen bir *input* kaynağından değişik zamanlarda servis sistemin gelirler ve bekleme hattı şartlarına göre sisteme girebilirler veya giremezler. Sisteme gelen bir müşteri servise girmeden önce bir bekleme hattı ile birleşir (bekleme hattı sıfır uzunlukta da olabilir) ve daha sonra *servis disiplini* adı verilen bir kurala göre servis araçlarından geçerek sistemi terkeder.

Herhangi bir beldeme hattı sistemi şematik olarak (Şekil 1) de gösterilmiştir.



Şekil 1. Bekleme hattı sistemi.

Bekleme hatları ile ilgili her türlü maliyet ve geliş mekanizması karakteristiklerini gözönüne alarak toplam sistem maliyetini minimum yapan servis kapasitesini tayin etmemiz gerekecektir. Servis kapasitesi, çoğu kere servis kanalı adı verilen servis olanaklarının servis hızını veya kanalların sayısını azaltıp çoğaltmak suretiyle değiştirilebilir.

Bir fabrikanın takımhanesine takım almak için gelen işçileri gözönüne alalım. İşçilere takımhaneden takım vermeyi bir servis olarak düşünecek olursak, fabrikanın atölyelerinde çalışan bütün işçileri servis için aday gösterebiliriz. İşte bu işçiler input kaynağını teşkil eder. İnput kaynağının ortaya koyduğu inputlar takıma ihtiyacıc olan işçiler (servise ihtiyaç gösteren müşteriler) olup bu işçiler zaman zaman input kaynağını terkederek servis sistemi ile birleşir. Ele alınan örnekte işçiler, servis olanaklarını dikkate almaksızın sisteme gelmektedir. Sisteme bir işçi geldiğinde meşgul olmıyan yani, başka bir işçiye servis yapmıyan bir tezgâhtar varsa işçi hemen servise girer. Fakat o anda bütün tezgâhtarlar meşgul ise gelen işçi daha önce sisteme gelip te servis için beklemekte olan işçilerin teşkil ettiği kuyruğun en sonuna girer (tezgâhtarların işçilere geliş sıralarına göre servis yaptığı kabul edilmiştir). Serbest kalan ilk tezgâhtar kuyruğun en başında yeralan işçiye servis yapar. Dolayısı ile, kuyruğa giren bir işçi önündeki bütün işçilere servis yapılıncaya kadar beklemek zorunda kalır. İşçi, kendisine lüzumlu olan takımları aldıktan sonra servis sistemini terkederek tekrar input kaynağı ile birleşir ve bir kere daha potansiyel müşteri olur.

Benzer şekilde, bir fabrikadaki makinaların tamir ve bakımı bir grup usta tarafından yapılıyorsa yine bir bekleme hattı teşekkülü olayı ile karşılaşılabilir. Bir makina bozulduğunda o anda serbest olan bir usta tarafından tamir edilir. Fakat bütün ustalar meşgul ise, tamir edilmesi gereken makina, bir ustanın gelip kendisini tamir etmesine kadar kuyrukta beklemek zorunda kalacaktır. Bu durumda tamir bakım ustaları servis olanakalarını, fabrikadaki bütün makinalar da input kaynağını teşkil ederler.

Gerçek hayatta daha birçok durumda bekleme hattı problemleri ile karşılaşmaktadır. Bunlardan bazıları (Tablo 1) de gösterilmiştir.

Problem	*İnput Kaynağı*	*Servis Olanakları*
Bir benzin istasyonuna gelen taşıt araçlarına servis yapacak işçilerin sayısının tayini.	Taşıt araçları	Benzin istasyonundaki işçiler
Bir klinikteki hastalara bakacak doktor sayısının tespiti	Hastalar	Doktorlar
Bir hava alanında uçak iniş-kalkış pisti sayısının tayini.	Uçaklar	İniş-kalkış pistleri
Bir oto-park sahasının büyüklüğünün tayini.	Otomobiller	Oto-park sahası
Bir motelin kapasitesinin tayini.	Motorlu araçlarla seyahat edenler	Müşteri ağırlama olanakları

Tablo 1.

Şimdi, *input kaynağı (topluluk)*, *bekleme hattı (kuyruk)* ve *servis olanakları (servis araçları)* olarak adlandırdığımız bekleme hattı sistemi elemanlarını teker teker ele alalım.

İNPUT KAYNAĞI (TOPLULUK) :

Herhangi bir input kaynağı;

1. Kaynak büyüklüğü,
2. Müşterilerin geliş zamanı dağılımı,
3. Müşterilerin davranışları ile karakterize edilir.

1 — *İnput kaynağının büyüklüğü.* Her ne kadar input kaynakları (topluluklar) genellikle sonlu sayıda elemandan müteşekkil ise de, bazı durumlarda toplulukların sonsuz sayıda elemandan meydana geldiği düşünülür. Topluluktan ayrılan elemanların sayısı ana topluluğun büyüklüğünde büyük bir değişiklik yaratmıyorsa, topluluktaki eleman sayısının sonsuz olduğu kabul edilmektedir. Buna karşılık; eğer topluluktan ayrılan elemanlar ana kütlenin büyüklüğünü etkileyecek olursa topluluğun sonsuz büyüklükte olduğu söylenir. Sonsuz bü-

yüklükteki kaynakların bulunduğu bekleme hattı sistemlerinin davranışını incelemede kullanılan modelleri formüle etmek sonlu büyüklükteki topluluklara ait modelleri formüle etmekten daha kolaydır. Pratikte, sistemdeki müşterilerin (kuyruktaki ve servisteki müşteriler) sayısı potansiyel müşterilerin teşkil ettiği topluluğun önemli bir kısmını teşkil etmiyorsa topluluk sonsuz büyüklüktedir denir.

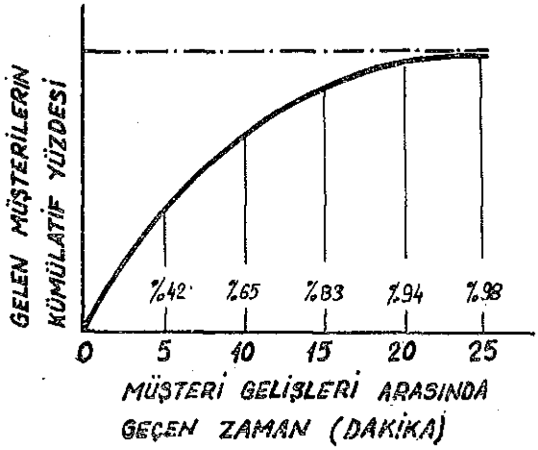
Bir şehrin dışındaki ana yol üzerinde kurulmuş bulunan bir modeli gözönüne alalım. Moteldeki toplam müşteri sayısı, toplam potansiyel müşterilerin teşkil ettiği topluluğun (ana yolda motorlu araçlarla seyahat eden kimseler) çok ufak kısmıdır. Dolayısı ile, müşterilerin motele sonsuz büyüklükteki bir topluluktan geldiğini söyliyebiliriz. Bunun gibi, bir köprüden geçen taşıt araçlarının, bir tiyatronun müşterilerinin ve telefon abonelerinin teşkil ettiği topluluklar da sonsuz büyüklüktedir denebilir. Bir fabrikadaki mevcut makinaları düşünecek olursak, bunların önemli bir kısmı herhangi bir anda bozularak tamire ihtiyaç gösterebilir. Dolayısı ile, bu durumda müşterilerin (bozulan makinalar) servis sistemine (tamir-bakım istasyonuna) sonlu büyüklükteki bir topluluktan geldiği düşünülür. Benzer şekilde, bir fabrikanın yemekhanesinde yemek yiyen işçilerin teşkil ettiği topluluk da sonlu büyüklüktedir.

2 — *Geliş zamanı dağılımları.* Birbiri arkasından gelen müşterilerin geliş zamanları arasında geçen süreler sabit olabileceği gibi bir dağılım da gösterebilmektedir. Bir klinikte hastalara o şekilde randevu verilebilir ki, hastalar kliniğe tespit edilmiş eşit zaman aralıklarında gelirler. Diğer taraftan, müşterilerin bir lokantaya gelişleri ise az çok tesadüfi bir dağılım gösterir ve bu gelişler önceden belirlenemez. Bununla beraber müşterilerin geliş zamanlarını tarif etmek mümkündür. Örneğin, bir lokantaya müşterilerin (Tablo 2) de belirtilen zaman aralıklarında geldiği tespit edilmiştir.

Müşteri gelişmeleri arasında geçen zaman	*Gelen müşterilerin yüzdesi*	*Gelen müşterilerin kümülatif yüzdesi*
10 — 0 — 4.99 dakika	42	42
5 — 9.99 »	23	65
10 — 14.99 »	18	83
15 — 19.99 »	11	94
20 — 24.99 »	4	98
25 dakika ve yukarısı	2	100

Tablo 2.

(Tablo 2) ye bakarak; örneğin, 15 dakikalık bir süre içinde her 100 müşteriden 83 nün geleceğini söyliyebiliriz. Tablodaki değerlerden yararlanarak (Şekil 2) deki geliş zamanı dağılımı çizilmiştir.



Şekil 2. Müşteri geliş zamanı dağılımı.

Müşteri gelişleri arasında geçen ortalama zaman ve ortalama geliş debisi (birim zamanda gelen müşteri sayısı) müşteri geliş zamanı dağılımından elde edilebilir. Pratikte karşılaşılan dağılımlardan çoğu;

1. Sabit zamanlı
2. Exponansiyel
3. Erlang
4. Hiperexponansiyel

gibi çok bilinen matematik dağılımlardan birisine uydurulabilmektedir. Exponansiyel dağılım hiperexponasiyel dağılımların olduğu kadar Erlang'ın da özel bir durumudur; halbuki sabit zamanlı dağılım Erlang'ın özel bir şeklidir.

Makinaların bozulması, bir lokantaya müşterilerin gelişleri gibi durumlarda geliş zamanı dağılımlarının exponansiyel olduğu tespit edilmiştir. Bununla beraber, exponansel dağılımdan dikkati çekecek kadar farklı bir geliş zamanı dağılımı gösteren bazı durumlar da mevcuttur. Bu nonexponansiyel dağılımların çoğuna Erlang ve hiperexponansiyel dağılımlar uydurulabilmektedir.

Exponansiyel geliş zamanı dağılımının «Poisson» gelişlerine sebep olduğunu göstermek mümkündür. Herhangi bir zaman aralığındaki toplam geliş sayısı daha önceki zaman aralığında gelmiş olan müşteri sayısından bağımsız ise, gelişler genellikle Poisson dağılımı gösterir.

3 — *Müşterilerin davranışı.* Servis sistemine gelen bir müşteri derhal servise giremezse şu üç davranıştan birinde bulunur:

1. Servis kanalına girinceye kadar sistemde bekler.

2. Servis için bir müddet bekler ve sonra sistemi terkeder.

3. Sisteme geldiğinde, servise girebilmesi için ne kadar beklemesi gerektiğini tahmin eder ve buna göre sistemi terk edip etmemek hususunda karar verir.

Birinci grupta yeralan müşterilere yani, servisten geçinceye kadar bekliyebilen müşterilere «sabırlı» müşteri adı verilir. Bir fabrikanın tamir-bakım atölyesine tamir edilmek üzere getirilen makinalar sabırlı müşterilerdir. Bunlar, tamir edilinceye kadar beklemek zorundadırlar.

İkinci ve üçüncü grupta yeralan müşterilere ise «sabırsız» müşteri adı verilir. Örnek olarak bir konfeksiyon mağazasına hazır elbise almak üzere gelen bir müşteriyi gözönüne alalım. Müşterinin geldiği anda bütün tezgâhtarlar diğer müşterilerle meşgul ise müşteri bir müddet bekliyebilir ve sonra kendisine halâ sıra gelmediği için sabrı tükenerek dükkândan ayrılabilir. Dükkâna gelen müşteri uzun süre beklemesi gerektiğini anlarsa hiç beklemeden hemen dükkânı terkedebilir de.

BEKLEME HATTI (KUYRUK) :

Sadece servis için beklemekte olan müşterileri işaret eden bekleme hatları servisteki müşterileri kapsamaz. Bekleme hatları müsaade edilebilir maksimum uzunlukları ile karakterize edilirler ve sonlu veya sonsuz büyüklükte olabilirler. Bazı durumlarda muayyen büyüklükteki bir bekleme hattının teşekkülüne müsaade edilir; yani hat belli bir büyüklüğü aşamaz. Bazen de kuyruk uzunluğu üzerinde hiçbir tahdit bulunmamaktadır.

Bir satış departmanına gelen müşteri siparişleri sayısı üzerinde hiçbir tahdit bahis konusu olmadığından, burada herhangi büyüklükte bir bekleme hattı teşekkül edebilir. Büyüklük üzerinde hiçbir limitin bulunmaması halinde müsaade edilebilir kuyruk uzunluğunun sonsuz olduğu söylenir.

Bir benzin istasyonuna gelen arabaların beklemesi için ayrılmış bulunan saha çoğu kere sınırlıdır. Bekleme sahasının tamamı arabalar tarafından işgal edilmişse, yeni gelen bir araba servis için başka bir yere gitmek mecburiyetinde kalır. Yani maksimum kuyruk büyüklüğü arabaların beklemesi için ayrılmış bulunan saha ile sınırlandırılmıştır. Diğer birçok durumda, sisteme yeni gelen bir müşteri kuyrukta beklemekte olan müşterilerin bulunduğunu görecek olursa bekleme sahasında boş yer olsa bile servis sistemine girmiyebilir. Bu gibi durumlarda kuyruk uzunluğu müşterilerin davranışları ile kontrol edilir. Örneğin, bir benzin istasyonundan benzin almak üzere gelen bir müşteri benzin pompalarının her iki tarafının da tamamen işgal edilmiş olduğunu görecek olursa (en azından birçok durumda) o istasyonda durmayıp bir başka istasyona gider. Müşterilerin bu tür davramşşmdan dolayı maksimum kuyruk uzunluğu benzin pompaları sayısına eşit olur. Kuyruk uzunluğu üzerinde bir limit bulunuyorsa müsaade edilen kuyruğun *sonlu* olduğu söylenir.

Bazı sonlu kuyruk uzunluklu sistemlerde müsaade edilen maksimum kuyruk uzunluğu sıfır büyüklüktedir; yani kuyruk teşekkülüne müsaade edilmez. Böyle bir duruma örnek olarak oto-park için ayrılmış bulunan sahaları gösterebiliriz. Bütün sahanın taşıt araçları tarafından işgal edilmesi halinde, park etmek için gelen müşteriler (taşıt araçları) beklemeden bir başka yere giderler.

Sonlu kuyruk uzunluklarının teşekkül ettiği durumların ilginç bir tarafı da, kuyruğun mücaade edilen maksimum uzunlukta olması halinde sisteme zaman zaman gelen bazı müşterilerin servis sistemine girememesi ve dolayısı ile bu müşterilerin kaybedilmeleridir. Kuyruk teorisi bu gibi durumlarda kaybedilen müşteriler meselesini de ele almaktadır.

SERVİS OLANAKLARI :

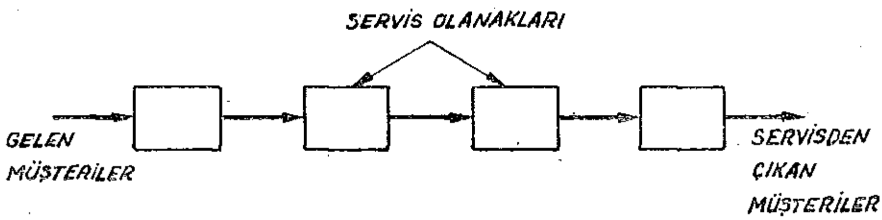
Servis olanakları, bekleme hattındaki müşterilerin ihtiyaç duyduğu faaliyetleri ortaya koymaktadır. Örnek olarak, geçişlerin paralı olduğu yerlerde geçiş paralarının toplanmasını, bir siparişin yerine getirilmesini, bir üretim faaliyetini, bozulan bir makinamn tamir edilmesini gösterebiliriz. Bütün bu sistemlerde servis yapıldıkça bekleme hattındaki eleman sayısında bir azalma meydana gelir.

Servis, hiçbir yardımcı alet kullanmıyan kimseler tarafından yapılabileceği gibi alet ve teçhizat kullanılan kimseler tarafından veya insan emeği olmadan sadece makinalar tarafından da yapılabilmektedir. Örneğin, vapur iskelelerinde jeton satan memurlar hiçbir yardımcı araç kullanmazken, bir oto tamir ustasının bozulan bir taşıt aracını alet kullanmadan tamir edebilmesi ise hemen hemen imkânsızdır.

Servis olanakları; (1) servis olanaklarının düzenlenmesi, (2) bunların servis yapma zamanı dağılımları ile karakterize edilir.

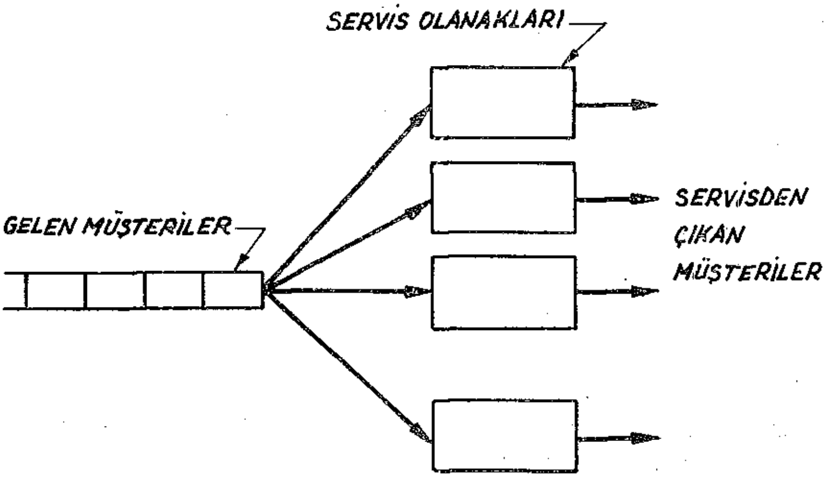
1 — *Servis olanaklarının düzenlenmesi.* Servis olanaklarına çoğu kere servis kanalı veya sedece kanal adı verilir ve bunlar; seri, paralel veya kısmen seri kısmen paralel olarak düzenlenir.

Seri bir düzenleme, (Şekil 3) te görüldüğü gibi, servis olanaklarının arka arkaya sıralanması ile teşkil edilir. Böyle bir sistemde bir müşterinin servisinin tamamlanması için müşterinin, seri olarak sıralanmış bulunan olanakların herbirinden sıra ile geçmesi gerekmektedir. Bununla beraber her bir servis olanağı birbirinden bağımsız disiplinlere göre de çalışabilir.



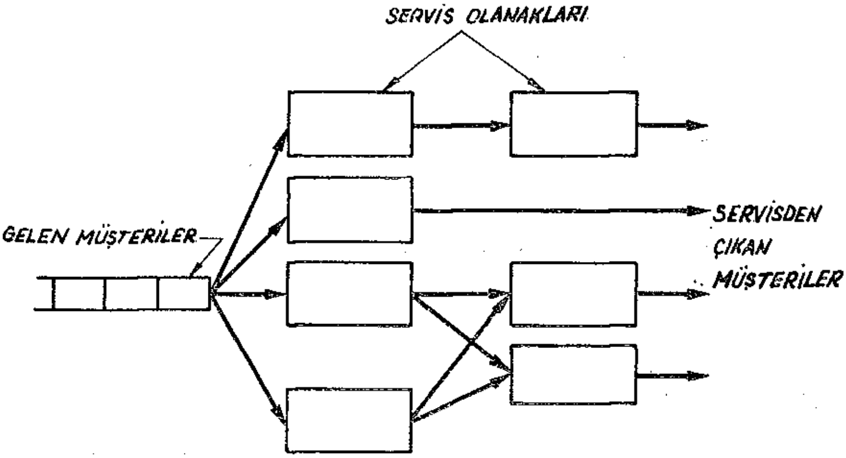
Şekil 3. Seri düzenlenmiş servis olanakları.

(Şekil 4) te gösterilen paralel düzenlemeli servis grubuna gelen bir müşteriye bu olanaklardan herhangi biri tarafından servis yapılabilir. Paralel düzenlemeli servis olanaklarına örnek olmak üzere taşıt araçlarının park etmesi için ayrılmış bulunan park yerlerini ve bir takımhanedeki tezgâhtarları gösterebiliriz. Herhangi bir park yeri otoparka park etmek üzere gelen bir taşıt aracına ayrılmıştır. Takımhaneye gelen bir işçiye de herhangi bir tezgâhtar tarafından servis yapılabilir.



Şekil 4. Paralel düzenlenmiş servis olanakları.

Seri-paralel düzenlemeli bir servis olanakları grubu (Şekil 5) te gösterilmiştir. Böyle bir sisteme örnek olmak üzere birçok yıkayıcı ve kurutucunun bulunduğu çamaşırhaneler gösterilebilir. Çamaşırlar önce yıkayıcılardan sonra da kurutuculardan geçer. Yıkayıcılar ve kurutucular olarak adlandırılan gruplarda yeralan makinalar kendi ara-



Şekil 5. Seri-paralel düzenlenmiş servis olanakları.

larında paralel olarak düzenlenmiş olmakla beraber iki grup seri olarak birleştirilmiştir.

2 — *Servis süresi dağılımları.* Servis sistemine gelen bir müşterinin servisine başlanılması ile bu servisin tamamlanması arasında geçen süreye müşterinin servis süresi adı verilmektedir. Servis süresi sabit olabileceği gibi farklı müşteriler için değişik dağılımlar da gösterebilmektedir. Servis süresi dağılımları da geliş zamanı dağılımları gibi;

1. Sabit zamanlı
2. Exponansiyel
3. Erlang
4. Hiperexponansiyel dağılılmardan biri şeklinde olabilmektedir.

Servis süresi dağılımlarından ortalama servis süresi ve ortalama servis debisi (birim zamanda tamamlanan servis sayısı) hesaplanabilir.

Sabit servis süreli duruma örnek olmak üzere bir şehrin iki noktası arasında hiç durmadan çalışan yeraltı trenini gösterebiliriz. Müşterilerin (yolcuların) gelişleri Poisson dağılımı göstermesine rağmen müşterilere servis yapma süresi (iki nokta arasında gidip gelirken trende geçen zaman) sabittir. Büyük mağazalarda kasaya para ödemek için bekliyen müşterilere kasiyerler tarafından yapılan servis eşit zaman aralıklarında olmayıp bir servis süresi dağılımı gösterir. Bunun gibi, bir takımhaneden takım almak için gelen işçilere tezgâhtarlar tarafından yapılan servis te bir dağılım ortaya koyar. Servis zamanı dağılımları birçok durumda exponansiyel olmakla beraber bazı durumlarda exponansiyelden dikkati çekecek kadar farklı bir dağılım gösterirler. Nonexponansiyel dağılımlardan çoğu Erlang veya hiperexponansiyel dağılımlar şekiinde olmaktadır.

Bir müşteri için başlatılmış bulunan servisin uzama ihtimali hernekadar servisin başlama zamanından bağımsız ise de, servis süreleri genel olarak exponansiyel bir dağılım gösterir.

SERVİS DİSİPLİNİ :

Servis sistemine gelen bir müşteri o anda boş olan herhangi bir servis olanağına hiç beklemeden hemen girer. Bununla beraber butün servis olanaklarının meşgul olduğu bir zamanda sisteme gelen müşteriler ise hemen servise giremeyip kuyrukta beklemek zorunda kalırlar ve daha sonra olanaklar serbest hale geldikçe belirli disiplinlee göre kuyruğu terkederek servise girerler. Bu disiplinlerden bazıları aşağıdaki gibidir:

1. Müşterilerin servis sistemine geliş sıraları esas alınarak servis yapılır. Yani sisteme ilk önce gelen müşteri birinci olarak, ikinci gelen ikinci olarak v.s. şeklinde servise girer. Bu disipline «ilk gelen önce servis görür» adı verilmektedir. Örneğin, hava alanlarında müşteri beklemekte olan taksiler bu şekilde servise konur yani, müşterilere tahsis edilirler.

2. Servise konacak müşteriler kuyruktan tesadüfi olarak seçilir. Buna «tesadüfi» servis disiplini adı verilir ve bu disipline, müşterilerin iyi düzenlenmemiş bir kuyrukta beklediği birçok durumda karşılaşılır.

3. Müşteriler öncelik esasına göre servise girerler. Serbest hale gelen servis olanağı en yüksek öncelikli müşteri ile servise başlar. Kuyrukta aynı öncelikli birden fazla müşteri bulunuyorsa, bunlar «ilk gelen önce servis görür» veya «tesadüfilik» esasına göre servise konur. Örneğin, bazı endüstrilerde işlerin bir kompüterde programlanması öncelik esasına göre yapılmaktadır. Bunun gibi, kadınlara ve çocuklara serviste önceliğin tanındığı bazı durumlar da vardır.

4. Sisteme en son gelen ilk önce servise girer. Bu disipline «son gelen önce servis görür» adı verilmektedir. Örneğin, yüksek bir binanın en üst katından boş olarak harekete geçen bir asansör aşağı katlara uğradıkça dolar ve en alt kata gelindiğinde asansöre en son binmiş olan kimse asansörü ilk önce terkeder.

BEKLEME HATTI SİSTEMLERİNİN SINIFLANDIRILMASI

Bir bekleme hattı prosesi aşağıdaki input ve servis-sistemi karakteristiklerinin herhangi bir kombinasyonu ile karakterize edilir.

İNPUT KARAKTERİSTİKLERİ :

İnput kaynağının büyüklüğü : Sonlu veya sonsuz.

Geliş süresi dağılımı : Sabit, exponansiyel, Erlang, hiperexponansiyel, v.s.

Müşterilerin davranışı : Sabırlı, sabırsız.

SERVİS SİSTEMİ KARAKTERİSTİKLER :

Kuyruk uzunluğu : Sonlu veya sonsuz.

Servis olanakları :

Servis olanaklarının düzenlenmesi : Seri, paralel, seri-paralel.

Servis süresi dağılımı : Sabit, exponansiyel, Erlang, hiperexponansiyel, v.s.

Servis disiplini : İlk gelen-önce servis görür, tesadüfi, öncelikli, son gelen-önce servis görür, v.s.

KARMAŞIK BEKLEME HATTI TEŞEKKÜLÜ OLAYLARI

İnput kaynağının, bekleme hattının ve servis olanaklarının birden fazla olması halinde yukarıda anlatılan durumlardan daha karmaşık olanları ile karşılaşılmaktadır. Herhangi bir bekleme hattı birçok kaynak tarafından besleniyorsa bunlar tek bir kaynak şeklinde ele alınabilir. Bununla beraber bu kaynağın geliş süresi dağılımı biraraya getirilen kaynaklardan herhangi birisinin dağılımının aynı olmıyabilir. Eğer, bir veya daha çok sayıda kaynak birkaç kuyruğu besliyorsa, bu takdirde, hangi müşterinin hangi kuyruğa gideceğini gösteren bir kuralın bulunması gerekir. Bu kural bir kere tespit edildikten sonra her kuyruk için çeşitli müşterilerin meydana getirdiği bir input kaynağının bulunduğu düşünülebilir, öyle ki; bu kaynaklardan herbiri sadece bir kuyruğu besler. Benzer şekilde, bir servis olanağını birden fazla kuyruk besliyorsa, kuyruklar birleştirilerek tek bir kuyruk gibi düşünülebilir. Birkaç servis olanağının birkaç kuyruk tarafından beslenmesi halinde, hangi olanağın hangi kuyruk tarafından beslemekte olduğunu gösteren bir kuralın mevcut olması gerekir. Eğer, bir kuyruğun müşterileri sadece belirli bir servis olanağına gidiyorsa gerçekte bu kuyruk tek bir servis olanağını beslemektedir. Bütün kuyruklardan gelen müşteriler mevcut bütün olanaklara gidebiliyorsa kuyruklar tek bir bileşik kuyruk gibi düşünülebilir.

BEKLEME HATTI SİSTEMİ KARAKTERİSTİKLERİ

Bekleme hattı sistemi ile ilgili kararları veren bir kimseyi genellikle, aşağıdaki bekleme hattı sistemi karakteristiklerinin dağılımları alâkadar etmektedir:

1. Kuyruk uzunluğu,
2. Servis sistemindeki müşteri sayısı,
3. Bir müşterinin bekleme süresi,
4. Bir müşterinin sistemde toplam kalma süresi,
5. Servis sisteminden birim zamanda çıkan müşteri sayısı,
6. Bir servis kanalının boş kalma süresi,
7. Bir müşterinin servis sisteminin dışında kalma süresi (sadece sonlu topluluklu sistemler için).

BEKLEME HATTI TEORİSİNİN BEKLEME HATTI SİSTEMLERİNİN PLANLANMASINDA UYGULANMASI

Bir bekleme hattı sisteminin planlanması ile servis sistemi için en uygun servis olanağı sayısının veya diğer herhangi bir input veya servis sistemi karakteristiğinin seçimini kastetmekteyiz. Herhangi bir bekleme hattı sistemi o şekilde planlanabilir ki;

1. Sistem karakteristikleri kabul edilebilir limitler içinde kalır,

2. Servis sisteminin çalışma maliyeti (veya sistemden elde edilen kâr) gibi bir kriter minimum (veya maksimum) yapılabilir,

3. Sistem karakteristikleri kabul edilebilir limitler içinde kalacak şekilde bir kriter minimum veya maksimum yapılabilir.

Herhangi bir sistemin çalışma maliyetini veya sistemden elde edilecek kârı hesaplarken, beklemenin sebep olduğu maliyeti de ihmal etmemek gerekir. Örneğin, işçilerin servis için beklemesi halinde bekleme maliyeti, prodüktif olarak çalışmadıkları (bekledikleri) zaman içinde işçilere ödenen ücretten ibarettir.

Bunun gibi, tezgâhtarların boş kalması halinde (müşteri beklerken) yani, prodüktif olarak çalışmadıkları zaman içinde kendilerine ücret ödenmesi dolayısı ile de bir bekleme maliyeti bahis konusu olmaktadır. Sistemle ilgili her türlü maliyet bilindiği takdirde bekleme hattı teknikleri yardımı ile «optimum» plân; yani, servis sistemi çalışma maliyetini minimum yapan veya sistemden elde edilen kârı maksimum yapan plân tespit edilebilir.

Herhangi bir bekleme hattı sistemi, bir geliş mekanizması, bir servis mekanizması, bekleme maliyeti ve servis olanağı maliyetinden müteşekkil bir ortamda bulunmaktadır. Geliş mekanizması ve servis mekanizması daha önce yeteri kadar incelenmiş bulunduğundan burada sadece bekleme maliyeti ve servis olanağı maliyeti üzerinde duracağız. Toplam sistem maliyeti servis sistemi kapasitesine bağlı olduğundan, servis kapasitesinin tayininde kullanılan modelleri kurmak suretiyle bekleme hattı sistemi ile ilgili maliyetlerin toplamı minimum kılınablir.

BEKLEME MALİYETİ :

Bekleme maliyeti bekleme hattına bir müşteri geldiği zaman veya sistemde bir müşteri servis görmekte iken söz konusu olmaktadır. Müşterinin birim zaman beklemesinin maliyeti müşterinin yapısı ile çok yakından ilgilidir. Örneğn, pahalı bir tezgâhın bekleme maliyeti ucuz bir tezgâhın bekleme maliyetinden daha fazladır.

Servis kapasitesini arttırmak suretiyle bekleme hattı kısaltılabilir ve böylece müşterilerin kuyrukta bekleme süresi de azaltılmış olur. Bekleme maliyeti kuyruktaki müşteri sayısına ve bekleme zamanına tabi olduğundan servis kapasitesini arttırmak suretiyle bekleme maliyeti düşürülebilir. Fakat buna karşılık, artan servis olanağı ile birlikte servis yapma maliyeti de yükselecektir. Dolayısı ile, servis kapasitesini arttırmakla servis maliyetinde meydana gelen artış, kapasitesinin arttırılmasıyla bekleme maliyetinde sağlanan düşüşten daha az olmalıdır.

SERVİS OLANAĞI MALİYETİ :

Servis sisteminin her kanalı bir sermaye yatırımını ve bir de işletme ve bakım masrafını gerektirmektedir. Ayrıca sistem için gerekli umumi masrafları ve personel ücretlerini de gözönüne almak gerekir. Servis kanalının servise ihtiyaç gösteren müşterilere servis yapma kapasitesi kanaldaki servis araçlarının bir fonksiyonudur. Örneğin, basit aletlere sahip bulunan bir tamir ustasının yapacağı servisle, daha mükemmel makina ve teçhizatla donatılmış bulunan bir tamir-bakım ekibinin yapacağı servis arasında büyük fark vardır.

Servis kapasitesinin arttırılması bekleme maliyetinde bir azalmaya sebep olacağından, servis kapasitesi, bütün sistemin bekleme ve servis maliyetleri toplamını minimum yapacak şekilde tayin edilmelidir.

BEKLEME HATTI PROBLEMLERİNİN FORMÜLE EDİLMESİ

Bekleme hattı teorisi (kuyruk teorisi), müşterilerin geliş ve servis görme sürelerinin önceden kesin olarak tespit edilemediği dolayısı ile, müşterilerle servis araçları arasında tam bir uyuşmanın sağlanamadığı birçok duruma uygulanabilir. Bekleme hattı teorisi özellikle, servis sisteminde kullanılacak servis araçlarının sayısını tespit etmede kullanılmaktadır.

Bekleme hattı teşekkülü hallerinde problem aşağıdaki iki sebeple teşekkül eder: 1 — Olanaklara çok fazla bir talep mevcuttur, bu takdirde bekleme zamanı fazladır, veya servis olanakları yetersizdir diyebiliriz. 2 — Olanaklar için mevcut talep çok azdır, bu takdirde çok fazla tesis vardır veya çok fazla olanaklar mevcuttur diyebiliriz.

Bekleme hattı sistemlerinin asıl amacı mevcut talebi minimum maliyetle karşılamaktır. Bunu yapmak için önce matematiksel bir model kurulur ve daha sonra uygun bir servis kapasitesini gerçekleyecek şekilde bu model çözülür. Matematiksel model en genel şekli ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$E = f(x_i, y_i)$$

Burada, E : Tesirlilik ölçüsü (minimum kılınacak toplam sistem maliyeti),

x_i : Servis kapasitesi değişkeni,

y_i : Müşteri geliş modeli, bekleme maliyeti ve servis olanağı maliyeti ile ilgili değişkendir.

TEK KANALLI SERVİS SİSTEMİNİN MATEMATİK ANALİZİ

Servis sistemimiz tek kanallı olsun. Geliş ve servis debilerinin her ikisinin de bağımsız Poisson dağılımlarından beklenen değerler olduğunu kabul edelim. Debiler, zamandan, kuyruk uzunluğundan ve bekleme hattının herhangi bir özelliğinden bağımsız ise bu kabuller geçerlidir. Birim zamanda beklenen müşteri sayısını veya başka bir deyişle ortalama giriş debisini λ (lamda) ile ve birim zamanda tamamlanan servis sayısını yani ortalama servis debisini de μ (mü) ile gösterelim. Birim zamanda gelen müşteri sayısı ve birim zamandaki servis sayısı birer Poisson dağılımı gösteriyorsa birbirini takip eden iki geliş arasında geçen süre $(1/\lambda)$ ve servis süresi $(1/\mu)$ birer exponansiyel dağılım ortaya koyarlar [1]. (μ nün λ dan büyük ve input kaynağının sonsuz büyüklükte olduğu kabul edilecektir.)

Sistemde n Adet Müşteri Bulunması İhtimali:

Kabul edilen şartlar altında t ve $t + \Delta t$ zaman aralığında bir müşterinin gelme ihtimali $\lambda\Delta t$ dir [2]. Benzer şekilde, t anında serviste olan bir müşterinin t den $t + \Delta t$ ye kadar geçen süre içinde servisten çıkma ihtimali ise $\mu\Delta t$ olur. Ayrıca aşağıdaki notasyonu kabul edelim:

n : t anında sistemdeki müşteri sayısı,

$P_n(t)$: t anında sistemde n müşteri bulunması ihtimali.

Çok küçük Δt zaman aralığında birden fazla müşterinin sisteme gelme ve servisten çıkma ihtimallerini ihmal edersek ve $n \geqslant 1$ ise, $t + \Delta t$ zamanında sistemde n müşteri bulunması ihtimali, aşağıdaki dört bağımsız bileşik probabilitenin toplamından ibarettir:

(1) t anında sistemde n müşterinin bulunması ihtimalinin, Δt zaman aralığında hiçbir müşterinin gelmemesi ihtimalinin ve Δt zaman aralığında hiçbir servisin tamamlanmaması ihtimalinin çarpımı: $[P_n(t)]\ [1 - \lambda(\Delta t)]\ [1 - \mu(\Delta t)]$

---

1) Matematik ispat C. W. CHURCMAN, R. L. ACKOFF ve E. L. ARNOFF, Introduction to Operations Research (New York: John Wiley and Sons, Inc.), 1957, sh. 398-400 de verilmiştir.

2) W. FELLER, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, (New York: John Wiley and Sons., Inc.) 1957, sh. 400'e bakınız.

(2) t anında sistemde $n+1$ müşterinin bulunması ihtimalinin, Δt zaman aralığında bir müşterinin servisinin tamamlanması ihtimalinin ve Δt zaman aralığında hiçbir müşterinin gelmemesi ihtimalinin çarpımı: $[P_{n+1}(t)]\ [\mu(\Delta t)]\ [1-\lambda(\Delta t)]$

(3) t anında sistemde $n-1$ müşterinin bulunması ihtimalinin, Δt zaman aralığında bir müşterinin gelmesi ihtimalinin ve Δt zaman aralığında hiçbir müşterinin servisten çıkmaması ihtimalinin çarpımı: $[P_{n-1}(t)]\ [(\Delta t)]\ [1-\mu(\Delta t)]$

(4) t anında sistemde n müşterinin bulunması ihtimalinin, Δt zaman aralığında bir müşterinin gelmesi ihtimalinin ve Δt zaman aralığında bir müşterinin servisten çıkması ihtimalinin çarpımı: $[P_n(t)]\ [\lambda(\Delta t)]\ [\mu(\Delta t)]$

$n \geqslant 1$ olmak üzere, $t+\Delta t$ anında sistemde n müşteri bulunması ihtimali yukarıdaki ihtimallerin toplamına eşittir.

$$P_n(t+\Delta t) = [P_n(t)]\ [1-\lambda(\Delta t)]\ [1-\mu(\Delta t)] + [P_{n+1}(t)]\ [\mu(\Delta t)]$$

$$[1-\lambda(\Delta t)] + [P_{n-1}(t)]\ [\lambda(\Delta t)]\ [1-\mu(\Delta t)] + [P_n(t)]\ [\lambda(\Delta t)]\ [\mu(\Delta t)]$$

Δt zaman aralığı çok ufak olduğundan $t+\Delta t$ anındaki ihtimallerin t anındaki ihtimallere eşit olduğunu düşünebiliriz. Yukarıdaki denklemde $P_n(t+\Delta t)$ yerine $P_n(t)$ yazmak ve Δt nin yüksek dereceli terimlerini ihmal etmek suretiyle aşağıdaki denklem elde edilir:

$$P_n(t) = P_n(t)\ [1-\lambda(\Delta t)-\mu(\Delta t)] + P_{n+1}(t)\ [\mu(\Delta t)] + P_{n-1}(t)\ [\lambda(\Delta t)]$$

$$P_{n+1}(t)\ [\mu(\Delta t)] = P_n(t)-P_n(t)\ [1-\lambda(\Delta t)-\mu(\Delta t)] - P_{n-1}(t)\ [\lambda(\Delta t)]$$

$$P_{n+1}(t) = P_n(t)\ \frac{\lambda+\mu}{\mu} - P_{n-1}(t)\ \frac{\lambda}{\mu} \qquad (1)$$

$t+\Delta t$ anında sistemde hiçbir müşterinin bulunmaması $(n=o)$ ihtimali aşağıdaki bağımsız iki probabilitenin toplamından ibarettir:

(1) t anında sistemde hiçbir müşterinin bulunmaması ihtimalinin Δt zamanında hiçbir müşterinin gelmemesi ihtimali ile çarpımı: $[P_o(t)]\ [1-\lambda(\Delta t)]$

(2) t anında sistemde bir müşterinin bulunması ihtimalinin, Δt zaman aralığında bir müşterinin servisten çıkması ihtimalinin ve

Δt zaman aralığında hiçbir gelişin olmaması ihtimalinin çarpımı: $[P_1(t)]\ [\mu(\Delta t)]\ [1-\lambda(\Delta t)]$

$t+\Delta t$ anında sistemde sıfır müşteri bulunması ihtimali yukarıdaki ihtimallerin toplamına eşittir.

$$P_o(t+\Delta t) = P_o(t)\ [1-\lambda(\Delta t)] + P_1(t)\ [\mu(\Delta t)]\ [1-\lambda(\Delta t)]$$

Δt zaman aralığı çok ufak olduğundan $t+\Delta t$ anındaki probabiliteler t anındaki probabilitelere eşit alınabilir. Yukarıdaki denklemde $P_n(t+\Delta t)$ yerine $P_n(t)$ yazarak ve Δt nin daha yüksek dereceli terimlerini ihmal ederek aşağıdaki denklem elde edilir:

$$P_o(t) = P_o(t) - P_o(t)\ [\lambda(\Delta t)] + P_1(t)\ [\mu(\Delta t)]$$

$$P_1(t) = P_o(t)\ \frac{\lambda}{\mu} \tag{2}$$

$P_n(t)$ nin zamandan bağımsız ve P_n'e eşit olduğunu kabul edecek olursak (1) ve (2) Denklemlerinden yararlanarak P_o, P_1, P_2 . . . . . ve P_n için aşağıdaki değerler elde edilir:

$P_o = P_o$

$P_1 = P_o\ (\frac{\lambda}{\mu})$ (2) Denkleminden.

$P_2 = P_o\ (\frac{\lambda}{\mu})^2$ (1) Denkleminde $n=1$ yazarak ve P_1 in değerini denklemde yerine koyarak.

$P_3 = P_o\ (\frac{\lambda}{\mu})^3$ (1) Denkleminde $n=2$ yazarak ve P_2 nin değerini denklemde yerine koyarak.

.
.
.
.

$P_n = P_o\ (\frac{\lambda}{\mu})^n$ (1) Denkleminde $n=n-1$ yazarak ve P_{n-1} in değerini denklemde yerine koyarak.

Yukarıdaki serinin sağ ve sol taraflarını toplamak suretiyle şu değeri buluruz:

$$\sum_{n=o}^{\infty} P_n = P_o \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Burada $\sum_{n=o}^{\infty} P_n = 1$ olması gerektiği ve denklemin sağ tarafının geometrik bir seri olduğu göz önünde bulundurulacak olursa, geometrik serinin toplamı formülü yardımı ile

$$\sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1-(\lambda/\mu)}$$

elde edilir. Dolayısı ile, $P_o \left[\frac{1}{1-(\lambda/\mu)}\right] = 1$ yazabiliriz ve buradan

$$P_o = 1 - \lambda/\mu$$

bulunur. P_o ın bu değerini P_n de yerine koyacak olursak P_n'i λ ve μ cinsinden ifade etmiş oluruz:

$$P_n = (1 - \frac{\mu}{\lambda}) \; (\frac{\mu}{\lambda})^n \qquad (3)$$

Bir örnek olmak üzere, herhangi bir kuyruğun ortalaması 1/10 müşteri/birim zaman olan bir Poisson gelişine maruz kaldığım ve servis süresinin dört birim zamanlık bir ortalama ile exponansiyel olarak dağıldığım düşünelim. Dolayısı ile servis debisi 1/4 = 0,25 müşteri/birim zaman olur. Her bir n değerine tekabül eden probabiliteler ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
P_0 &= (0.6)\,(0.4)^0 = 0.600 \\
P_1 &= (0.6)\,(0.4)^1 = 0.240 \\
P_2 &= (0.6)\,(0.4)^2 = 0.096 \\
P_3 &= (0.6)\,(0.4)^3 = 0.039 \\
P_4 &= (0.6)\,(0.4)^4 = 0.015 \\
P_5 &= (0.6)\,(0.4)^5 = 0.006 \\
P_6 &= (0.6)\,(0.4)^6 = 0.003 \\
P_7 &= (0.6)\,(0.4)^7 = 0.001
\end{aligned}$$

Sistemde n ünite bulunması ihtimalinin dağılımı (Şekil 6) da gösterilmiştir. Bekleme hattı sisteminin bazı önemli karakteristikleri bu dağılımdan elde edebiliriz. Örneğin, sistemde bir veya daha fazla müşteri bulunması ihtimali 0.4, sıfır müşteri bulunması ihtimali 0.6, dörtten fazla müşteri bulunması ihtimali 0.01 v.s. dir. Sistemde bulunacak müşteri sayısı üzerinde bir tahdidin bulunması halinde böyle bir enformasyon çok yararlı olmaktadır. Gelen topluluğu veya servis debisini veya her ikisini birden değiştirmek suretiyle sistemdeki müşteri sayısının belli bir değeri aşma ihtimali kontrol edilebilir.

Şekil 6. Sistemde n müşteri bulunması ihtimalinin dağılımı.

Sistemdeki Ortalama Müşteri Sayısı

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı $(\bar{n})$ aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\bar{n} = \sum_{n=o}^{\infty} n\mathrm{P}_n$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\sum_{n=o}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{\lambda}{\mu} + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \ldots\ldots\right] \quad (4)$$

$g = \frac{\lambda}{\mu} + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \ldots$ diyelim ve ifadenin her iki tarafını λ/μ ile çarpalım.

$$g\,(\frac{\lambda}{\mu}) = (\frac{\lambda}{\mu})^2 + 2(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \ldots\ldots$$

ikinci seriyi birinci seriden çıkartacak olursak

$$g\,(1 - \frac{\lambda}{\mu}) = \frac{\lambda}{\mu} + (\frac{\lambda}{\mu})^2 + (\frac{\lambda}{\mu})^3 + \ldots\ldots$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafına 1 ilâve edelim;

$$g\,(1 - \frac{\lambda}{\mu}) + 1 = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + (\frac{\lambda}{\mu})^2 + (\frac{\lambda}{\mu})^3 + \ldots$$

Sağ taraf geometrik bir seri olduğundan

$$g\,(1 - \frac{\lambda}{\mu}) + 1 = \frac{1}{1 - (\mu/\lambda)}$$

yazabiliriz ve buradan

$$g = \frac{\lambda/\mu}{[1 - (\mu/\lambda)]}$$

elde edilir. g nin bu değerini (4) Denkleminde yerine yazacak olursak

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu}\,[\frac{1}{1 - (\mu/\lambda}]$$

$$= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad (5)$$

$$\bar{n} = \frac{0.10}{0.25 - 0.10} = 0.67$$

olur.

Ortalama Bekleme Süresi

Bir müşterinin sistemde ortalama olarak kaldığı süre şu şekilde ifade edilir:

$$\bar{w} = \frac{\bar{n}}{\lambda}$$

$\bar{n}$ yerine (5) Denkleme ile yerilen değerini yazacak olursak

$$\bar{w} = \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{6}$$

olur. Yukarıdaki örnek için bir müşterinin sistemdeki ortalama bekleme süresi

$$\bar{w} = \frac{1}{0.25 - 0.10} = 6.67 \text{ birim zaman}$$

olur. Sistemde maksimum altı birim zaman kadar beklemeye müsaade edildiğini düşünelim. Bu durumda servis debisinin

$$\frac{1}{\mu - 0.1} = 6.0$$

$$\mu = 0.267 \text{ müşteri/birim zaman}$$

olması gerekir.

Toplam Sistem Maliyetini Minimum Yapan Servis Debisi

Birim zamanda beklenen toplam sistem maliyeti; birim zamanda beklenen bekleme maliyeti ile birim zamanda beklenen servis olanağı maliyetinin toplamından ibarettir:

$$\overline{T.S.M} = \overline{B.M} + \overline{S.M}$$

Birim zamanda beklenen bekleme maliyeti, bir müşterinin birim zaman beklemesinin maliyeti (M_B) ile birim zamanda sistemde bulunan ortalama müşteri sayısının çarpımına eşittir:

$$\overline{B.M} = M_B(\bar{n})$$

$$= \frac{M_B \lambda}{\mu - \lambda}$$

Birim zamanda beklenen servis maliyeti, bir müşteriye servis yapma maliyeti (M_S) ile, birim zamanda servis gören müşteri sayısının çarpımına eşittir:

$$\overline{T.S.M} = M_S(\mu)$$

Birim zamanda beklenen toplam sistem maliyeti yukarıdaki maliyot faktörlerinin toplamına eşittir:

$$\overline{T.S.M.} = \frac{M_B\,\lambda}{(\mu-\lambda)} + M_S(\mu) \qquad (7)$$

Toplam sistem maliyetini minimum yapan servis debisi, (7) Denkleminin μ ye göre diferansiyelinin alınmasıyla elde edilen ifadeyi sıfıra eşit yazarak bulunur:

$$\frac{d\,\overline{(T.S.M.)}}{d\mu} = -M_B\lambda(\mu-\lambda)^{-2} + M_S = O$$

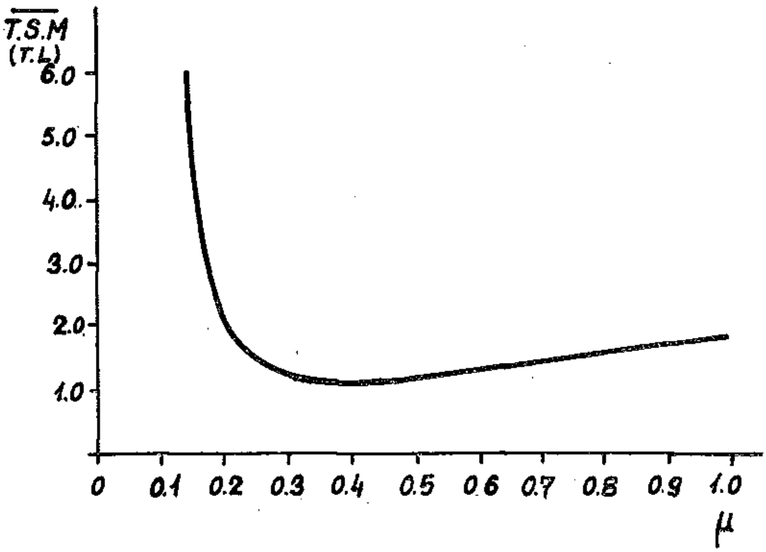
$$(\mu-\lambda)^2 M_S = \lambda M_B$$

$$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda M_B}{M_S}} \qquad (8)$$

Yukarıdaki modelin uygulamasına örnek olarak üzere Poisson gelişli, exponansiyel servis süreli bir durumu ele alalım. Gelişler arasında geçen ortalama zaman sekiz birim zaman, bekleme maliyeti 0.1 TL/ müşterixbirim zaman ve bir müşteriye servis yapmanın maliyeti ise 1.65 olsun. Değerleri (7) Denklemindeki yerlerine koyacak olursak birim zamanda beklenen toplam sistem maliyetini veren denklem şu şekli alır:

$$\overline{T.S.M.} = \frac{1.0 \text{ X } 0.125}{\mu - 0.125} + 1.65\,\mu$$

T.S.M ile μ arasındaki ilişkiyi veren bu denklemin grafiği aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 7. $\overline{\text{T.S.M}}$ nin μ ye göre değişimi.

$\overline{\text{T.S.M}}$ yi minimum yapan servis debisi (8) Denkleminden

$$\mu = 0.125 + \sqrt{\frac{0.125 \text{ X } 1.0}{1.65}}$$

$\mu = 0.125 + 0.275 = 0.400$ müşteri/birim zaman olarak bulunur. μ nün bu değerini $\overline{\text{T.S.M}}$ denkleminde yerine koyacak olursak minimum $\overline{\text{T.S.M}}$ için

$$\min (\overline{\text{T.S.M}}) = \frac{1.0 \text{ X } 0.125}{0.400 - 0.125} + 1.65 \text{ X } 0.400$$

$$= 1.115 \text{ TL/birim zaman}$$

değeri elde edilir.

Minimum $\overline{\text{T.S.M}}$ nin hesaplanması için yazılan FORTRAN Programları Ek'te verilmiştir.

M_B, M_S ve λ veridiğinde, Program-1 i kullanarak (8) ve (7) Denklemleri ile ifade edilen μ ve minimum $\overline{\text{T.S.M}}$ değerlerini hesaplayabiliriz.

Progranı-2 ise sadece (7) Denklemi için yazılmıştır. Bu programdan yararlanarak minimum $\overline{\text{T.S.M}}$ ni hesaplıyabilmek için μ ye değişik değerler vermek gerekecektir. Neticede, minimum $\overline{\text{T.S.M}}$ ve bu değere tekabül eden μ değeri elde edilmiş olur.

EK : PROGRAMLAR

Program-1:

```
C      MINIMUM T.S.M HESAPLANMASI
       READ 1,ALAMDA,CM,TM
       UM=ALAMDA+SQRTF(ALAMDA*CM/TM)
       TSM=(CM*ALAMDA)/(UM-ALAMDA)+TM*UM
       PRINT 2,UM,TSM
     1 FORMAT(3E10.3)
     2 FORMAT(8X,3HMU=F6.3,21H MUSTERI/BIRIM ZAMANI/5X,6HT.S.M=F6.3,4H T.
      1L)
       END
```

Neticeler

```
            MU=  .400 MUSTERI/BIRIM ZAMANI
         T.S.M= 1.114 T.L
```

Program-2 :

```
C      MINIMUM T.S.M HESAPLANMASI
       DIMENSION UM(10),BM(10),SM(10),TSM(10)
       PRINT 50
       READ 1,ALAMDA,CM,TM
       READ 2,(UM(I),I=1,10)
       DO 5 I=1,10
       SM(I)=TM*UM(I)
       IF(UM(I)-ALAMDA) 11,12,11
    12 PRINT 10,UM(I),SM(I)
       GO TO 5
    11 BM(I)=CM*ALAMDA/(UM(I)-ALAMDA)
       TSM(I)=BM(I)+SM(I)
     5 CONTINUE
       K=2
       TSMIN=TSM(2)
       DO 25 I=3,10
       IF(TSMIN-TSM(I)) 25,25,8
     8 TSMIN=TSM(I)
       K=I
    25 CONTINUE
       DO 30 I=2,10
       IF(K-I) 31,32,31
    31 PRINT 15,UM(I),BM(I),SM(I),TSM(I)
       GO TO 30
    32 PRINT 16,UM(I),BM(I),SM(I),TSM(I)
    30 CONTINUE
     1 FORMAT(3F10.3)
     2 FORMAT(8F10.3)
    10 FORMAT(28X,F6.3,6X,10HSONSUZ T.L,5X,F7.4,4H T.L,6X,10HSONSUZ T.L)
    15 FORMAT(28X,F6.3,3(5X,F7.4,4H T.L))
    16 FORMAT(28X,F6.3,2(5X,F7.4,4H T.L),5X,F7.4,13H T.L  MINIMUM)
    50 FORMAT(50X,18H MALIYET DEGERLERI//30X,2HMU,9X,3MB.M,13X,3MS.M,12X,
      15HT.S.M)
       END
```

Neticeler

MALIYET DEGERLERI

MU	B.M	S.M	T.S.M	
.125	SONSUZ T.L	.2062 T.L	SONSUZ T.L	
.150	5.0000 T.L	.2475 T.L	5.2475 T.L	
.200	1.6666 T.L	.3300 T.L	1.9966 T.L	
.250	1.0000 T.L	.4125 T.L	1.4125 T.L	
.300	.7142 T.L	.4950 T.L	1.2092 T.L	
.400	.4545 T.L	.6600 T.L	1.1145 T.L	MINIMUM
.500	.3333 T.L	.8250 T.L	1.1583 T.L	
.600	.2631 T.L	.9900 T.L	1.2531 T.L	
.800	.1851 T.L	1.3200 T.L	1.5051 T.L	
1.000	.1428 T.L	1.6500 T.L	1.7928 T.L	

KAYNAKLAR :

(1) BECKMANN, P., Elements of Applied Probality Theory, Harcourt, Brace and World, Inc., New York, 1967.

(2) FABRYCKY, W. J., TORGERSEN, P. E., Oporations Economy. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1966.

(3) GROFF, G. K., MUTH, J. F., Operations Management: Slected Readings, Richard D. Irwin Inc., Homewood, Illinois, 1969.

(4) HEIN, L. W., The Quantitative Approach to Managerial Decisions, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1967.

(5) HOULDEN, B. T., Some Techniques of Operational Reseach, The English Universities Press Ltd, London EC 4, 1962.

(6) KARAYALÇIN İ. İ., Harekât Araştırması Dersleri, İ.T.Ü. Kütüphanesi Sayı: 730, 1968.

(7) WAGNER, H. M., Principles of Operations Research With Applications to Managerial Decisions, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1969.