AĞIRLIKLI DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON YÖNTEMİ VE BUNUN OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNE UYGULANIŞI

Asis SERVET YILMAZ
İ.Ü. İşletme Fakültesi
Matematik Kürsüsü

SUMMARY

İn this article, weighted nonhnear regression method (the variance of ali distur bance of the variables in a regression equation is not constant) and its application to the optimization problems is presented.

This approach is an iterative linearization method in which the nonlinear equations (constraints) are linearized (using a Taylor series expansion) about the initial vectors of coefficients (parameters) and variables (dependet and independent). Then, weighted least squares is performed on this linear equations, generating a new vectors, The nonlinear equations are linearized about these vectors, weighted least squures is again performed to generate new vectors, This iterative process is repeated umtil the vectors do not change substantially after each new weighted least squares regression. The final linearization of the iterative process will provide some information. Such as; the values of coefficients and variables, their standart errors, and that the nonlinear regression fits the data.

On the other hand a computer programı is also pre pared for this purpose.

ÖZET

Bu makalede ağırlıklı doğrusal olmayan regresyon yöntemi ve bunun optimizasyon problemlerine uygulanışı verilmektedir.

Katsayılar ve değişkenlerin başlangıç değerlerine (vektörüne) göre doğrusal olmayan denklemler Taylor açılımı ile doğrusallaştırıldıktan sonra ağırlıklı en küçük kareler üe yeni vektör değerleri (katsayılar ve değişkenler) bulunmaktadır. Bu değerlere göre tekrar doğrusalllaştırma yapılmakta ve yine ağırlıklı en küçük karelerle katsayılar ve değişkenler bulunmaktadır. Giderek, belirli bir ilerasyondan sonra katsayılar ve değişkenler sabit kalmaktadır. Bu durumda katsayılar, değişkenler, ve onların standart hataları en iyi bir şekilde bılunmakta ve regresyon eğrisinin verileri çok iyi temsil ettiği görülmektedir.

1. GİRİŞ

Doğrusal Olmayan Regresyon Problemlerinde (bağımsız ve bağımlı) değişkenler örnekleme ile bulunduklarında veya gözlendiklerinde, örneklerin (gözlemlerin) varyanslarmm birbirine eşit olmamasının; Doğrusal Olmayan Regresyon Modelinde katsayılar (parametreler), parametrelerin standart hataları, değişkenlerin tahmini değerleri ve bu tahmini değerlerin standart hatalarının bulunmasında önemli rolü vardır. Parametrelerin modele üstel olarak girmediği durumlarda, bu rol pek önemsenmiyebilir. Ancak, katsayılar ve değişkenler modele üstel olarak giriyorsa, yani model katsayılar ve değişkenlerden dolayı doğrusalıktan sapıyorsa, farklı varyanslar birer ağırlık olarak gözönüne alınmalıdır. Bunun için gözlem çiftlerinden ve seçilen modelden yararlanarak, çözümde kullanılacak olan kısıtlarla bir optimizasyon problemi oluşturulmakta ve Taylor açılımı ile kısıtlar doğrusallaştırılarak, modelin parametreleri ve standart hataları, değişkenlerin tahmini değerleri ve standart hataları bulunmaktadır. Bu yöntem Doğrusal Olmayan Modellerin incelenmesinde özellikle başarılı olmaktadır.

2. VARYANS KAVRAMI

Ortaya çıkan bir iktisadi sorun; belirli bir matematiksel kalıba oturtulduktan sonra, bu kalıbın parametrelerinin ve bağımlı değişkeninin değerlerinin yeniden tahminini, değişkenler (bağımlı ve bağımsız değişkenler) arasında ne derece sıkı bir ilişki bulunduğunu saptamak ve tahmin edilen parametrelerin ve bağımlı değişkenin güvenilirliğinin ilgili hipotez testleri ile sınanması gerekir.

Matematiksel kalıp; X bağımsız, Y bağımlı, değişken ve B_1, $B_2, \cdots$, Bm parametreler olmak üzere

$$Y = f\ (X; B_1, B_2 \ldots, Bm)$$

şeklinde KESİN (DETERMİNİSTİK) BİR MODEL ise, parametreler bilindiğinde X in her değerine karşılık belli bir Y değeri bulunur. Fakat sorunla ilgili bazı tartışmalar yapilabilmek için, kurulan model, eldeki verilerle değerlendirileceğine göre, bu modelin bazı nedenlerden dolayı ortaya çıkan bir RASGELE değişkenden etkilendiğini göz önünde tutmak gerekir. Bu durumda h rasgele değişken olmak üzere, (1) deki model

$$Y = f\ (X;\ B_1, B_2, \ldots, Bm) + h \qquad (2)$$

şeklinde olasılık ilkelerine dayalı STOKASTİK BİR MODEL'e dönüşür. (1) veya (2) deki model değişkenler arasındaki bağlantıyı belirleyecek şekilde ne kadar iyi kurulursa kurulsun, parametrelerin, hiç bir zaman, olması gereken değerleri (ideal değerleri) bulunamayacaktır. Bundan dolayı, belirli bazı işlemler sonucunda parametreler için elde edilecek olan değerler, tahmini değerler olacağından, bu tahmini değerler $B^*_1 = h_1$ $B^*_2 = b_2, \ldots, B^*_m = b_m$ ile, h rasgele değişkeninin tahmini değeri de $h^* = e$ ile gösterilirse (2) deki model

$$Y = f\ (x;\ b_1, b_2, \cdots, b_m) + e \qquad (3)$$

şekline dönüşür. Buna REGRESYON MODELİ denir. Burada

f, Y nin tahmini değeri olan Y* yi verir. Böylece (3) e göre

$$Y = Y^* + e \text{ veya } e = Y - Y^*$$

olur.

Regresyon modellerindeki hata payı veya kalıntı (e) üzerinde iki varsayım vardır. Bunlardan birincisi SABİT VARYANS (HOMOSCEDASTICITY), ikincisi de DEĞİŞEN VARYANS (HETEROSCEDASTICITY)'dır.

Sabit Varyans:

Regresyon modelinin hata paylarının varyansları gözlemden gözleme değişmediği, yani sabit kaldığıdır. Eğer n gözlem yapılmışsa, k = 1,2, ⋯, n olmak üzere

$$\text{Var } (e_k) = E\ (e^2_k) = \sigma_e^2 = \text{sabit}$$

olup, bu hatalara veya Y gözlemlerine ait VARYANS MATRİSİ; I, nxn lik bir matris ve e, nx1 lik bir vektör olmak üzere

$$V_y = V_e = V = E\,(_e\ _e{}^t) = \sigma_e^2\ I \qquad (5)$$

şeklindedir.

Not: '*' tahmin işareti olarak kullanılmıştır.

Değişen Varyans:

Her gözleme ait hata payının varyansı birbirinden farklıdır.

Bazı ekonometrik araştırmalarda, sabit varyans, gerçeği tam olarak yansıtamaz ve bunun için değişen varyans kullanılır. Özellikle YATAY KESİT (Cross-Section) çalışmalarında[1] değişkenlerin aldıkları değerler çok yaygın olduğu durumlarda, hata terimlerinin varyansları farklı büyüklükte ortaya çıkarlar. Örneğin, tüketim fonksiyonu çalışmalarında, tüketim harcamaları için yatay kesit verileri kullanıldığında, hata terimlerinde varyansın değişmesi beklenebilir. Çünki, marjinal tüketim eğilimine ait hata payı varyansının o grubun gelirine bağlı olarak değiştiği görülmüştür.

Değişen varyans kavramı ekonometrik modellerin en büyük sorunlarından biri olup, ortaya çıkardığı sonuçlar ve bunları düzeltme yolları önemli konulardan biridir.

Zaman serilerine ait makro-modelierde sabit varyans, özellikle kesit verileri (aile bütçeleri gibi) ne dayalı mikro-modellerde ise değişen varyans kavramı yer almaktadır.

Değişen varyans kavramı altında; hata paylarının varyansları birbirinden tamamen farklı olabilir, bazıları eşit olabilir veya hepsi eşit olabilir. Bu özelliklerden hangisi olursa olsun, mutlaka gerekli değerler elde edilirken işlemlere sokulurlar. Eğer e_k hata payına göre var $(e_k) = \sigma_k^2$ biliniyorsa, varyans matrisi

$$V_y = V_e = E\,(_e\, _e{}') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & O \\ & \sigma_2^2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ O & & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(1) J.Johnston, Econometric Methods, New York: Mc Graw—Hill, 1963, s. 214

Yukarıdaki sabit ve değişen varyans varsayımlarında gözlemlerin kendi aralarında bağımsız olduğu yani kovaryanslarının sıfır olduğu kabul edilmektedir.

3. YÖNTEMİN AMACI

Değişen varyans kavramı sadece bağımlı değişkenden dolayı oluşan hata payları üzerinde düşünülmekte ve buna göre klâsik Regresyon Analizi sonuçları elde edilmektedir. Acaba bu kavram bağımsız değişkenle de ilişkilendirilemez mi? Ayrıca, yine Klâsik Regresyon Analizinde sadece bağımlı değişkenin gerçek (gözlenen) değeri ile, modelden bulunan tahmini değeri ele alınmaktadır. Acaba bağımsız değişkenin gözlenen değerlerinden şüphe edilemez mi? Yeniden modelden bağımsız değişkenin tahmini değeri bulunamaz mı?

İşte, yukarıdaki sorulara yanıt aramak için, ileride sunulacak olan yöntem geliştirilmiştir.

En Küçük Kareler Yöntemi ile yapılan bir tahminin en iyi EĞİLİMSİZ[2] bir tahmin olabilmesi için EN DÜŞÜK VARYANS'a (veya standart hatâya) sahip olması gerekir. Gözlemlerin veya oluşturdukları hataların varyanslarının bir birinden farklı olması, tahminin en düşük varyansa sahip olmasını engellemektedir. Fakat ne parametrelerin ne de gözlemlerin tahmini değerlerinin hesaplanışında, değişen varyans bir engel olarak görülmemektedir. Yani varyanslar ne olursa olsun tahmini değerler hep aynı çıkacaktır.

Değişen varyanslı bir model, sabit varyanslı bir model olarak ele alınırsa, üzerinde çalışılan örnek kütlenin bağlı bulunduğu ana kütlenin parametreleri hakkında yanlış bilgi elde edilir. Dolayısıyle bunlar için güven aralıkları hatalı hesaplanmış olur.

4. YÖNTEMİN DAYANDIĞI MODELİN ÖZELLİKLERİ

Ekonomik gerçekler çoğu zaman doğrusal modellere fırsat vermemekte, doğrusallık niteliğinden şu veya bu şekilde sap-

---

(2) Parametrenin tahmin edilen değeri ile gerçek değeri arasındaki farka, parametrenin «Eğilim Derecesi» denir.

malar görülmektedir. Doğrusallıktan sapma matematiksel biçim olarak şu şekillerde ortaya çıkmaktadır:

a) Bağımsız değişkenden dolayı doğrusallıktan sapma.

$$Y = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots,$$

$$Y = b_1 + b_2 / \log X,$$

$$Y = b_1 + b_2 x + b_3 \operatorname{Sin} by\ x.$$

gibi.

b) Bağımlı değişkenden dolayı doğrusallıktan sapma:

$$Y^2 = b_1 + b_2 x,$$
$$\operatorname{Log} Y = b_1 + b^2 x$$

gibi.

c) Her iki değişkenden dolayı doğrusallıktan sapma:

$$\operatorname{Log} Y = b_1 + b_2 \log x,$$
$$X^2 + Y^2 + b_1 = 0$$

gibi.

d) Parametrelerden dolayı doğrusallıktan sapma:

$$Y = b_1 x^{b2}$$

$$Y = b_1 . b_2^{x}$$

gibi

e) Hem değişkenler ve hem de parametrelerden dolayı doğrusallıktan sapma:

$$(X - b_1)^2 + (Y - b_2)^2 - b_3^2 = 0$$

gibi.

Doğrusal Olmayan (Eğrisel) Model'lerde parametrelerin en iyi bir biçimde tahmin edilebilmesi için çeşitli yaklaşım yöntemleri vardır.[3] Bunlardan biri Doğrusal Olmayan Model'in

(3) Bu yöntemler için bkz.: 1) N. Draper and H. Smith, Applied Regresyon Analysis, New York: Willey, 1966, s. 270-272. 2) R. S. Pindyck and D.L. Rubinfleld, Econometric Models and Econometric Forecast New York: Mc Graw—Hill, 1976, s. 227—230. 3) Lawrance R. Klein, A Texbook of Econometrics, London: Prentice—hall, 1974, s. 126—127.

TAYLOR açılımı kullanılarak doğrusallaştırılmasıdır. Burada sunulacak olan yöntem, bu doğrusallaştırmadan esinlenerek genişletilmiştir. Böylece, ele alınan modelin; hem değişkenler ve hem de parametreler dolayısıyle doğrusallıktan sapması ve aynı zamanda her iki değişkenin oluşturduğu hatalardan dolayı ortaya çıkan değişen varyansın tesiri altında kaldığı göz önüne alınarak genel anlamda en iyi sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır.

5. YÖNTEMİN TANITIMI

Ele alınacak Doğrusal Olmayan bir Regresyon Modeli her iki değişkenden ve üstelik parametrelerden dolayı da doğrusallıktan sapmış ise, bu kapalı olarak

$$f\,(Y^*, X\,;\, b_1, b_2, \ldots, b_m) = 0 \qquad (7)$$

şeklinde yazılabilir. Burada bağımsız değişkenin (X in) gözlem değerleri için bazı hatalar (sapmalar) olabileceği de düşünülerek, (7) deki ifade yerine, X in tahmini değeri olan X^* kullanılarak,

$$f\,(Y^*, X^*\,;\, b_1, b_2, \ldots, b_m) = 0 \qquad (7/a)$$

ele alınacaktır. Burada görülüyorki, artık her iki değişkende tahmini olarak modele girmektedir. Acaba böyle bir model ne zaman ortaya çıkar? Bu modelin ortaya çıkışı için şu şekilde bir problem verilebilir:

Firma — Tüketici Problemi:

Aralarında u km. uzaklığı bulunan iki F_1 ve F_2 firmaları aynı mamulü imal ederek satmaktadırlar. Pazar sınırlarının ne olabileceğini öğrenmek isteyen F_1 firmasının Yöneylem Araştırması Bölümü'nün müdürü şu bilgileri elde etmiştir. Firmalar mamüllerinin fiatım, oluşturdukları sabit fiat ile tüketici merkeze olan uzaklıklarının belli bir katını toplayarak bulmaktadırlar. Bu sonuca, tüketim merkezlerinin her iki firmaya uzaklıkları ve o tüketim merkezlerindeki fiatlar belirlendiğinden, bir regresyon analizi ile varılmıştır, ve böylece her iki firma için fiat doğruları

$P_1^* = b_{11} + b_{21} d_1,$

$P_2^* = b_{12} + b_{22} d_2$

şeklinde bulunmuştur. Bu iki doğruya göre sabit fiatlar (b_{11} ile b_{12}) hemen hemen birbirine eşit çıkmıştır. Fakat, uzaklığın fiatlara marjınal katkıları (b_{21} ile b_{22}) birbirinden farklıdır. Bunun için, uzaklığın, fiatların saptanmasındaki rolü önemli olduğu düşünülmektedir.

Tüketicinin, mamulü tercih edebilmesi için pek çok faktör olmasına rağmen, bunların en önemlisi fiatın düşük olmasıdır. O halde bu faktörün tesiri altında pazar sınırı, her iki firmanın fiatlarının eşit ($p_1 = p_2$) olduğu bölgeden geçecektir. Bunun için tüketiciler, pazar sınırı yakınında analitik olarak T (X,Y) ve firmaların bulundukları mevkiler de F_1 (— u/2, o) F_2 (u/2,o) şeklinde konumlandırılmıştır. Analitik bir çözüm sonucunda da, $b_{11} = b_{12}$ koşulu altında pazar sınırının bir daire olduğu ortaya çıkmıştır.

X :	— 1	0	5	10	14	13	13	9	2	0
Y :	0	6	9	7	4	1	— 5	— 7	— 6	— 4

Bu belirlemelerde bir hata olabileceği düşünülmüş ve bu hatalar sübjektif yargılarla X ler için $\sigma^2_x = 0.10$, Y ler için $\sigma_y^2 = 0.20$ kabul edilmiştir. Böylece, bu bilgiler ışığı altında pazar sınırı olan daire denkleminin belirtilmesi düşünülmektedir. Bunun sonuçları örnek 1 de verilmiştir.

Daire denklemi, merkezi (b_1, b_2) ve yarıçapı b_3 olmak üzere

$$f\ (Y^*, X^*\ ; b_1, b_2, b_3) = (X^* - b_1)^2 + (Y^* - b_2)^2 - b_3^2 = o \qquad (8)$$

şeklindedir. Bu denklem her (X_i, Y_i) gözlem çiftinin tahmini değerleri olan (X_i^*, Y_i^*) çifti için gerçekleneceğinden, (8) den

$$f_i\ (y_i^*,\ x_i\ ; b_1, b_2, b_3) = (x_i^* - b_1)^{12} + (y_i^* - b_2)^2 - b_3^2 = o$$

$$= x_i^{*2} + y_i^{*2} - 2\,b_1\,x_i^* - 2\,b_2\,y_i^* + b_2^2 - b_3^2 = o \qquad (8.a)$$

denklemine geçilebilir. Burada i = 1,2,..., n olmak üzere (x_i^*, y_i^*) çifti referans noktası, iki firmadan geçen X ekseni ile, iki firmanın ortasından geçen Y eksenine göre oluşan değerlerdir.

(8.a) daki denklemi daha basite indirgemek için.

$Y_{2i-1} = X_i^*$ ve $Y_{2i} = Y_i^*$

dönüşümü yapılırsa, (8.a) dan, $j = 1,2,\cdots,n, n+1, \ldots, 2n$ olmak üzere

$$f\ (Y_j\,;\,b_1,\,b_2,\,b_3) = Y_{2i-1}^2 - Y_{2i}^2 - 2b_1 Y_{2i-1} -$$

$$2b_2\, Y_{2i} + b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = o \qquad (9)$$

elde edilir. Bu denklem 2n Yj değerini ve 3 parametre (b_1, b_2, b_3) yi içermektedir. Buna göre, bir Doğrusal olmayan modelin 2n Y_j değeri ve m parametre içerdiği düşünülürse, bu model

$$f_i\ (y_j\,;\,b_1\,,\,b_2\,,\,\cdots,\,b_m) = o\ ,\ i = 1,2,\cdots,n \qquad (10)$$
$$j = 1,\,2,\cdots,\,2n$$

şeklinde genel bir biçimde yazılabilir. Eğer Y 2 n elemanlı ve b de m elemanlı bir vektör olarak alınırsa, (10) daki denklem kısaca

$$f_i\,(Y,\,b) = o\ ,\ i = 1,\,2,\,\cdots,\,n \qquad (10.a)$$

şeklinde yazılabilir.

Y ve b ye bağlı f_i fonksiyonu, sadece birinci kısmi türevler gözönüne alınarak TAYLOR SERİSİ'ne açılabilir. Açılımın yapılabilmesi için, belli başlangıç değerlerine gerek duyulacağından, bunlar

$$Y^{o\prime} = (Y_{01}\,,\,Y_{02}\,,\,\cdots,\,Y_{02n})$$
$$b^{o\prime} = (b_{01},\,b_{02}\,,\,\cdots,\,b_{0n})$$

olarak alınırsa, bu açılım

$$f_i\ (y,b) \approx f_i\ (y^o,\,b^o) + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_i\,(y^o,b^o)}{\partial h_l}\,(b_l - b_{0l})$$

$$+ \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial f_i\ (y^o\ b^o)}{\partial y_k}\ (y_k - y_{0k}) = o \qquad (11)$$

şeklinde ortaya çıkar.

Yukarıdaki açılımı daha basit olarak yazabilmek için şu ifadeler verilmiş olsun:

$$a_{il} = \partial f_i\ (y^\circ, b^\circ / Y_{0^2n})\ , \partial b_l \quad , \quad l = 1,2,\ldots m$$

$$d_{ik} = \partial f_i\ (y^\circ, b^\circ)\ /\ \partial y_k, \quad k = 1,2,\ldots, 2n$$

$$A = [\ a_{il}]\ _{nxm}\ ,\ D = [\ d_{ik}\ ]\ _{nx^2n}\ ,$$

$$c_i = f_i\ (y^\circ, b^\circ)\ ,\ c^t = (c_1, c_2, \cdots, c_n),$$

$$p = b - b^\circ = \begin{bmatrix} b_1 - b_{01} \\ b_2 - b_{02} \\ b_m - b_{0m} \end{bmatrix} \quad , \quad e = Y - Y^\circ = \begin{bmatrix} y_1 - y_{01} \\ y_2 - y_{02} \\ y_{2n} - y_{02n} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Böylece (11) kısaca

$$c + Ap + De = o \tag{13}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemdeki vektör ve matrislerin boyutları sırasıyle şu şekildedir:

$$n \times 1 + (nxm)\ (mx1) + (nx2n)\ (2nx1) = nx1$$

$$nx1 + nx1 \qquad + nx1 \qquad = nx1\ .$$

MAKSİMUM BENZERLİK ve/veya EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ'lerine göre hataların karelerinin toplamı sabit varyans varsayımı altında,

$$z\ (e) = e'e$$

ve değişen varyans varsayımı altında, (6) daki varyans matrisine göre

$$G_y = G_e = V_y^{-1} = V_e^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & & & & O \\ & 1/\sigma_2^2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ O & & & & 1/\sigma^2_{2n} \end{bmatrix}$$

matrisi bir AĞIRLIK MATRİSİ olmak üzere

$$z\ (e) = e^t\ G_e\ e = (y - y)^t\ G_y\ (y - y) \tag{14}$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} e_j^2 / \sigma_j^2$$

dir.

(14) deki eşitlikten görülüyor ki, z (e) toplamı bağımlı ve bağımsız değişkenin gerçek değerleri ile tahmini değerleri arasındaki farkların (kalıntıların, hataların) varyanslarma bölümlerinin karelerinin toplamıdır. Bu AĞIRLIKLI REGRESYON koşuludur.

z (e) toplamı ne kadar küçük olursa, seçilen modelin eğrisi, veri çiftlerini (gözlemleri) o oranda temsil eder. Bundan dolayı z (e) değerini MİNİMİZE edecek (EN KÜÇÜK tutacak) koşulları ortaya sermek için, burada bir matematiksel OPTİMİZASYON Surecini başlatmak gerekir. Öyle ki, bu süreçte hem bir AMAÇ FONKSİYONU ve hemde uyulması gereken KISIT'lar olsun. Bunun için

$$z\,(e) = e^t G_e e$$

bir amaç fonksiyonu ve

$$c + Ap + De = o$$

da bir KISIT denklemi olarak ele alınacaktır. Dikkat edilirse bu kısıt denklemi doğrusal kısıtlardan meydana gelmektedir. Oysa (10.a) daki denklem bir kısıt denklemi olmasına rağmen, eğrisel kısıtlardan meydana gelmiştir. Yani, Taylor açılımı ile bu eğrisel kısıtlar doğrusallaştırılmıştır.

Böylece r, elemanları $r_1, r_2, \cdots, r_n$ olan bir LAGRANGE ÇARPANI vektörü olmak üzere, LAGRANGE FONKSİYONU

$$L\,(p,r,e) = e^t G_e e + 2r^t\,(c+Ap+De) \qquad (15)$$

şeklinde kurulabilir.

Lagrange fonksiyonunun e ye göre birinci kısmi türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse, buradan

$$e = -\,G_e^{-1}\,D^t r \qquad (16)$$

bulunur. Bu (13) de yerine konulursa, büradan da

$$r = (D\,G_e\,D^t)^{-1}\,(c+Ap) \qquad (17)$$

bulunur.

İşlemlerin kolaylaştırılması açısından

$$Q = (D\,G_e^{-1}\,D^t)^{-1}$$

alınırsa, (17) deki eşitlik.

$$r = Q\,(c + Ap) \tag{17.a}$$

şekline dönüşür. Bu değer (16) da kullanılırsa

$$e = -\,G_e^{-1}\;D^t\,Q\,(c + Ap) \tag{18}$$

bulunur.

(15) deki Lagrange fonksiyonunun P ye göre birinci kısmi türevi alınır, sıfıra eşitlenir ve bu eşitliğin her iki yanının transpozesi alınırsa

$$2\,A^t\,r = o \tag{19}$$

bulunur.

(17.a) daki eşitliğin her iki yanı $2\,A^t$ ile çarpılır ve (19) daki eşitlik gözönüne alınırsa, buradan

$$p = -\,(A^t\,Q\,A)^{-1}\,A^t\,Qc \tag{20}$$

bulunur. Bu değer (17.a) ve (18) deki eşitliklerde kullanılırsa sırasıyle

$$r = -\,Q\,A\,(A^t\,QA)^{-1}\,A^tQ\,c + Qc \qquad (21$$

ve

$$e = G_e^{-1}\;D^t\,Q\,A\,(A^t\,Q\,A)^{-1}\,A^tQ\,c - G_e\,D^tQc \tag{22}$$

bulunur.

Başlangıç koşullarına göre bulunan (20) deki p değeri p^1 ve (12) ye göre bulunacak olan b değeri de b^1 olarak alınırsa, (12) den

$$p^1 = b^1 - b^0 \quad \text{veya} \quad b^1 = p^1 + b^0$$

olur. Aynı şekilde (22) deki e değeri e^1 ve (12) ye göre bulunacak olan Y (Y*) değeri de Y^1 olarak alınırsa, (12) den

$$e^1 = Y^1 - Y^0 \quad \text{veya} \quad Y^1 = Y^0$$

olur. Böylece başlangıçta bilinen b^0 ve y^0 değerleri sırasıyle, parametrelerin ve değişkenlerin başlangıç tahmini değerleridir. Bu tahmini değerler birinci adımdan b^1 ve y^1 olarak bulunmuştur. Bu değerler tekrar başlangıç değerleri olarak (11) de kullanılır (20) ve (22) ye göre p ve e değerleri bulunursa, ikinci adımda

$$b^2 = p^2 + b^1 \text{ ve } y^2 = e^2 + y^1$$

bulunur. Nihayet giderek, herhangi bir s inci adımda;

$$b^s = p^s + b^{s-1} \text{ ve } y^s = e^s + y^{s-1}$$

bulunur. Belirli bir tolerans dahilinde,

$$b^s \approx b^{s-1} \text{ ve } y^s \approx y^{s-1}$$

olunca işlemlere son verilir. Bu durumda z (e) en küçük değerine ulaşmış ve hem parametre, hem de değişkenlerin değeri en iyi bir şekilde hesaplanmış olur.

Son adımda parametrelerin ve değişkenlerin ne kadarlık bir standart hata taşıdığını anlamak için, bunların varyans - kovaryans matrislerini bulmak gerekir. Bunlar sırasiyle, uzun işlemlerden sonra,

$$K_e = (A^tQA)^{-1}$$

ve

$$K_y = K_e = G_e - G_e D^t \overset{-1}{Q} D G_e + G_e D^t Q A (A^tQA)^{-1} A^tQD\overset{-1}{G_e} \quad (24)$$

olarak bulunur.

K_b matrisinin ana köşegeni üzerindeki değerlerin kare kökü parametrelerin standart hatalarını, K_y matrisinin ana köşegeni üzerindeki değerlerin kare kökü de değişkenlerin, yani sırasıyle, $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ nin standart hatalarını verir

6. YÖNTEM İÇİN KULLANILACAK OLAN BİLGİSAYAR PROGRAMI.

Ana programda veri olarak kullanılacak olan değerler sadece N (Gözlem sayısı), NK (Parametre şayısı), IS (Varyans matrisini birim matrisine dönüştürme kodu IS=1 ise ağırlıklar kullanılmaz, IS=2 ise ağırlıklar kullanılır.), NKOV (Parametrelerin ve değişkenlerin varyans-kovaryans matrislerini yazma kodu. NKOV = 1 ise varyans-kovaryans matrisleri yazılır. NKOV=2 ise varyans-kovaryans matrisleri yazılmaz) dir.

Gözlem değerleri problemin cinsine göre subroutine YVECY ve POLKUR'da data olarak verilmektedir.

```
I V 36 ON-FO-479 3-8    MAINPGM    DATE 30/07/81    TIME
      REAL *8 X, Y, YTAH, SSAP, EHATA, CB, B, BI, C, A, D,
      CY, CYTAH, 1GD, A1, A2, A3, A4, A5, SHATB, SHATY,
      HATA, ZEO, ZE, TEST
       DIMENSION X (100), Y (100), YTAH (100), SSAP (100),
      EHATA (100), CB (100), B (10), BI (10), C (100),
       A (1000), D (1000), CY (1000), CYTAH (1000),
      2GD (1000), A1 (1000), A2 (1000), A3 (1000), A4 (1000),
      A5 (1000)
      3, SHATB (10), SHATY (100), HATA (100)
       DIMENSION KONU (80), ISIM (80)
       DATA X, Y, YTAH, SSAP, EHATA, CB, B, BI, C, A, D,
      CY, CYTAH,
      1GD, A1, A2, A3, A4, A5, SHATB, SHATY, HATA/
      2100*0., 100*0., 100*0., 100*0., 100*0., 100*0.,
      310*0., 10*0., 100*0., 1000*0., 1000*0., 1000*0.,
      41000*0., 1000*0., 1000*0., 1000* 0., 1000*0., 1000*., 1000*0.,
      510*0.,. 100*0., 100*0./
       DATA NR, NW/1,3/
       DATA N, NK, IS, NKOV/15, 10, 1, 2/
       READ (NR, 20) KONU, ISIM
   20  FORMAT (80 A1,/,80 A1)
       WRITE (NW, 10) KONU, ISIM
   10  FORMAT (T5, 80A1,/T5, 80 A1)
       CALL YVECY (Y, CY, N, IS)
       GO TO (110, 120), NKOV
  110  WRITE (NW, 115)
  115  FORMAT (/T4, «GÖZLEMLERİN KOVARYANS MAT-
       RİSİ:»)
       CALL MTRYAZ (CY, N, N)
  120  NSON=O
  130  NSON=NSON+1
C.........
       CALL MTRTRA (Y, YTAH, N, 1)
       NADM=O
```

```
140  NADM=NADM+1
     CALL POLKUR (B, YTAH, A, D, C, NK, N, M, NSON,
     NADM, MAKADM)
     NF=M—NK
     IF (NSON) 150, 160, 160
150  STOP
C.........
1606 IF (NADM-1) 200, 170, 200
170  IF (NK) 180, 200, 180
180  WRITE (NW, 190) NSON, M, NK, NF
190  FORMAT (/T9, 12, «. SONUÇ»,/ 4x,25 («*»),/5x, «DENK-
     LEM SAYISI=» 5x, I3,/5x, «KATSAYI SAYISI=», 5x,
     13,/5x, «SERBESTLİK DERECESİ=», 13, 1 5x, «KATSA-
     YILARIN BAŞLANGIÇ DEĞERLERİ:»)
     CALL MTRYAZ (B, 1, NK)
C.........
200  CALL MTRCAR (CY, D, A1, N, N, M, 2)
     CALL MTRCAR (D, A1, A2, M, N, M, 1)
     CALL MTRTER (A2, GD, M)
     IF (NK) 220, 210, 220
210  CALL MTRTRA (C, A2, M, 1)
     GO TO 230
C.........
220  CALL MTRCAR (GD, A, A1, M, M, NK, 1)
     CALL MTRCAR (A, A1, A2, NK, M, NK, 3)
     CALL MTRTER (A2, CB, NK)
C.........
     CALL MTRCAR (CB, A, A2, NK, NK, M, 2)
     CALL MTRCAR (A2, GD, A1, NK, M, M, 1)
     CALL MTRCAR (A1, C, BI, NK, M, 1, 1)
     CALL MTRCSK (BI, BI, 1., NK, 1)
C.........
     CALL MTRTOP (B, BI, B, NK, 1)
```

```
C.........
      CALL MTRCAR (A, BI, A1, M, NK, 1, 1)
      CALL MTRTOP (A1, C, A2, M, 1)
230   CALL MTRCAR (GD, A2, A1, M, M, 1, 1)
IV 360-FO-479 3-8          MAINPGM          DATE     30/07/81
      CALL MTRCAR (D, A1, A2, N, M, 1, 3)
      CALL MTRCAR (CY, A2, EHATA, N, N, 1, 1)
C.........
      CALL MTRFAR (YTAH, EHATA, YTAH, N, 1)
C.........
      CALL MTRFAR (YTAH, Y, HATA, N, 1)
C.........
      CALL MTRCAR (D, HATA, A1, M, N, 1, 1)
    CALL MTRCAR (GD, A1, A2, M, M, 1, 1)
      CALL MTRCAR (A1, A2, ZE, 1, M, 1, 3)
C.........
      WRITE (NW, 240) NSON, NADM, ZE
240   FORMAT (/T4, 12, «.SONUÇ», 2x, I2, «.ADIM», 2x
     1 «AMAÇ FONKSİYONU=», G14.5)
      IF (NK) 250, 270, 250
250   WRITE (NW, 260)
260   FORMAT (/T4, «KATSAYILAR:»)
      CALL MTRYAZ (B, 1, NK)
270   WRITE (NW, 280)
280   FORMAT (/T4, «TAHMİNİ Y DEĞERLERİ:»)
      CALL MTRYAZ (YTAH, 1, N)
C.........
      IF (NADM-MAKADM) 290, 360, 360
```

```
C........
 290  IF (NADM-1) 300, 300, 310
 300  ZEO=ZE
      GO TO 140
C........
 310  TEST= (ZE-ZEO)/ZEO
      IF (DABS (TEST) -1. E-3) 380, 320, 320
 320  ZEO=ZE
C........
      IF (NADM-3) 140, 330, 330
 330  IF (TEST-1. E-2) 140, 140, 340
 340  WRITE (NW, 350) NSON
 350  FORMAT (/5x,12, «.SONUÇ İÇİN YÖNTEM IRAKSAK-
      TIR»)
      GO TO 130
 360  WRITE (NW, 370)
 370  FORMAT (/T4, «MAKSİMUM ADIMA ULAŞILMIŞTIR»)
C........
 380  CALL MTRCAR (D, CY, A1, M, N, N, 1)
      CALL MTRCAR (GD, A1, A2, M, M, N, 1)
      IF (NK) 390, 400, 390
 390  CALL MTRCAR (A, A2, A3, NK, M, N, 3)
      CALL MTRCAR (CB, A3, A5, NK, NK, N, 1)
      CALL MTRCAR (A3, A5, A4, N, NK, N, 3)
 400  CALL MTRCAR (A1, A2, A5, N, M, N, 3)
      CALL MTRFAR (CY, A5, A1, N, N)
      IF (NK) 420, 410, 420
 410  CALL MTRTRA (A1, CYTAH, N, N)
      GO TO 460
 420  CALL MTRTOP (A1, A4, CYTAH, N, N)
```

```
C........
      GO TO (425, 435), NKOV
425   WRITE (NW, 430)
430   FORMAT (/T4, «KATSAYILARIN KOVARYANŞ MAT-
      RİSİ:»)
      CALL MTRYAZ (CB, NK, NK)
435   WRITE (NW, 440)
440   FORMAT (/5x, «KATSAYILARIN STANDART HATALA-
      RI:»)
      DO 450 I=1, NK
      I 1= (I—1)*NK+I
450   SHATB (I) = DSQRT (CB (I I) )
      CALL MTRYAZ (SHATB, 1, NK)
      GO TO (460, 475), NKOV
V 360 — FO—479 3—8        MAINPGM        DATE 30/07/81
460   WRITE (NW, 470)
470   FORMAT (/T4, «TAHMİNİ Y LERİN KOVARYANS MAT-
      RİSİ:»)
      CALL MTRYAZ (CYTAH, N, N)
475   WRITE (NW, 480)
480   FORMAT (/5x, «TAHMİNİ Y LERİN STANDART HA-
      TALARI:»)
      DO 490 I=1, N
      I1 = ( I—1)* N+I
490   SHATY (I) = DSQRT (CYTAH (1 1) )
      CALL MTRYAZ (SHATY, 1, N)
    GO TO 130
      END
```

PROGRAMDA KULLANILAN SUBROUTINE'LER

1. **İki matrisin çarpımı bulmak.**

```
      SUBROUTINE MTRCAR (A, B, R, M, L, N, IT)
C........
      IT = 1 ISE A*B=R, IT=2 ISE A*B (TRANSPOZE) =R
C........
      IT = 3 İSE A (TRANSPOZE) * B=R
```

```
      REAL *8 A, B, R
      DIMENSION A (1), B (1), R (1)
      DO 80 I=1, M
      DO 80 J=1, N
      K1 = (I — 1)*N+J
      R (K1) = 0.
    DO 70 IL = 1,L
      GO TO (10, 30, 50), IT
10    K2 = (I — 1)*L+IL
20    K3 = (IL — 1)*N+J
      GO TO 70
30    K2 = (I — 1)*L+IL
40    K3 = (J—I)*L+İL
      GO TO 70
50    K2 = (IL — 1)*M+I
60    K3 = (IL — 1)*N+J
70    R (K1) = R (K1) + A (K2)*B (K3)
80    CONTINUE
      RETURN
      END
```

2. İki matrisin toplamını bulmak.

```
      SUBROUTINE MTRTOP (A, B, R, M, N)
C...... A (M, N) + B (M, N) = R (M,;)
      REAL *8 A, R, B
    DIMENSION A (1), R (1), B (1)
      MN = M*N
      DO 10 K = 1, MN
10    R (K) = A (K) + B (K)
      RETURN
      END
```

3. İki matrisin farkım bulmak.

```
      SUBROUTINE MTRFAR (A, B, R, M, N)
      REAL *8 A, B, R
      DIMENSION A (I), B (1), R (1)
      MN = M*N
      DO 10 K = 1, MN
10    R (K) = A (K) — B (K)
      RETURN
      END
```

4. Bir matrisin transpozesini bulmak.

```
      SUBROUTINE MTRTRP (A, R, M, N)
C.....REAL *8 A, R
      DIMENSION A (1), R (1)
      DO 10 I = 1, M
      DO 10 J = 1, N
      KN = (I — 1)* N+J
      KM = (J—1) * M+I
10    R (KM) = R (KN)
      RETURN
      END
```

5. Bir matrisi başka bir matrise transfer etmek.

```
      SUBROUTINE MTRTRA (A, R, M, N)
C.....A (M, N) = R (M, N)
      REAL *8 A, R
      DIMENSION A (1), R (1)
      MN = M*N
      DO 10 J=1, MN
10    R (J) = A (J)
      RETURN
      END
```

6. Bir matrisi bir skalerle çarpmak.

```
      SUBROUTINE MTRCSK (A, R, S, M, N)
C...... S (SIKALER) * A (M, N) = R (M, N)
      REAL *8 A,R
      DIMENSION A ( 1 ), R( 1 )
      MN = M*N
      DO 10 J = 1, MN
   10 R (J) = S* A (J)
      RETURN
      END
```

7. Birim matrisi oluşturmak.

```
      SUBRUTINE MTRBRM (R, N)
C...... I (N, N) = R (N, N)
      REAL *8 R
      DIMENSION R (1)
      DO 30 I = 1, N
      DO 30 J = 1, N
      K = (I — 1) *N+J
      IF (I—J) 10, 20, 10
   10 R (K) = O.
      GO TO 30
   20 R (K) = 1.
   30 CONTINUE
      RETURN
      END
```

8. Bir matrisi yazmak.

```
      SUBROUTINE MTRYAZ (A, M, N)
      REAL *8 A
      DIMENSION A (1)
```

```
      NWX = 3
      DO 10 I=1, M
      KB = (I — 1) * N+1
      KS = KB + N — 1
10    WRITE (NWX, 20) (A (K), K = KB, KS)
20    FORMAT (5x, 5F12.6)
      RETURN
      END
```

9. Bir matrisin tersini bulmak.

```
      SUBROUTINE MTRTER (A, R, N)
      REAL *8 A,R
      DIMENSION A (1), R (1)
      CALL MTRBRM (R,N)
      CALL MTRCOZ (A, R, N, N)
      RETURN
      END
```

10. Bir matrisin tersini bulmada yardımcı subroutine.

```
      SUBROUTINE MTRCOZ (A, B, N, M)
      REAL *8 A, B, AMAKS
      DIMENSION A (1), B (1)
      KMAKS = N—1
      DO 90 K=1, KMAKS
      AMAKS = O.
      J2 = K
      DO 20 J1 = K, N
      IK = (J1 — 1) *N+K
      IF (DABS (AMAKS) - DABS (A (IK))) 10, 20, 20
10    AMAKS = A (IK)
      J2 = J1
20    CONTINUE
C........
      IF (J2 — K) 30, 60, 30
```

```
30    DO 40 J = K, N
      J3 = (K — ) *N+J
      J4 = (J2 — ) *N+J
      S = (J3)
      A (J3) = A (J4)

40    A (J4) = S
      DO 50 J=1, M
      J3 = (K—1) *M+J
      J4 = (J2 — 1) *M+J
      S = B (J3)
      B (J3) = B (J4)

50    B (J4) = S

C.........

60    KA1 = K+1
      KK = (K—1) *N+K
      DO 80 I = KA1, N
      IK = (I — 1) *N+K
      DO 70 J = KA1, N
      IJ = (I — 1) *+J
      KJ = (K — 1) *N+J

70    A (IJ) = A (IJ) — A (KJ) *A (IK)/A(KK)
      DO 80 J = 1, M
      IJ = (I — 1 *M+J
      KJ = (K — 1) *M+J

80    B (IJ) = B (IJ) — B (KJ) *A (IK)/A(KK)

90    CONTINUE

C.........

      NN=N*N
      DO 110 J = 1,M
      NJ = (N — 1 *M=J
      B (NJ) = 8 (NJ)/A(NN)
      NE1 = N — 1
      IF (NE1) 110, 110, 95
```

```
95   DO 110 I1 = 1, NE1
     I = N — I1
     IJ = (I — 1) *M+J
     II = (I — 1) *N+I
     I A1 = I + 1
    DO 100 L = I A1, N
     IL = (I — 1) *N+L
     LJ = (L — 1) *M+J
100  B (IJ) = B (IJ) — A (IL) *B (LJ)
     B (IJ) = B (IJ)/A (II)
110  CONTINUE
     RETURN
     END
```

10. Varyans matrisini bulmak (Değişen varyans için).

a) $Y^* = b_1 + b_2 X + b_3 X^2 + \ldots$

polinomu örnek 2 için yazılmıştır.

GOZLMY (N) dizisi Y gözlemlerini,

SIGMA (N) dizisi σ_i^2 değerlerini içerir.

IS = 2 ise varyans matrisi birim matris olarak alınr.

```
     SUBROUTINE YVECY (Y, CY, N, IS)
     REAL *8 Y, CY, GOZLMY, SIGMA
     DIMENSION Y (1), CY (1)
     DIMENSON GOZLMY (15), SIGMA (15)
     DATA GOZLMY/60., 40., 30., 30., 50., 70., 90., 90., 80., 70.,
     100., *140., 160., 180., 240./
     DATA SIGMA/15*0.1/
     CALL MTRTRA (GOZLMY, Y, 15, 1)
     GO TO (20, 10), IS
10   CALL MTRBRM (CY,N)
     GO TO 40
20   DO 30 K = 1, N
     KN = (K — 1) *N+K
     CY (KN) = SIGMA (K)
30   CONTINUE
```

```
40 RETURN
   END
```

b) Örnek 1 de kullanılan $(X^* - b_1)^2 + (Y^* - b_2)^2 - b_3^2 = O$ daire denklemi için yazılmıştır.

GOZLXY (N),, X_1, Y_1, X_2, Y_2, ... şeklinde X ve Y gözlemlerini içermektedir.

```
   SUBROUTINE YVECY (Y, CY, N, IS)
   REAL *8 Y, CY, GOZLXY, SIGMA
   DIMENSION Y (1), CY (1)
   DIMENSION GOZLXY (20), SIGMA (20)
   DATA GOZLXY/—1., 0., 0., 6., 5., 9., 10., 7., 14., 4., 13., 1.,
   *13., —5., 9., —7., 2., —6., 0., —4./
   DATA SIGMA/0.1, 0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.2 0.1,
   0.2, *0.1, 0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.2/
   CALL MTRTRA (GOZLXY, Y, 20,1)
   GO TO (20, 10), IS
10 CALLMTRBRM (CY, N)
   GO TO 40
20 DO 30 K = 1, N
   KN = (K — 1) *N+K
   CY (KN) = SIGMA (K)
30 CONTINUE
40 RETURN
   END
```

11. Örnek 2 de kullanılan $Y^* = b_1 + b_2 X +, b_3 X^2 +$ polinomu için A matrisini ve c vektörünü bulmak, ve parametreleri başlangıçta sıfırlamak.

```
SUBROUTINE POLKUR (B, Y, A, D, C, NK, N, M,
NSON, NADM, MAKADM)
REAL *8 B, Y, A, D, C, X.
DIMENSION B (1), Y (1), A (1), D (1), C (1)
DIMENSION X (15
DATA X/10., 20., 30., 40., 50., 60., 70., 80., 90., 100., 110.,
120., 130., 140., 150./
IF (NSON—6) 10, 10, 70
```

```
10   MAKADM = 1
     M = N
     CALL MTRBRM (D,M)
     NK = NSON
     DO 20 J = 1, NK
20   B (J) = O.
     DO 50 I = 1, N
     IK = (1 — 1) *NK
     A (IK + 1) = — 1.
     C (I) = Y (I)
     IF (NK—1) 50, 50, 30
30   DO 40 K = 2, NK
40   A (IK+K) = — X (I) ** (K — 1)
50   CONTINUE
60   RETURN
70   NSON = — 1
     GO TO 60
     END
```

12. Örnek 1 de kullanılan $(X^*—b_1)^2 + (Y^*—b_2)^2 — b_3^3 = o$ daire denklemi için A, D matrislerini ve c vektörlerini bulmak ve parametrelerin başlangıç değerlerini belirlemek.

```
     SUBROUTINE POLKUR (B, W, A, D, C, NK, N, M, NSON,
     NADM, MAKADM)
     REAL *8 B,W,A,D,C,YCK
     DIMENSION B (1), W (1), A (1), D (1), C (1)
     IF (NSON—1) 120, 10, 120
10   IF NADM—1) 30, 20, 30
20   NK = 3
     M = N/2
     MAKADM = 10
C.........
     YAKLAŞIM DEĞERLERİ
     B (1) = 2. DO
```

```
      B (2) = 2.DO
      YCK = (B(1) — W (1)) **2+ (B (2) — W (2)**2
      B (3) = DSORT (YCK)
C.........
      A, D, C, MATRİSLERİNİ HESAPLA
   30 DO 40 I = 1, M
      IJ = (I—1) *3+1
      A (IJ) = —2.*W (2*1—1) + 2. *B (1)
      A (IJ+1) = — 2.*W (2*I) + 2. *B (2)
   40 A (IJ + 2) = — 2. *B (3)
      DO 90 I = 1, M
      DO 90 J=1,N
      IJ = (I — 1) *N+J
      1 F (2* 1 — J) 60, 65, 60
   65 D (IJ) = 2. *W (J) — 2. *B (1)
      GO TO 90
   60 IF (2* I — J) 80, 70, 80
   70 D (IJ) = 2.*W (J) — 2. *B (2)
      GO TO 90
   80 D (IJ) = O.
   90 CONTINUE
      DO 100 I = 1,M
  100 C (I) = W (2* I—1)**2+W (2*I) **2 — 2. *B (1)*W
      (2*I — 1) — 2. *B (2)*W (2*I) 1 + B (1)**2+B (2)**
      2 — B (3)**2
  110 RETURN
    NSON = —1
  120 NSON = —1
      GO TO 110
      END
```

ÖRNEK I. Sonuçlar:

*** FİRMA - TÜKETİCİ PROBLEMİ ***

*** SERVET YILMAZ (DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON) ***

1. SONUÇ

DENKLEM SAYISI =	10
KATSAYI SAYISI =	3
SERBESTLİK DERECESİ =	7

KATSAYILARIN BAŞLANGIÇ DEĞERLERİ:

2.000000	2.000000	3.605551

1. SONUÇ 1. ADIM AMAÇ FONKSİYONU = 22.574
KATSAYILAR:

6.411904	0.871315	7.336730

TAHMİNİ Y DEĞERLERİ

—1.436096	—0.582262	0.188088	5.247646	4.895922
8.514301	10.358229	7.447787	13.734613	3.911538
13.770231	0.859958	12.567268	—4.449250	8.867114
—6.658294	2.000000	—5.622804	0.055230	—3.668620

1. SONUÇ 2. ADIM AMAÇ FONKSİYONU = 30.468
KATSAYILAR:

6.364332	0.738387	7.794921

TAHMİNİ Y DEĞERLERİ

—1.315713	—0.537449	0.103611	5.366448	4.908967
8.382760	10.350565	7.422243	13.540692	3.750514
14.158134	0.858760	12.410390	—4.178045	8.862961
—6.632819	1.977505	—5.689028	0.002888	—3.743385

1. SONUÇ 3. ADIM AMAÇ FONKSİYONU = 30.281
KATSAYILAR:

6.367537	0.736914	7.785608

TAHMİNİ Y DEĞERLERİ:

—1.313201	—0.536615	0.105662	5.363416	4.908789
8.384638	10.351654	7.425894	13.544797	3.753960

14.152195	0.858577	12.408350	—4.174729	8.863782
—6.637633	1.976417	—5.692215	0.001555	—3.745263

1. SONUÇ 4. ADIM AMAÇ FONKSİYONU = 30.277
KATSAYILAR :

6.367539	0.736913	7.785605

TAHMİNİ Y DEĞERLERİ :

—1.313201	—0.536615	0.105662	5.363417	4.908789
8.384637	10.351654	7.425894	13.544798	3.753961
14.152193	0.858577	12.408351	—4.174729	8.863782
—6.637665	1.976417	—5.692215	0.001556	—3.745262

KATSAYILARIN STANDART HATALARI :

0.150097	0.192506	0.117709

TAHMİNİ Y LERİN STANDART HATALARI :

0.197937	0.439672	0.262771	0.363891	0.314182
0.241265	0.298142	0.273345	0.221464	0.404951
0.186412	0.447142	0.264666	0.347558	0.309780
0.243102	0.292882	0.279410	0.252990	0.358639

ÖRNEK 2.

Bir fabrikada standart bir parça imâl edilmektedir. Fabrika müdürü geçmiş kayıtlardan yararlanarak üretim miktarı ile ortalama maliyet arasında polinom şeklinde bir ilişki bulmak istemektedir. Bunun için geçmiş kayıtlardan 15 numune seçilerek, her numune için ortalama maliyet çıkarılmıştır. Ortalama maliyetlerin çıkarılışından şüphe edildiği için, bunların 0,10 luk bir hata taşıyabileceği kabul edilmiştir.

Veriler :

Numuneler (x) :

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150
Ortalama maliyet (100 TL.) (Y)
60, 40, 30, 30, 50, 70, 90, 90, 80, 70, 100, 140, 160, 180, 240
Y'ler için $\delta_y^2 = 0{,}10$

Yukarıdaki verilere göre çıktı şu şekildedir :

*** ÜRETİM - MALİYET PROBLEMİ ***

*** SERVET YILMAZ (DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON) ***

1. SONUÇ

DENKLEM SAYISI = 15
KATSAYI SAYISI = 1
SERBESTLİK DERECESİ = 14

KATSAYILARIN BAŞLANGIÇ DEĞERLERİ :

0.0

1. SONUÇ 1. ADIM AMAÇ FONKSİYONU = 0.50773D 06
KATSAYILAR :
95.333333 , Y* = 95.33

TAHMİNİ Y DEĞERLERİ :

95.333333	95.333333	95.333333	95.333333	95.333333
95.333333	95.333333	95.333333	95.333333	95.333333
95.333333	95.333333	95.333333	95.333333	95.333333

MAKSİMUM ADIMA ULAŞILMIŞTIR.
KATSAYILARIN STANDART HATALARI :

0.081650

TAHMİNİ Y LERİN STANDART HATALARI :

0.081650	0.081650	0.081650	0.081650	0.081650
0.081650	0.081650	0.081650	0.081650	0.081650
0.081650	0.081650	0.081650	0.081650	0.081650

2. SONUÇ

DENKLEM SAYISI = 15
KATSAYI SAYISI = 2
SERBESTLİK DERECESİ = 13

KATSAYILARIN BAŞLANGIÇ DEĞERLERİ :

0.0 0.0

2. SONUÇ 1. ADIM AMAÇ FONKSİYONU = 0.11170D 06
KATSAYILAR :
0.190490 1.189286 , Y* = 0.19 + 1.19 X

TAHMİNİ Y DEĞERLERİ :

12.083346	23.976201	35.869057	47.761913	59.654769
71.547625	83.440481	95.333336	107.226192	119.119048
131.011904	142.904760	154.797616	166.690471	178.583327

MAKSİMUM ADIMA ULAŞILMIŞTIR.
KATSAYILARIN STANDART HATALARI :

0.171825 0.001890

TAHMİNİ Y LERİN STANDART HATALARI :

0.155456	0.139728	0.124881	0.111270	0.099403
0.089974	0.083808	0.081650	0.083808	0.089974
0.099403	0.111270	0.124881	0.139728	0.155456

3. SONÜÇ

DENKLEM SAYISI = 15
KATSAYI SAYISI = 3
SERBESTLİK DERECESİ = 12

KATSAYILARIN BAŞLANGIÇ DEĞERLERİ :

0.0 0.0 0.0

3. SONUÇ 1. ADIM AMAÇ FONKSİYONU = 38995.
KATSAYILAR :

60.374103 —0.934838 0.013276 , $Y^*=60.38-0.93X+0.013\chi^2$

TAHMİNİ Y DEĞERLERİ :

52.353301	46.987652	44.277155	44.221810	46.821618
52.076577	59.986689	70.551953	83.772369	99.647937
117.178658	139.364530	163.205555	189.701732	218.853061

MAKSİMUM ADIMA ULAŞILMIŞTIR.

KATSAYILARIN STANDART HATALARI :

0.281675 0.008101 0.000049

TAHMİNİ Y LERİN STANDART HATALARI :

0.215571	0.163728	0.128715	0.112042	0.110209
0.115367	0.120787	0.122936	0.120787	0.115367
0.110209	0.112042	0.128715	0.163728	0.215570

4. SONUÇ

DENKLEM SAYISI	=	15
KATSAYI SAYISI	=	4
SERBESTLİK DERECESİ	=	11

KATSAYILARIN BAŞLANGIÇ DEĞERLERİ :

0.0	0.0	0.0	0.0

4. SONUÇ 1. ADIM AMAÇ FONKSİYONU = 33827.
KATSAYILAR :

37.348363	0.556923	—0.009298	0.000094

TAHMİNİ Y DEĞERLERİ :

42.081844	45.520059	48.227350	50.768063	53.706541
57.607127	63.034166	70.552001	80.724977	94.117437
111.293725	132.818185	159.255162	191.168998	229.124037

MAKSİMUM ADIMA ULAŞILMIŞTIR.

KATSAYILARIN STANDART HATALARI :

0.428903	0.022466	0.000321	0.000001

TAHMİNİ Y LERİN STANDART HATALARI :

0.259400	0.16502(	0.140167	0.144947	0.146628
0.139087	0.128149	0.122935	0.128149	0.139087
0.146629	0.144947	0.140168	0.165020	0.259398

5. SONUÇ

DENKLEM SAYISI	=	15
KATSAYI SAYISI	=	5
SERBESTLİK DERECESİ	=	10

KATSAYILARIN BAŞLANGIÇ DEGERLERİ :

0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

5. SONUÇ 1. ADIM AMAÇ FONKSİYONU = 20686.
KATSAYILAR :

92.869812	—4.837656	0.131341	—0.001242	0.000004

TAHMİNİ Y DEĞERLERİ :

56.426695	39.381859	35.784153	40.684757	50.137186
61.197290	71.923251	81.375584	89.617137	97.713095
107.730971	122.740618	146.814216	185.026283	243.453669

MAKSİMUM ADIMA ULAŞILMIŞTIR.

KATSAYILARIN STANDART HATALARI :

0.645420	0.051971	0.001263	0.000012	0.000000

TAHMİNİ Y LERİN STANDART HATALARI :

0.287771	0.173429	0.177013	0.169360	0.149871
0.142546	0.149625	0.154778	0.149633	0.142551
0.149863	0.169343	0.177005	0.173435	0.287731

6. SONUÇ

DENKLEM SAYISI = 15
KATSAYI SAYISI = 6
SERBESTLİK DERECESİ = 9

KATSAYILARIN BAŞLANGIÇ DEĞERLERİ :

0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0				

6. SONUÇ 1. ADIM AMAÇ FONKSİYONU = 14448.

KATSAYILAR :

154.691614	—12.812682	0.436594	—0.006058	0.000037
—0.000000				

TAHMİNİ Y DEĞERLERİ :

64.531841	30.327835	27.943916	40.224223	55.997796
69.083651	77.295865	81.448654	84.361450	89.863984
101.801365	123.039160	154.468472	194.011023	235.624230

MAKSİMUM ADIMA ULAŞILMIŞTIR.

KATSAYILARIN STANDART HATALARI :

1.003022	0.111998	0.004006	0.000061	0.000000
0.000000				

TAHMİNİ Y LERİN STANDART HATALARI :

0.304600	0.206925	0.201926	0.169409	0.166935
0.173261	0.163862	0.154767	0.163535	0.173113
0.167145	0.169386	0.201321	0.206665	0.303989