GERT (Grafik Değerlendirme ve Gözden Geçirme Tekniği) VE BİR UYGULAMA

Asis. Gökay SÜRSAL

GERT bir stokastik yapılı şebekelerin (networks) analiz tekniğidir. Bir olayın gerçekleşme olasılığını ve bir karar verme noktasından diğer bir karar verme noktasına kadar geçecek zamanın şarta bağlı Moment Yaratan Fonksiyonunu (Moment Generating Function) türetir. Şebeke analizlerinde GERT yaklaşımı PERT tipi şebekeler ile akışgrafiği (flowgraph) teorisinde geliştirilmiş yöntem ve tekniklerden oluşur.

PERT'den bir faaliyetin (activity) dal (branch) ile gösterilebileceğini ve bu faaliyetin tamamlanması için gerekli olan sürenin bu dalın bir parametresi olduğu kavramı alınmıştır. Akışgrafiği teorisinden ise topolojik denklemlerin analizi ile ilgili olarak geliştirilmiş tekniklerden yararlanılmıştır.

GERT tekniğinin geliştirilmesi PERT, CPM ve benzeri tekniklerin uygulandığı proje programlaması tipi şebekeler ve akışgrafikleri konusunda olmuştur.

PERT tipi şebekelerde dallarla (branches) gösterilmiş faaliyetlerin hepsinin gerçekleşmesi gereklidir. Bu nedenle böyle bir şebekenin gerçekleşmesi şebekenin tümünün gerçekleşmesine bağlıdır. Bir süre (veya sürelerin dağılımı) PERT şebekesinin her bir dalı ile ilgilidir. Toplam proje zamanının dağılımını saptamak için analiz yapılması gereklidir. Böyle bir analiz çok katı bazı kabuller yapmamızı gerektirir, buna rağmen toplam proje zamanının dağılımı hakkında sadece yaklaşık bir bilgi temin eder[1].

---

1) Bu konuda bkz. Clark C.E., «The Greatest of a Finite Set of Random Variables,» *Operations Research*, Volume 9, No. 2, 1961, s. 145-162 ve Clingen, C.T., «A Modification of Fulkerson's PERT Algorithm, *Operations Research*, Volume

Eisner[2] PERT tipi şebekelerde mantıkî unsurların kullanılması fikrini ortaya atmış ve Elmaghraby[3] çok parametreli dal ve mantıkî unsurlar olan karar merkezleri (nodes) için bir notasyon geliştirmiştir. Gene Elmaghraby bir cebir tekniği geliştirmiş ve «Genelleştirilmiş Faaliyet Şebekeleri» (GAN) sözcüğünü bu türden şebekeleri tanımlamak için kullanmıştır.

Elmaghraby'nın geliştirdiği cebir şebekeleri basitleştirmek için kullanışlı ve uygun bir araç olmakla beraber kesin bir prosedür ortaya koymaması nedeni ile kompleks şebekeleri basitleştirmede yararlı olamamaktadır. Aynı zamanda bu cebir sabit zamanlı dallar (branches) için geçerli fakat faaliyetlerin tamamlanması için gerekli zamanın kesin olarak bilinmediği durumlarda kullanılamamaktadır.

Lorens ve Happ akışgrafikleri (flowgraphs) tekniklerine yönelik bir çalışmalarında[4,5] 200'ün üstünde kaynak göstermişlerdir. Topolojik bir yaklaşım ise Kim ve Chien tarafından önerilmiştir[6].

Bir akışgrafiği yön verilmiş dallardan (transmittances, directed branches) ve düğümlerden (nodes) oluşur.

Bir grafiğin gerçekleşmesi için tüm yön verilmiş dalların grafiğin içinde bulundurulması gereklidir. Huggins ve Howard çalışmalarında

---

12, No. 4, 1964, s. 629-632 ve Fulkerson, D.R., «Expected Critical Path Lengths in PERT Networks,» *Operations Reseach,* Volume 10, No. 6, 1962, s. 808-817 ve Mac Crimmon, K.R., ve Ryavec, C.A. «An Analytical Study of the PERT Assumptions,» *Operations Research,* Volume 12, No. 1, 1964, s. 16-38.

2) Bkz. Eisner, H., «A Generalized Network Approach to the Planning and Scheduling of a Research Program,» *Operations Research,* Volume 10, No. 1, 1962, s. 115-125.

3) Bkz. Elmaghraby, S.E., «An Algebra for the Analysis of Generalized Activity Networks,» *Management Science,* Volume 10, No. 3, 1964, s. 494-514.

4) Bkz., Lorens, C.S., *Flowgraphs,* McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

5) Bkz. Happ, W-W., «Application of Flowgraph Techniques to the Solution of Reliability Problems,» *Physics of Failure in Electronics,* M.F. Goldberg and Joseph Voccaro, editors, Washington, V.S. Dept. of Commerce, Office of Technical Services AD-434/329 (1964) p. 375-423.

6) Bkz. Kim, W.H. ve Chien, R.T., *Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks,* Columbia University Press, New York, 1962.

stokastik sistemlerin tanımlanması ve analizi için akışgrafiklerinden faydalanmışlardır[7].

Stokastik bir şebekenin elemanları:

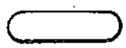
a. Yön verilmiş dallar (arcs, edges, transmittances).

b. Mantıki düğümler (logical nodes).

Yön verilmiş dal ile iki düğüm bağıntılıdır, bunlardan birincisi dalın çıktığı, diğeri ise dalın son bulduğu düğümlerdir. Her bir dal için iki parametre tesbit etmek mümkündür.

1. Daim çıktığı düğümün gerçekleşmesi halinde o dalın seçilme olasılığı, p_a.

2. Bir daim seçilmesi halinde o dal ile gösterilen faaliyetin tamamlanması için gerekli süre, t_a. (t_a tesadüfi değişken de olabilir). Eğer belirli bir dal şebekenin gerçekleşmesi için gerekli değilse o dal ise gösterilen faaliyetin süresi sıfıra eşittir.

Girdi / Çıktı	Exklusif-veya 	Inklusif-veya 	Va 
Non-Stokastik 			
Stokastik 			

Tablo 1. Düğüm Özellikleri ve Sembolleri.

7) Bkz. Howard, R.A., *Dynamic Programming and Markov Processes*, Technolgy press, MIT, Cambridge, Mass., and John Wiley and Sons, Inc., London, 1960. Howard, R.A., Systems Analysis of Semi-Markov Processes, *IEEE Transactions on Military Electronics*, April, 1964, s. 114-124.

Huggins, W.H., «Signal Flow Graphs,» *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, Volume 9, No. 9, 1957, s. 74-86.

Stokastik bir şebekede her düğüm için bir girdi ve bir de çıktı fonksiyonu vardır. Tablo 1' de girdilerle ilgili 3 mantıkî ilişki, çıktılarla ilgili 2 mantıkî ilişki gösterilmektedir[8].

Exlusif-veya : Düğüme giren dallardan herhangi birinin gerçekleşmesine sebep olur. Fakat veri bir zaman içinde bu dalların sadece ve sadece biri gerçekleşebilir.

Inklusif - veya : Düğüme giren dallardan herhangi birinin gerçekleşmesi o düğümün gerçekleşmesine sebeb olur. Gerçekleşme zamanı *Inklusif-veya* düğümüne giren faaliyetlerin tamamlanma sürelerinin minimumuna eşittir.

Ve : Düğüme giren dalların herbirinin gerçekleşmesi halinde o düğüm gerçekleşebilir. Gerçekleşme zamanı *ve* düğümüne giren faaliyetlerin tamamlanma sürelerinin maximumuna eşittir.

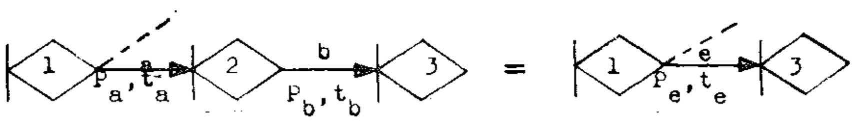
Non-stokastik : Bir düğümün gerçekleşmesi halinde o düğümden çıkan bütün dallar gerçekleşir. Bu nedenle bu düğümden çıkan dalların p-parametresi bire eşittir.

Stokastik : Bir düğümün gerçekleşmesi halinde o düğümden çıkan dallardan sadece bir tanesi gerçekleşir[9].

Şebekelerin Basitleştirilmesinde Elmaghraby Tekniği :

Şekil 1 de «1» numaralı düğümden çıkan «*a*» dalının gerçekleşme olasılığı «p_a» ve gerçekleşmesi halinde geçecek süre «t_a»dır. Aynı şekilde «*b*» dalı da «p_b» ve «t_b» ile tanımlanmıştır. Seri halinde olan bu iki dal tek bir dal, *e*, ile gösterilebilir.

$$p_e = p_a \, p_b$$
$$t_e = t_a + t_b$$

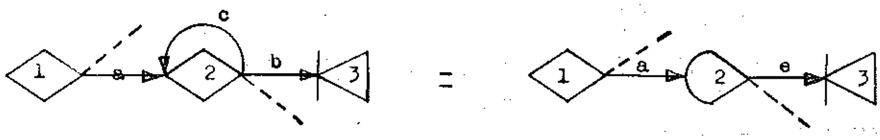


Şekil 1. Seri halindeki şebekenin basitleştirilmesi.

8) Pritsker, A. Alan ve Happ, W. William, «GERT : Graphical Evaluation and Review Technique, Part I Fundamentals», The Journal of Industrial Engineering, Volume 17, No. 5, 1966, s. 267-268.

9) İbid. s. 268.

Bu tekniğin geliştirilmesinden önce şebekelerde tekrarlanarak yapılması gereken faaliyetleri gösterme imkânı yoktu. Oysa plânlama, mamul araştırma ve geliştirme gibi faaliyetler defalarca tekrarlanan faaliyetlerdendir. Elmaghraby bu faaliyetleri göstermek için «self-loop» (kapalı halka) çıktığı düğüme dönen dallardan kullanılmıştır (Şekil 2).



Şekil 2. «self-loop»un indirgenmesi.

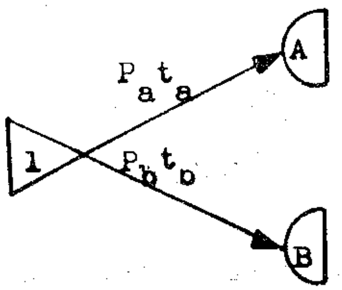
$$p_e = \frac{p_b}{1-p_c}$$

$$t_e = \left(t_b + \frac{t_c\, p_c}{1-p_c} \right) \frac{p_b}{1-p_c}$$

Eğer b ve c iki numaralı düğümden çıkan dalların hepsini oluşturuyorlarsa o zaman $p_b = 1-p_c$ ve $t_e = t_b + \frac{t_c\, p_c}{1-p_c}$ [10]

Stokastik Şebekelerin Analizi :

Bu kısımda çok sayıda dalın bulunduğu bir şebekeyi tek dalı bulunan bir şebeke haline indirgeme incelenecektir.



Şekil 3.

10) Battersby, A., Network Analysis, St. Martin's Press, New York, 1964. pp. 343-344.

Bu indiregme için iki kademeli bir değişim kullanılacaktır. İlk kademede her dal ile ilgili bulunan t zamanını gösteren moment yaratan fonksiyon (M.G.F.) bulunur.

$$M_t(s) = E e^{st}$$

$$= \int_t e^{st} f(t)\, dt \quad t \text{ sürekli değişken ise}$$

$$= \sum_t e^{st} f(t) \quad t \text{ süreksiz değişken ise}$$

$f(t)$ t ile ilgili yoğunluk fonksiyonudur.

Eğer $t = t_o$, yani t sabit ise

$$e^{sto} \int_t f(t) dt = 1$$

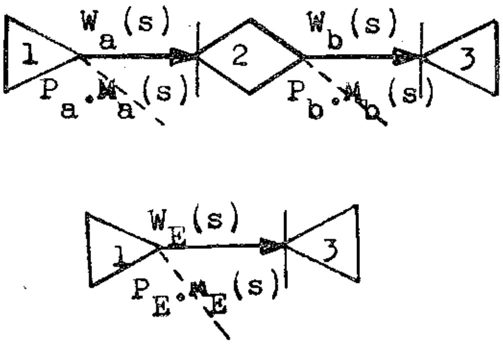
$$M_{to}(s) = e^{sto}$$

$$= 1$$

W-fonksiyonu belirli bir dalın gerçekleşme olasılığı, p, ile o dalın süresinin moment yaratan fonksiyonunun (M.G.F.) çarpımına eşittir.

$$w(s) = p \,.\, M_{t(s)}$$

Seri dallar için:



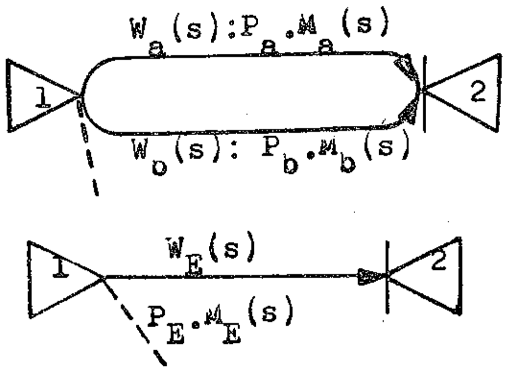
Şekil 4. Eşdeğer W - fonksiyonları.

$$P_E = P_a . P_b$$

$$M_E(s) = M_a(s)\, M_b(s)$$

$$W_E(s) = W_a(s)\, W_b(s)$$

Paralel dallar için :



Şekil 4. Eşdeğer W-fonksiyonları.

$$P_E = P_a + P_b \leqslant 1$$

$$M_E(s) = \frac{P_a M_a(s) + P_b M_b(s)}{P_a + P_b}$$

$$W_E(s) = W_a(s) + W_b(s)$$

Şekil 4 de seri ve paralel dallar için W-fonksiyonları verilmiştir. Seri dallarda birinci düğümden üçüncü düğüme varma olasılığı a ve b dallarının gerçekleşme olasılıklarına bağlıdır. Paralel dallarda ise birinci düğümden ikinci düğüme varma olasılığı a veya b dallarının gerçekleşme olasılıklarına bağlıdır. *Exklusif - veya* düğümü tanımına bağlı kalarak a veya b dallarından sadece ve sadece birinin gerçekleşme olanağı olduğu kabul edilir, bu nedenle $Pa + Pb \leqslant 1$.

Topoloji Denklemi[11]:

$$H(s) = 1 + \sum_m \sum_i (-1)^m L_i(m, s) = 0 \text{ bütün } s\text{'ler için}$$

$L_i(m, s)$ m derecesindeki i'inci halkadır.

Halka (loop) şu şekilde tanımlanmaktadır :

«Halka (loop) her düğümü sadece ve sadece iki dal ile ortak, biri düğümden çıkan diğeri düğümde son bulan, bir dizi daldır»[12].

11) Bkz. Kim, W.H. ve Chien, R.T.: a.g.y.

12) Pritsker, A. Alan ve Happ, W. William, a.g.y. ş. 270.

1 — Birinci Dereceden Halka:

Her bir düğüme diğer düğümlerden ulaşmak olanağı vardır.

2 — N. Dereceden Halka:

Birbirinden ayrı birinci dereceden halkaların meydana getirdiği halkalar cümlesi (set).

Birbirinden ayrı halkaların ortak düğümleri (nodes) yoktur.

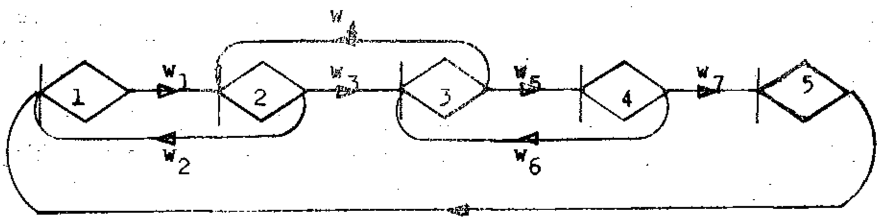
Herhangi bir halkanın $w-$ fonksiyonu o halkayı oluşturan dalların $w-$ fonksiyonlarının çarpımına eşittir. Yani,

$$L_i(1, s) = \prod_{j \varepsilon i} w_j\ (s)$$

$$L_i(m, s) = \prod_{k} L_k\ (1, s)$$

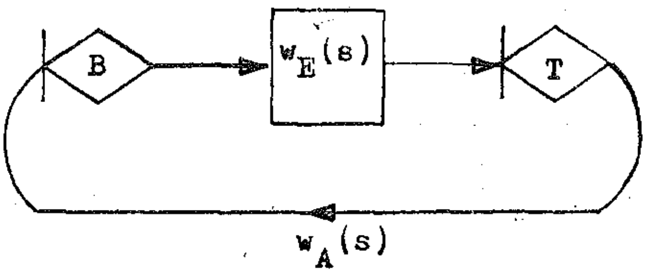
k, m adet değişik değerde olabilmektedir ve m değeri ile ilişkili olan halkalar birbirlerinden ayrıdır.

Topoloji denkleminin uygulamalarına örnek vermeden önce halka kavramını açıklamak yerinde olacaktır:



Şekil 5. Açık Stokastik Şebeke.

Halka tanımına göre Şekil 5'de görülen açık stokastik şebekede birinci dereceden üç halka vardır: $L_1(1) = w_1\ w_2$; $L_2(1) = w_3\ w_4$; ve $L_3(1) = w_5\ w_6$. $L_1(1)$ ve $L_3(1)$ halkalarının ise ortak düğümleri yoktur ve beraberce ikinci dereceden bir halka meydana getirmektedirler: $L_1\ (2) = L_1\ (1) . L_3(1) = w_1\, w_2\, w_3\, w_4$. Topoloji denklemi yalnızca kapalı stokastik şebekelere uygulanabilmektedir. Bir açık stokastik şebekeyi kapalı stokastik şebekeye dönüştürmek için ise termin düğümünü başlangıç düğümüne bir dal ile birleştirmek yeterlidir.



Şekil 6. Kapalı Stokastik Şebeke.

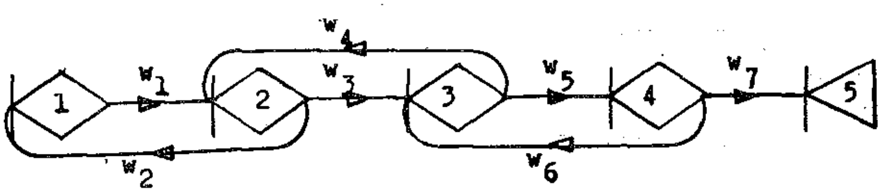
Açık şebekeyi kapalı şebekeye dönüştürmek için ilâve edilen dal $W_A(s)$ ile tanımlanır. Şebekenin başlangıç ve termin düğümleri dışındaki kısmını $W_E(s)$ ile gösterirsek ve topoloji denklemi uygulanırsa

$$H(s) = 1 - W_E(s)\ W_A(s) = 0$$

ve

$$W_A(s) = \frac{1}{W_E(s)}$$

Elde ettiğimiz bu genel sonuç ilâve edilen dalın şebekenin diğer dallarının değerlerinin karşıtına eş olduğunu ortaya koymaktadır.



Şekil 7. 5. Şekildeik açık stokastik şebekenin kapalı durumu.

Şekil 7'de görülen kapalı sotakastik şebekede 1. dereceden 4 halka; $L_1(1) = w_1\ w_2$; $L_2(1) = w_3\ w_4$; $L_3(1) = w_5\ w_6$; ve $L_4(1) = w_1\ w_3\ w_5\ w_A\ w_7$ ve 2. dereceden 1 halka, $L_1(2) = w_1\ w_2\ w_5\ w_6$. Bu şebeke için topoloji denkleminden şu sonuç elde edilir:

$$H = 1 - w_1 w_2 - w_3 w_4 - w_5 w_6 - w_7 w_1 w_3 w_5 w_A + w_1 w_2 w_5 w_6 = 0$$

$W_E = 1/W_A$ için bu denklem çözülürse

$$W_E = \frac{w_1 w_3 w_5 w_7}{1 - w_1 w_2 - w_3 w_4 - w_5 w_6 + w_1 w_2 w_5 w_6}$$

W_E'nin bulunması için Mason şu formülü kullanmıştır[13]:

$$W_E(s) = \frac{\sum_j P_j(s) \left[1 + \sum_m (-1)^m \bar{L}(m, s)\right]}{\bar{H}(s)}$$

$P_j(s)$ = j'inci yolun w-fonksiyonu

$L(m)$ = j inci yol ile ortak olmayan m. dereceden halkaların w-fonksiyonlarının toplamı.

$\bar{H}(s)$ = $(W_A(s)=0)$ için topoloji denkleminin değeri;

Şimdiye kadar elde edilen neticeleri özetlersek: Topoloji denklemi ile eşdeğer W-fonksiyonunu, $W_E(s)$, buluyoruz. $W(s)$, W-fonksiyonu ise bir dalın gerçekleşme olasılığı, p, ile gerçekleşme süresinin moment yaratan fonksiyonu ile çarpımına eşittir. $W(s) = p\, M_t(s)$.

Bu verilerden şebekenin tümünün gerçekleşme olasılığının, P_E ve Moment yaratan fonksiyonunun $M_E(s)$, eşdeğerleri bulunur:

$$P_E = W_E(0)$$

çünkü

$$M_E(0) = 1 \quad \text{ve}$$

$$M_E(s) = \frac{W_E(s)}{W_E(0)}$$

Bu neticeden ise orijin etrafındaki j'inci momenti, μ_{jE}, veya j inci kümülanı, K_{jE}, hesaplanır[14].

---

13) Hall, A.D., A Methodology for Systems Engineering, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1962.

14) Pritsker, A. Alan, ve Happ, W. William, a.g.y. s. 271.

$$\mu_{jE} = \frac{\partial^j}{\partial s^j}\left[M_E(s)\right]\Big|\, s=0$$

$$K_{jE} = \frac{\partial^j}{\partial s^j}\left[\ln M_E(s)\right]\Big|\, s=0$$

$$K_{jE} = \mu_{jE}, \qquad j = 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots$$

BİR UYGULAMA :

ENVANTER PROBLEMİ : Toptancı bir tüccar bir mamulü için bir periyodluk talep dağılımını şu şekilde tesbit etmiştir :

Talep X(ünite)	*Gerçekleşme olasılığı, f(X)*
0	.1
1	.4
2	.3
3	.2

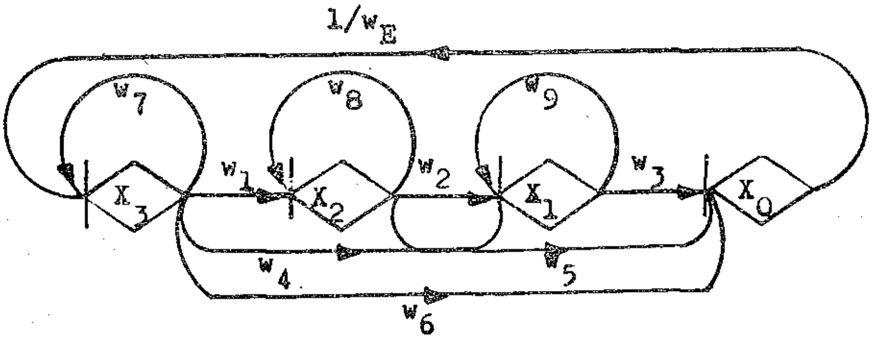
Sipariş politikası olarak elinde hiç mamul kalmadığı periyodların sonunda 3 adet sipariş vermekte ve malları bir periyod sonra teslim almaktadır. Bu arada her sipariş kendisine 100 TL.'sına mal olmakta ve mamulün her ünitesinin elde bulundurma maliyeti de bir periyod için 10 TL. civarındadır. Sattığı her üniteden ise 300 TL. kâr elde etmektedir. Bu envanter sistemi hakkında GERT'ten faydalanılarak neler öğrenilebilir?

Herhangi bir periyodun başında stok seviyesi dört durumdan birinde olabilmektedir: X_0, stok seviyesinin sıfır olduğunu gösterir. X_1, stokta bir ünite mal olduğunu, ve X_2, X_3 de aynı şekilde stokta iki ve üç ünite mal bulunduğunu belirtir. Periyod sonunda ise stok seviyesi bu dört durumdan gene herhangi birinde olabilmektedir. X_i durumundan X_j durumuna geçiş mamule karşı olan talebin olasılık dağılımına bağlıdır. Yani periyod başında X_3 seviyesinde ise periyod sonunda gene X_3 seviyesinde olma olasılığı, $P_{3,3} = f(0) = 0.1$'dır. Aynı şekilde periyod başında X_2 seviyesinde ise ve periyod içinde bir ünite mal satarak periyodu X_1 seviyesinde kapatmak olasılığı, $P_{3,1} = f(1) = 0.4$'dür. Bu şekilde bir analizi ve «geçiş olasılıkları» bir matrix içinde şöyle gösterilebilir :

		Sonuç durumu X_j			
		0	1	2	3
	0	0	0	0	0
X_i	1	.9	.1	0	0
Başlangıç	2	.5	.4	.1	0
durumu	3	.2	.3	.4	.1

Bu modelde bir durumdan diğer bir duruma geçiş olasılığı başlangıçtaki durum, X_i, ve periyod sonundaki durum X_j arasındaki ilişkiye bağlıdır ve bir önceki veya daha önceki periyodlarm başında hangi durumda bulunulduğundan bağımsızdır. Böyle bir ilişkiler dizisi tipik bir «Markov Zinciri»dir. Bu nedenle bu örnekte bir durumdan diğer bir duruma geçiş süresi sabit ve 1 olarak kabul edilecektir.

Yukarıda açıklanan envanter problemini GERT yöntemi ile şu şeiklde gösterebilir:



Şekil 8

Şimdi GERT ile sistemin X_3 durumundan n periyod sonunda X_0 durumda olma olasılığını buiahm (Sabit Durum Olasılığı).

Önce sistemdeki mevcut halkaları bir tablo ile göstermek yararlı olacaktır:

Halka	*W. fonksiyonları*	*2. dereceden Halkalar*	*3. dereceden Halkalar*
L_1	$W_1\ W_2\ W_3\ 1/_{WE}$		
L_2	$W_4\ W_3\ 1/_{WE}$	L_6	
L_3	$W_6\ 1/_{WE}$	L_6, L_7	
L_4	$W_1\ W_5\ 1/_{WE}$	L_7	
L_5	W_7	L_6, L_7	L_6, L_7
L_6	W_8	L_5, L_7	L_5, L_7, L_3
L_7	W_9	L_6, L_6	L_5, L_6, L_3

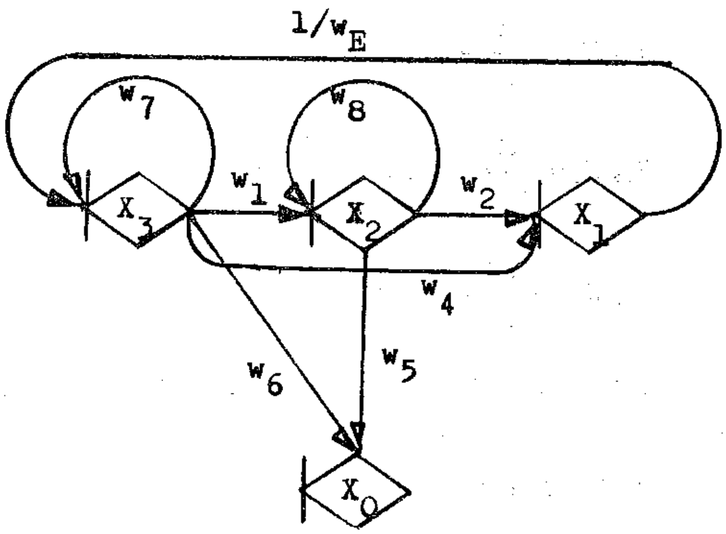
Mason formülündeki $\sum_j p_j(s)\ [\,1 + \sum_m (-1)^m\, \bar{L}(m, s)\,]$ ifadesini kullanarak P_{X_3, X_0}, n periyod içinde X_3 durumundan X_0 durumuna geçme olasılığını bulalım:

$$P_{X_3, X_0} = \frac{w_1 w_2 w_3 + w_4 w_3 + w_6 + w_1 w_5 - w_4 w_3 w_8 - w_6 w_8 - w_6 w_9 - w_1 w_5 w_9 + w_6 w_8 w_9}{\sum_{i=0}^{3} \bar{H}(S_i)}$$

$$= \frac{.2\, e^{s} + .43\, e^{2s} + .099\, e^{3s}}{\sum_{i=0}^{3} \bar{H}(S_i)}$$

Aynı şekilde başlangıç durumunu X_3 alarak $\sum_{i=0}^{3} P_{X_3, X_i}$ bulunabilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta her P_{X_3, X_i}'yi bulurken X_i den çıkan dalları ve bu dallarla birlikte olan W-fonksiyonlarını sistemden çıkartmaktır. Zira aradığımız olasılık P_{X_3, X_i}'dır, yani n periyod sonunda X_i de olma olasılığı, o halde X_i düğümüne varıldığında bu düğümden çıkma olanağı ortadan kaldırmalıdır.

P_{X_3, X_1} için şebeke şu şekilde gösterilir: (Başlangıç durumu X_3 ve son durum X_1) (Şekil 9).



Şekil 9

Bu durumda da sistemde mevcut halkaları bir tablo ile gösterelim:

Halka	*W-fonksiyonları*	*2. dereceden halkalar*
L_1	$W_4\ 1/_{WE}$	L_4
L_2	$W_1\ W_2\ 1/_{WE}$	
L_3	W_7	L_4
L_4	W_8	L_3, L_1

$$P_{X3,\,X1} = \frac{W_4+W_1W_2-W_4W_8}{\sum\limits_{i=0}^{3}\bar{H}(s_i)} = \frac{.3e^s+.13e^{2s}}{\sum\limits_{i=0}^{3}\bar{H}(S_i)}$$

Aynı şekilde $P_{X3,\,X2}$ ve P_{X3}, X_3'de bulunur. Her bir olasılığı bulmak için W-fonksiyonlarının değerlerini yerlerine yerleştirmemiz gerekmektedir.

$$W(s) = p.M_{t(s)}$$

Bir periyodun süresi sabit ve 1 kabul edilmişti, bu nedenle $M_t(0)=1$ ve $W_E(s)=P_E$'dir. Buna göre $P_{X3,\,Xi}$'ler hesaplanır:

$$P_{X3}, X_0 = \frac{.729}{2.429} = .313$$

$$P_{X3}, X_1 = \frac{.43}{2.429} = .18462$$

$$P_{X3}, X_2 = \frac{.36}{2.429} = .1112$$

$$P_{X3}, X_3 = \frac{.81}{2.429} = .39118$$

Envanter sistemi ile ilgili bazı maliyet unsurlarının incelenmesi:

Bu sistemin muhtemel maliyeti:

Sipariş Maliyeti $= 100 \times 0.313 = 31.3$ TL.

Envanter Maliyeti $= 10(0.18462 + 2\times 0.1112 + 3\times 0.39118)$
$= 47.1$ TL.

Muhtemel Gelir:

$$\begin{aligned} X_1 \text{ durumunda} &= 300(1\times 0.18462\times 0.9) \\ +X_2 \text{ durumunda} &= 0.1112(1\times 0.4+2\times 0.5) \\ +X_3 \text{ durumunda} &= 0.39118(1\times 0.4+2.\times 0.3+3\times 0.2) \\ &= 94.7726 \text{ TL.} \end{aligned}$$

Bu durumda muhtemel net gelir = 47.67 TL./periyod.

Ayrıca X_i durumunda olan bir sistemin X_j durumuna gelinceye kadar geçecek ortalama süre de bulunabilir:

Topoloji denklemini kullanarak $W_E(s)$ bulunur,

$$\begin{aligned} H = 1 &- w_1w_2w_3w_A - w_4w_3w_A - w_6w_A - w_1w_5w_A - w_7 - w_8 - w_9 \\ &+ w_4w_3w_Aw_8 + w_6w_Aw_8 + w_6w_Aw_9 + w_1w_5w_Aw_9 + w_7w_8 \\ &+ w_8w_9 + w_7w_9 - w_7w_8w_9 - w_6w_Aw_8w_9 \end{aligned}$$

$$W_E(s) = \frac{\begin{array}{c} w_1w_2w_3 + w_4w_3 + w_6 + w_1w_5 - w_4w_3w_8 - w_6w_8 \\ - w_6w_9 - w_1w_5w_9 + w_6w_8w_9 \end{array}}{\begin{array}{c} 1 - w_7 - w_8 - w_9 + w_7w_8 + w_8w_9 + w_7w_9 \\ - w_7w_8w_9 + w_8w_9 \end{array}}$$

$$= \frac{.2e^s + .43e^{2s} + .099e^{3s}}{1 - .3e^s + .03e^{2s} - .001e^{3s}}$$

$$W_E(s)\Big|_{s=o} = P_E$$

çünkü

$$M_E(s)\Big|_{s=o} = 1$$

$$M_E(s) = \frac{W_E(s)}{W_E(0)}$$

X_0'a ulaşmak için geçecek ortalama süre

$\left.\dfrac{\partial M_{E(s)}}{\partial s}\right|$ $s=0$ kısmî türevi ile bulunur ve 2.19 periyodtur.

Aynı yaklaşım ile diğer terminlere ulaşmak için geçecek ortalama süreler de hesaplanabilir[15].

---

15) Uygulamalar için bkz.
Pritsker, A.A.B. ve W.W. Happ, «GERT=Graphical Evaluation and Review Technique, Part II-Probabilistik and industrial Engineering Applications». Jour. Ind. Eng., Vol. 17, No. 6, Haziran 1966 Elmaghraby, S. E., «Some Network Models in Management Science», Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, No. 29, 1970.