BAYES TEOREMİNİN MUHASEBE DENETİMİNE UYGULANMA OLANAKLARI *

Asis. Hasan ÇATALCA
(İ.Ü. İşletme Fakültesi)
İstatistik-Demografi ve İktisadi
Analizler Kürsüsü

18. yüzyılda formüle edilmiş bulunan Bayes teoremi son zamanlarda, işletme problemlerinin tahlilinde ve özellikle pazarlama alanında gittikçe artan bir ölçüde kullanılmaktadır. Öte yandan, revizyon konusunda da gerçekten ilgi çekici ve teorik ve pratik açılardan önem taşıyan uygulama olanakları mevcut bulunmaktadır. Aşağıda, bunların basit örnekler yardımıyla gösterilmesine çalışılacaktır.

Muhasebe denetiminde, denetimle ilgili işlemlerin cinsi ve yoğunluğu hakkında verilecek karar deneticinin görevine uygun takdirine bırakılmıştır. Bu durumda, tam veya kısmî bir incelemeye karar verme yetkisi muhasebe deneticisine aittir. İkinci halde nümune planları, gerek sübjektif (tecrübeye dayanan) esasa ve gerekse matematik - istatistik metodlara göre yapılabilir. Muhasebe denetimi alanında iradi seçim metodu ile yapılan kısmî incelemeler meslekî bakımdan alışılmış olarak görülürken, matematiksel örnekleme metodları (tesadüfi seçim) şimdiye kadar — Amerikan tatbikatında da — ancak sınırlı ölçüde kabul edilebilmiştir. Bu durum, tesadüfî örnekleme metodlarının — uygun bir güven derecesi ve nisbeten az bir tahmin hatası yaklaşımıyla — kullanılmasında, nisbeten geniş kapsamlı bir nümunenin gözönüne alınması gerektiğine bağlanabilir. Bu da, sınırlı denetim süresi açısından bazı hallerde uygun görülmemektedir.

*) Çeviri : Karl WEBER; «Anwendungsmöglichkeiten des Theorems von Bayes bei Buchprüfungen». Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 24. Jg., Febr. 1972, s. 91-115.

Sözü edilen güçlükler, Bayes teoreminin uygulanması ile geliştirilen örnekleme metodları yardımıyla geniş ölçüde ortadan kaldırılabilmektedir. Bu metodlar, gerek kalitatif ve gerekse kantitatif şekildeki problemlerin ele alınışına uygun düşmeleri nedeniyle muhasebe denetimi açısından büyük önem taşımaktadır.

I. Bayes teoremi

Thomas Bayes (1702 - 1761) tarafından ilk defa 1763'de açıklanmış olan toerem, modern şekliyle aşağıdaki gibi ifade edilmekte ve yorumlanmaktadır:

$$P\ (A_i \mid B) = \frac{P\ (A_i)\ \ P\ (B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P\ (A_i)\ \ P\ (B \mid A_i)}$$

$P\ (A_i \mid B)$: A_i olayının B'ye bağlı olarak vukubulması ihtimali (A_i'ye ait a-posteriori ihtimal),

$P\ (A_i)$: A_i olayının meydana gelmesi ihtimali (A_i'ye ait a-priori ihtimal),

$P\ (B \mid A_i)$: B olayının A_i bilindiği takdirde gözlenmesi ihtimali,

$\sum_{i=1}^{n} P\ (A_i)\ P\ (B|A_i) = P\ (A_1)\ P\ (B|A_1) + P\ (A_2)\ P\ (B|A_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots$:

B olayının vukubulması ihtimali; yani P (B).

Bayes teoremi çok kere, a-posteriori ihtimal formülü şeklinde de ifade edilmektedir. «Birbirine bağlı iki olaydan ikincisinin meydana gelmesi ihtimali $\frac{b}{N}$, her ikisinin birlikte meydana gelmesine ait ihtimal $\frac{P}{N}$ ise, ve ikinci olayın gerçekten vukubulmuş olduğu anlaşılmışsa birinci olayın da vukubulmuş olacağına ait tahminin doğruluğu $\frac{P}{b}$ ihtimalidir[1]».

1) Thomas Bayes, An Essay toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances; Biometrica, 1958, s. 296-315, s. 301.

İlk olay A ve ikinci olay da B ile gösterildiği takdirde Bayes teoreminin modern ifadesi şu şekli alacaktır:

$b/N = P(B).\ P/N = P(AB) = P(A)\ P(B|A) \rightarrow P/b = (P/N)/b/N) = P(A)\ P(B|A) / P(B) = P(A|B)$. A - posteriori ihtimallerin hesabı için yapılacak çalışmanın safhaları Tablo : 1 de açık olarak görülmektedir. A_i tipindeki bütün olaylar için önceden bilinen a-priori ihtimallerden — $P(A_i)$ — ve bir ilâve inceleme yardımıyla sonradan tesbit edilmiş olan şartlı ihtimallerden — $P(B|A_i)$ — hareketle, toplamları P (B) 'yi veren $P(BA_i)$ değerleri bulunmaktadır. Bundan sonraki safhada, her bir $P(BA_i)$ değeri P (B) 'ye bölünmekte ve satır sonuçları olarak a-posteriori ihtimaller — $P(A_i | B)$'ler — elde edilmektedir. A-posteriori ihtimallerin toplamı zorunlu olarak (1,0) olmaktadır.

Tablo 1. A-posteriori ihtimallerin hesaplanması.

Hipotez, olay alternatifi (1)	A-priori ihtimal (2)	Şartlı ihtimal (3)	(2).(3) çarpımının ihtimali (4) = (2).(3)	A-posteriori ihtimal (5) = (4)/P(B)
A_1	$P(A_1)$	$P(B\|A_1)$	$P(BA_1)$	$P(A_1\|B)$
A_2	$P(A_2)$	$P(B\|A_2)$	$P(BA_2)$	$P(A_2\|B)$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
A_n	$P(A_n)$	$P(B\|A_n)$	$P(BA_n)$	$P(A_n\|B)$
S	P(S)=1	—	P(B)	1,0

Bayes teoreminin, sübjektif ve objektif ihtimallerin her ikisi için de geçerli olduğunu özellikle belirtmek gerekmektedir. Sübjektif ihtimaller — nisbî frekanslara veya objektif ihtimallere karşılık — ilerideki bir olayın vukubulması ile ilgili kesinlik derecesini ölçmektedir. Bu nedenle sübjektif ihtimalleri bir kerelik, yani tekrar edilemeyen olaylar için de tesbit etmek mümkündür.

Bayes teoreminin buraya kadar tartışılmış olan şekli tesadüfi olaylarla ilgilidir. Teorem, ders kitapları literatüründe daha çok bu şekilde ifade edilmektedir. Fakat Bayes teoremini tesadüfi değişken-ler için de formüle etmek mümkündür; nitekim burada farklı şekilleri birbirinden ayırmak gerekmektedir.

Bayes teoremi önce, X tesadüfi değişkeni Q parametresine bağlı bir ihtimalle süreksiz bir bölünme gösteriyorsa ve Q sürekli bir tesadüfi değişken ise uygulanabilecektir. Q tesadüfi değişkenine ait frekans f (q), ve $X = x_k$ şartı için yine Q'ya ait şartlı frekans $g(q \mid x_k)$ ile gösterildiği takdirde,

$$g(q|x_k) = \frac{f(q)\ (P(X = x_k|Q = q)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(q)\ P(X = x_k|Q = q)\ dq}$$

olacaktır. Yalnız burada, yukarıdaki şekilde formüle edilmiş bulunan Bayes teoremine dayanarak özel bir formülün geliştirilebileceği belirtilmelidir. Q tesadüfi değişkeninin eşit dağıldığı varsayıldığı ve doğrusal olarak transforme edildiği —öyle ki, transforme edilmiş $P = F(Q)$ tesadüfi değişkeni de (0,1) aralığında, $0 \leqslant p \leqslant 1$ için $f(p) = 1$ frekansı (sıklığı) ile eşit dağılım göstermektedir— ve ayrıca, ilâve inceleme sonuçları bir binom bölünmesi yaklaşımıyla işlenmeye devam edilebildiği ve n tane bağımsız Bernoulli deneyinde x sayıda isabet bulunduğu düşünüldüğü takdirde, bölünme fonksiyonu

$$F(p; B, C) = \int_{0}^{p} \frac{\Gamma(C)}{\Gamma(B)\ \Gamma(C-b)}\ t^{B-1}\ (1-t)^{C-B-1} dt$$

şeklini alacaktır. Burada $B = x + 1$ ve $C = n + 2$ dir.

Bu kümülatif Beta fonksiyonunun pratik bakımdan önem taşıyan değerleri tablo halinde mevcut bulunmaktadır. Söz konusu tablodan bir bölüm, aşağıda Tablo: 2'de görülmektedir:

Tablo 2. Kümülatif Beta fonksiyonu (Tablodan bölüm).

B	C	P				
		0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
1	27	0,0600	0,0704	0,0848	0,1088	0,1623
2	27	0,1108	0,1239	0,1415	0,1698	0,2293

Yukarıdaki formlü ve tabloların kullanımını basit bir örnek üzerinde göstermek yerinde olacaktır:

Hammadde deposundan alınan 25 birimlik bir nümuneye dayanarak yapılan ilk kontrolda herhangi bir ağırlık farkı tesbit edilmemiş olsun. Bu sonuca göre, bütün pozisyonların % 8,5 inden azında ağırlık farkının mevcut olduğuna % 90 ihtimalle karar verilebilir. Nitekim;

$$F(P_{0,9}; B, C) = F(p_{0,9}; 1,27)' = 0,0848.$$

Bayes teoremi, X tesadüfi değişkeninin süreksiz olduğu ve Q parametresine bağlı ihtimallerle x_k $(k = 1,2 \ldots)$ değerlerini alabildiği durum için de formüle edilebilir. Burada Q parametresinin de, $P(X = x_k) = p_k(q_i)$ eşitliği geçerli olacak şekilde q_i $(i = 1,2.., n)$ değerlerini alan süreksiz bir tesadüfi değişken olduğu varsayılmaktadır. $X = x_k$ hali gözlendiği takdirde: Q değişkenine ait a-posteriori ihtimal için Bayes teoreminin ifadesi şöyle olacaktır:

$$P(Q = q_i \mid X = x_k) = \frac{P(Q = q_i)\, P(X = x_k \mid Q = q_i)}{\sum_j P(Q = q_j)\, P(X = x_k \mid Q = q_j)}$$

Bu formül, enformasyon değeri gözönüne alınarak veya alınmadan yapılabilecek muhasebe denetimi planlaması konusundaki tartışma bakımından büyük önem taşımaktadır.

II. *Bayes teoremine göre nümunenin, enformasyon değeri hesaplanmadan değerlendirilmesi*

A-priori ve şartlı ihtimaller Bayes teoremi yardımıyla sistematik bir şekilde birleştirilebilir. Böylece birbiri ardından kazanılmış olan bilgiler, ilk veya temel inceleme sonuçlarının bir ilâve inceleme münasebetiyle tamamen geçersiz görülmeyip, aksine işe yarar olarak değerlendirilmeye devam edilmesi şeklindeki bir anlayış içersinde birleştirilmektedir. Bayes teoreminin muhasebe denetimi açısından taşıdığı esas önem, ihtimal tahminleri arasındaki bu birleşmeye dayanmaktadır. Bu da önce, kalitatif özellikleri esas alan tahliller için gösterilecektir.

1. *Kalitatif problem şeklinde değerlendirme metodları:*

Kalitatif özelliklere dayanan incelemeler muhasebe denetiminde geniş bir yer tutmaktadır; çünkü nümuneler yardımıyla ilk olarak, hatalı fiilî denetim konularının payını belirlemek veya değişik tipteki hataların bir denetim kompleksi içersindeki paylarını tahmin etmek gerekmektedir. Bu türden tahlillerle ilgili olarak Bayes teoremi, sübjektif hata tahminlerini a-priori ihtimallerle ifade etmek ve bunları, sonradan uygulanan tesadüfi örneklemenin sonuçları ile birleştirmek imkânını vermektedir. Bu sırada elde edilen a-posteriori ihtimaller, matematiksel istatistiğin bilinen metodlarma göre uygulanmış bir örneklemenin verdiği ve sübjektif tecrübelerle düzeltilmiş sonuçların neticesi olarak anlaşılabilir. Bu düzeltme prosesinde, nümune sonuçlarının önemli ölçüde değiştirilmesi söz konusu olabilmektedir.

Basit bir örnek vermek amacıyla denetim planlaması, 2000 adet karttan oluşan bir hesap sistemi için tartışılacaktır. Deneticinin kullanabileceği bütün bilgiler gözönüne alınarak Tablo: 3 hazırlanmıştır; bu arada özellikle, şimdiye kadarki kontrollardan elde edilen tecrübeler ve denetlenen teşebbüsün tipi, büyüklüğü ve iktisadî durumu saklı tutulmuştur. Sağlılkı bir iç kontrol sisteminin varlığı, % 5'den az bir hata oranını tamamen kesin, % 2'den azını da çok muhtemel olarak göstermiştir. Deneticinin görüşüne göre, % 4'den az bir hata oranını çok büyük bir ihtimalle hesaba katmak söz konusu olabilmekte ve ‰ 1'den küçük bir hata oranı herhalde mümkün görülebilmektedir. Bu temel incelemeye ilâve olarak yapılacak araştırmanın, 100 birime ($n = 100$) dayanan ve iki hatanın tesbit edilebildiği tesadüfi bir örnekleme olduğu düşünülmektedir.

Tablo 3. A-priori ihtimaller.

Hata oranı (1)	Toplam ihtimal (2)	A-priori ihtimal (3)
0,001	0,60	0,60
0,005	0,80	0,20
0,01	0,90	0,10
0,02	0,95	0,05
0,03	0,98	0,03
0,04	0,99	0,01
0,05	1,00	0,01
		1,00

Nümuneden elde edilen sonuçların işlenmesine, hata sıklığının asgarî seviyede olması nedeniyle, Poisson dağılımı yardımıyla devam edilmesi zorunlu olmuştur. Poisson dağılımı, bir temel kural anlayışı içersinde, ancak

$$\begin{array}{lll} n \geqslant 10 & \text{ve} & p \leqslant 0{,}01 \\ n \geqslant 20 & \text{ve} & p \leqslant 0{,}03 \\ n \geqslant 50 & \text{ve} & p \leqslant 0{,}05 \\ n \geqslant 100 & \text{ve} & p \leqslant 0{,}08 \end{array}$$

olduğu hallerde anlamlı bir şekilde kullanılabilecektir. Paisson dağılımına binom dağılımından hareketle doğrudan doğruya varmak mümkündür. İsabet ihtimali (p) nin sabit olduğu n sayıda deneyde x sayıda isabete ait f (x) ihtimali, binom dağılımına göre şu şekilde bulunmaktadır:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

$$0 \leqslant x \leqslant n,\ 0 < p < 1 \text{ ve } n = 1,2, \ldots \text{ için}$$

Binom dağılımının matematik ümidi ve varyansı aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$$\mu = np \quad \text{ve} \quad \sigma^2 = np\,(1-p)$$

Binom dağılımı genel olarak asimetriktir; n büyüdükçe veya p 0,5 değerine yaklaştıkça simetrik hale gelmektedir. $np > 10$ olduğu zaman binom dağılımı normal bölünme yoluyla tahmin edilebilir. n, np sabit kalacak şekilde sonsuza yaklaştığı takdirde binom bölünmesinden aşağıdaki fonksiyon elde edilmektedir:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ np = \lambda}} \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x} = \frac{\lambda^{x}}{x!} e^{-\lambda}$$

veya

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^{x}}{x!} e^{-\lambda} \qquad 0 \leqslant x;\ \lambda > 0 \text{ için}$$

Bu ihtimal fonksiyonuna tekabül eden bölünme fonksiyonu, $x > 0$ ve $x \leqslant 0$ olması halinde $F(x) = 0$ için

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{x_i \leqslant x} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$$

eşitliğiyle verilmekte ve Poisson dağılımı adını almaktadır. λ (> 0) sabit değeri bu süreksiz dağılımın parametresidir. Matematik ümit ve varyans için

$$\mu = \lambda \quad \text{ve} \quad \sigma^2 = \lambda$$

eşitlikleri geçerlidir.

Poisson dağılımına ait ihtimal ve bölünme fonksiyonları değerleri tablo halinde mevcuttur. Tablo: 4, aşağıdaki hesaplamalar açısından önem taşıyan bazı değerleri göstermektedir.

Tablo 4. Poisson dağılımına ait ihtimal fonksiyonu $f(x)$ ve bölünme fonksiyonu $F(x)$ (Tablodan bölüm).

x	$\lambda = 0,1$		$\lambda = 1,0$		$\lambda = 2,0$	
	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	0,9048	0,9048	0,3679	0,3679	0,1353	0,1353
1	0,0905	0,9953	0,3679	0,7358	0,2707	0,4060
2	0,0045	0,9998	0,1839	0,9197	0,2707	0,6767
3	0,0002	1,0000	0,0613	0,9810	0,1804	0,8571
4	0,0000	1,0000	0,0153	0,9963	0,0902	0,9473
5			0,0031	0,9994	0,0361	0,9834

Poisson dağılımı gösteren bir anakütleye ait λ parametresinin tahmini için, bu anakütleden seçilen n sayıda birimden oluşan bir nümunenin aritmetik ortalaması ($\bar{x}$) veya varyansı (s^2) gerekli olmaktadır. Fakat, λ hakkında yapılacak etkili bir tahmin için genel olarak $\bar{x}$ tercih edilmektedir.

Spesifik özellikleri bakımından Poisson dağılımı, nümune gözlemine dayanan muhasebe denetiminde de kullanılabilmektedir. Nitekim; incelenecek olan anakütlede hata oranı (p) çok az ise, n birimden toplam olarak x tanesinin hatalı olması ihtimali yaklaşık olarak, f (x) ihtimal fonksiyonunun değeri ile ifade edilebilir. Burada $np = \lambda$ olarak alınacaktır. Yalnız, $\lambda \geqslant 10$ için Poisson dağılımına normal bölünme üzerinden yaklaşık olarak varılabileceğine işaret etmek gerekir.

Tablo 5. Poisson dağılımının sayısal değerlerinin hesaplanması.

i (1)	Hata oranı p_i (2)	Parametre $\lambda_i = np_i = 100\, p_i$ (3)	İhtimal $f(x) = P(X = 2)$ (4)
1	0,001	0,1	0,0045
2	0,005	0,5	0,0758
3	0,01	1,0	0,1839
4	0,02	2,0	0,2707
5	0,03	3,0	0,2240
6	0,04	4,0	0,1465
7	0,05	5,0	0,0842

Seçilen sayısal örnekte n = 100 dür. Tablo: 3 de görülen hata oranları (p_i), Tablo: 5'de $\lambda_i = np_i$'lerin hesaplanmasında kullanılmıştır. Bu parametre değerleri, ihtimal fonksiyonlarına ait değerlerin Poisson dağılımı tabloları yardımıyla belirlenmesine yardımcı olmuşlardır (Bkz. Tablo: 4). İlâve inceleme için bu şekilde tesbit edilmiş olan şartlı ihtimaller, Tablo: 3'de görülen a-priori ihtimallerle birlikte, Bayes teoremi anlayışı içersinde işlenmişlerdir. A-posteriori ihtimallerin hesabı Tablo: 6'da görülmektedir.

Benzer hesaplamalar, n = 100 birimlik bir nümuneye dayanarak başka hataların ortaya çıkarıldığı —hipotetik— durum için yapılabilir. Burada, hesaplama tekniği bakımından herhangi bir özellik bulunmamaktadır. Pratik bakımdan önem taşıyan hata oranları için elde edilen a-posteriori ihtimaller Tablo: 7'de yer almaktadır.

Tablo: 7'den su sonuç çıkmaktadır: 100 birimlik bir nümunenin incelenmesinden ve iki hatanın tesbit edilmesinden sonra, % 85 ihtimalle % 2'den küçük veya buna eşit, ve % 62 ihtimalle de azami % 1'lik bir hata oranı beklenebilecektir. Sadece nümune sonuçlarının gözönüne alınması halinde söz konusu ihtimallere, Tablo: 4'e gö-

Tablo 6. $n = 100$ için a-posteriori ihtimallerin hesaplanması.

Hata oranı (1)	a-priori. ihtimal (Tablo: 3) (2)	Şartlı ihtimal (Tablo: 5) (3)	Çarpımın ihtimali (4)	a-posteriori ihtimal: ihtimal yoğunluğu (5)	a-posteriori ihtimal: kümülatif ihtimal (6)
0,001	0,60	0,0045	0,0027	0,046	0,046
0,005	0,20	0,0758	0,0152	0,258	0,304
0,01	0,10	0,1839	0,0184	0,313	0,617
0,02	0,05	0,2707	0,0135	0,230	0,847
0,03	0,03	0,2240	0,0067	0,114	0,961
0,04	0,01	0,1465	0,0015	0,025	0,986
0,05	0,01	0,0842	0,0008	0,014	1,000
	1,00		0,0588	1,000	

re (Poisson dağılımına ait bölünme fonksiyonu F (x) % 68 ve % 41 değerleri tekabül edecektir.

Tablo 7. Kümülatif a-posteriori ihtimaller.

Kümülatif a-priori ihtimal $P(X \leqslant x)$	Hata oranı p_i	100 birimlik ($n = 100$) nümunede hata sayısı: 0	1	2 (Tab. 6)	3	4	5
0,60	0,001	0,765	0,318	0,046	0,004	0,000	0,000
0,80	0,005	0,936	0,674	0,304	0,094	0,021	0,005
0,90	0,01	0,988	0,889	0,617	0,314	0,122	0,041
0,95	0,02	0,998	0,968	0,847	0,638	0,421	0,253
0,98	0,03	1,000	0,994	0,961	0,879	0,755	0,609
0,99	0,04	1,000	0,998	0,986	0,949	0,884	0,793
1,00	0,05	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Tablo: 7'de görülen a-posteriori ihtimallerin denetim planlaması açısından taşıdığı önem, nümune büyüklüğünün mümkün olduğu kadar düşük seviyede tesbit edilmesine ve belli bir hata oranının, belirli bir güven derecesi ile aşılmamasına bağlı bulunmaktadır. Bununla ilgili yön gösterici değerler muhasebe deneticisi tarafından, görevine uygun takdirine göre tayin edilecek ve muhtemelen, % 2 hata riskinde asgarî % 95 güven derecesi şeklinde tesbit edilebilecektir.

Yukarıda belirtilen güven derecesinin — tamamen spesifik a-priori ihtimaller üzerine kurulmuş olan — Tablo : 7'ye göre gerçekleştirilebilmesi, ancak 100 birimlik bir ilk nümunede en fazla 1 hatanın ortaya çıkarılmasına bağlıdır. Önceden belirlenmiş asgarî güven derecesinin sağlanamaması halinde yeni bir örnekleme yapmak gerekmektedir. Bundan elde edilecek sonuçlar önceki gözlem sonuçlarıyla birleşitirilebilir. 200 birimlik (n = 200) kümülatif bir nümunede toplam olarak 3 hataya rastlandığı takdirde, azamî % 2 hata riskine ait a-posteriori ihtimal % 93 olmaktadır. Böylece denetim işlemlerinde ilâve bir genişleme zorunlu hale gelmektedir.

Söz konusu hata oranının tesbit edilmesi Tablo: 8 yardımıyla gerçekleşmiştir. Bu tablodaki değerler, buraya kadar açıklanmış olan metodlarm kullanılması ile — tek kademeli olarak — hesaplanmıştır. Fakat, ikinci örneklemeyi ayrıca değerlendirmek ve bu suretle iki kademeli bir analize geçmek de mümkündür. Bu, ilk çalışma safhasında bulunan a-posteriori ihtimalleri ikinci safhada a-priori

Tablo 8. $n = 200$ için a-posteriori ihtimallerin hesaplanması.

Hata oranı (1)	a-priori ihtimal (Tablo 3) (2)	Şartlı ihtimal (3)	Çarpımın ihtimali (4)	a-posteriori ihtimal: ihtimal yoğunluğu (5)	a-posteriori ihtimal: kümülatif ihtimal (6)
0,001	0,60	0,0011	0,00066	0,015	0,015
0,005	0,20	0,0613	0,01226	0,280	0,295
0,01	0,10	0,1804	0,01804	0,412	0,707
0,02	0,05	0,1954	0,00977	0,223	0,930
0,03	0,03	0,0892	0,00268	0,061	0,991
0,04	0,01	0,0286	0,00029	0,007	0,998
0,05	0,01	0,0076	0,00008	0,002	1,000
			0,04378	1,000	

ihtimal olarak kabul edip, bunları ikinci nümuneden — bir Poisson dağılımı esas alınarak — elde edilen ihtimallerle birlikte değerlendirmeye devam etmek suretiyle gerçekleştirilebilir. Bu hesaplama metodu Tablo: 9 da görülmektedir. Ayrıca aynı tablodan, Bayes analizi için tipik olan birleştirme prosesi de özellikle açık bir biçimde anlaşılmaktadır.

Tablo 9. $n = 100$ için a-posteriori ihtimallerin hesaplanması.

Hata oranı (1)	a-priori ihtimal (Tablo 6) (2)	Şartlı ihtimal (3)	Çarpımın ihtimali (4)	a-posteriori ihtimal: İhtimal yoğunluğu (5)	a-posteriori ihtimal: Kümülatif ihtimal (6)
0,001	0,046	0,0905	0,00416	0,015	0,015
0,005	0,258	0,3033	0,07825	0,280	0,295
0,01	0,313	0,3679	0,11515	0,412	0,707
0,02	0,230	0,2707	0,06226	0,223	0,930
0,03	0,114	0,1494	0,01703	0,061	0,991
0,04	0,025	0,0733	0,00183	0,007	0,998
0,05	0,014	0,0337	0,00047	0,002	1,000
			0,27915	1,000	

Pratik çalışma gösteren deneticiye, bir nümunede tesbit edilen hata sıklığının, spesifik denetleme işlemleri açısından önem taşıyan asgarî güven derecesini önceden belirlenmiş hata riskinde sağlayıp sağlamadığı sorusunu çabuk bir biçimde açıklamak üzere — a-priori ihtimallerden hareketle — ayrıntılı tablolar geliştirilebilir. Tablo :10, şimdiye kadar verilmiş olan tabloları bu anlamda tamamlamaktadır.

Asgarî güven derecesinin sağlanabilmesi için nümunedeki hata oranının azamî ne kadar olması gerektiği hususu, bu tablolara dayanarak dönem başında da belirlenebilir. Örneğin 100 birimlik bir nümunede, % 4 hata riskinde % 95'lik asgarî güven derecesinin altına inmeksizin en fazla 3 hata bulunabileceği doğrudan tesbit edilebilir. (Ayrıca bkz. Tablo : 7) . Bu durumda a-priori ihtimaller, deneticinin görüşüne göre % 3 seviyesinde bir hata oranının % 98 ihtimalle aşılmayacağını gösterdikleri için 100 birimlik bir nümune, denetim kompleksi hakkında kesin bir hüküm verme hususunda büyük bir ihtimalle yeterli olabilecektir. Buna uygun olarak, denetim işlemleri için harcanacak zamanın — örneğin şebeke analizi tekniğinin kullanılmasıyla - planlanması gerekecektir.

Tablo 10. Kümülatif a-posteriori ihtimaller.

Kümülatif a-priori ihtimal $P(X \leqslant x)$	Hata oranı p_i	200 birimlik ($n = 200$) nümunede hata sayısı ($n = 100$ için bkz. Tablo 7)					
		0	1	2	3 (Tablo 8)	4	5
0,60	0,001	0,848	0,484	0,120	0,015	0,002	0,000
0,80	0,005	0,975	0,846	0,566	0,295	0,117	0,034
0,90	0,01	0,998	0,960	0,894	0,707	0,455	0,233
0,95	0,02	1,000	0,998	0,983	0,930	0,821	0,664
0,98	0,03	1,000	1,000	0,999	0,991	0,972	0,929
0,99	0,04	1,000	1,000	1,000	0,998	0,993	0,979
1,00	0,05	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

$P(X \leqslant x)$	p_i	100 birimlik ($n = 100$) nümunede hata sayısı					
		0	1	2	3	4	5
0,30	0,001	0,500	0,118	0,013	0,001	0,000	0,000
0,60	0,005	0,834	0,514	0,228	0,070	0,016	0,003
0,80	0,01	0,969	0,835	0,575	0,295	0,116	0,039
0,90	0,02	0,994	0,953	0,831	0,626	0,412	0,247
0,95	0,03	0,999	0,986	0,937	0,831	0,687	0,538
0,99	0,04	1,000	0,999	0,992	0,974	0,943	0,899
1,00	0,05	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

$P(X \leqslant x)$	p_i	200 birimlik ($n = 200$) nümunede hata sayısı					
		0	1	2	3	4	5
0,30	0,001	0,638	0,221	0,037	0,004	0,001	0,000
0,60	0,005	0,925	0,719	0,456	0,234	0,090	0,026
0,60	0,01	0,995	0,963	0,468	0,685	0,441	0,227
0,90	0,02	1,000	0,996	0,980	0,929	0,821	0,663
0,95	0,03	1,000	0,999	0,997	0,985	0,961	0,887
0,99	0,04	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989
1,00	0,05	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

2. *Kantitatif problem şeklinde değerlendirme metodları:*

Kantitatif özellikleri konu alan gözlemlere muhasebe denetiminde çok sık rastlanmamaktadır. Bunlar esas olarak, —örneğin bir depo mevcuduna ait— ortalama değerlerle ilgilidir. Bu tip gözlemlerde de Bayes teoremi, a-priori ihtimallerle objektif şartlı ihtimallerin birleştirilmesinde kullanılabilmektedir. A-posteriori ihtimallerin hesaplanmasıyla ilgili olarak muhtelif metodlar geliştirilmiştir. Bunlar aşağıda, — *v. Wysocki'nin* geliştirdiği bir metod münesebetiyle- basit örnekler yardımıyla gösterilmeye çalışılacaktır.

Sabit varlıkların her bir unsuru incelenmek istenmektedir. Ana kütle, envanter değeri 240 000 DM olarak tesbit edilen 4000 birimden oluşmaktadır. Bu durumda ortalama değer 60 DM dır. Kontrolu yapacak olan denetici, önceki tecrübelerine dayanarak ortalamadan sapmaların az olacağına inanmaktadır; bu konudaki tahminine aşağıdaki veriler esas teşkil etmektedir (Tablo : 11) .

Tablo 11. Temel veriler.

Sınıf ortası DM (1)	Sınıf aralığı DM (2)	a-priori ihtimal (3)	Nümunede gözlenen sıklık (4)
45	42,5 - 47,5	0,02	5
50	47,5 - 52,5	0,03	10
55	52,5 - 57,5	0,15	20
60	57,5 - 62,5	0,60	30
65	62,5 - 67,5	0,15	15
70	67,5 - 72,5	0,03	15
75	72,5 - 77,5	0,02	5
		1,00	100

100 birime dayanan (n = 100) tesadüfi bir örnekleme — sabit sınıf fasılasından hareketle — Tablo : 11'de görülen sıklıkları (frekansları) vermiştir. Bu nümuneye göre (hesaplama tekniğinin bilindiği varsayılabilir) $\bar{x}$ = 60,25 ve standard sapma s = 7,495 olarak bulunmuştur. Anakütle ortalaması % 95,5 ihtimalle,

$$\mu_H = \bar{x} \pm t \sqrt{\frac{s^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}} = 60,25 \pm 2 \sqrt{\frac{56,18}{100} \cdot \frac{3900}{3999}} =$$

= 60,25 ± 1,10; yani 61,35 ile 59,15 DM arasında olacaktır. Böylece envanter değerinin, aynı ihtimal kademesi için, 245 400 DM ile 236 600 DM arasında bulunacağı söylenebilir.

Nümune için hesaplanmış olan aritmetik ortalama ($\bar{x}$) ve standard sapma (s) değerlerine dayanarak teorik frekansları (beklenen normal frekansları) hesaplamak mümkündür. Burada esas itibariyle iki metod uygulanabilir. Bölünme fonksiyonunu esas alan hesaplama tarzı (*alanlar metodu*) Tablo : 12 de görülmektedir.

Tablo 12. Teorik frekansların hesaplanması - 1. Metod.

Sınıf aralığı (1)	Sınıf hududu (X) alt (2)	üst (3)	$(X - \bar{x})$ (4)	$z = (X - \bar{x})/s$ (5)	Φ (z) (6)	Satır farkı (7)	Teorik frekanslar (8) = (7)n
42,5 den az	—		—	—	0,50000	0,00889	1
42,5 - 47,5	42,45		—17,80	—2,37	0,49111	0,03474	3
47,5 - 52,5	47,45		—12,80	—1,71	0,45637	0,10554	10
52,5 - 57,5	52,45		— 7,80	—1,04	0,35083	0,20652	21
57,5 - 62,5	57,45		— 2,80	—0,37	0,14431	0,25840	26
		62,45	+ 2,20	+0,29	0,11409		
62,5 - 67,5		67,45	+ 7,20	+0,96	0,33147	0,21738	22
67,5 - 72,5		72,45	+12,20	+1,63	0,44845	0,11698	12
72,5 - 77,5		77,45	+17,20	+2,29	0,48899	0,04054	4
77,5 ve +		—			0,50000	0,01101	1
						1,00000	100

Temel veriler : $\bar{x} = 60,25$, $s = 7,495$, $n = 100$.

Sınıf aralıklarından hareketle önce, X ile gösterilen sınıf hudutlarının belirlenmesi gerekmektedir. Bundan sonra, $z = (X - \bar{x}) / s$ değerleri hesaplanmakta ve Φ (z) dağılım fonksiyonunun standard normal bölünme için tablo haline getirilmiş olan değerleri tesbit edilmektedir. Problemin işlenmesi açısından önem taşıyan değerler Tablo : 13'de yer almaktadır. Fonksiyon değerleri arasındaki ve her bir sınıfa tekabül eden farkların, nümune büyüklüğü (n) ile çarpımı teorik frekansları (sıklıkları) vermektedir.

Bölünme yoğunluğuna dayanan diğer bir hesaplama metodu (*ordinatlar metodu*) Tablo : 14'de görülmektedir. Burada, X ile gösterilen her sınıf ortası için $z = (X - \bar{x}) / s$ değeri hesaplanmış ve buna ait standard normal bölünme yoğunluğu φ (z) Tablo 13'e göre tesbit edilmiştir. Bu değerlerin n_i/s faktörü (n nümune büyüklü-

Tablo 13. Standard normal bölünmeye ait yoğunluk ve dağılım fonksiyonu (Tablodan bölüm).

z	$\varphi(z)$	$\Phi(z)$	z	$\varphi(z)$	$\Phi(z)$
0,00	0,39894	0,00000	1,37	0,15608	0,41466
0,03	0,39876	0,01197	1,63	0,10567	0,44845
0,29	0,38251	0,11409	1,64	0,10396	0,44950
0,37	0,37255	0,14431	1,71	0,09246	0,45637
0,63	0,32713	0,23565	1,97	0,05730	0,47558
0,70	0,31225	0,25804	2,03	0,05082	0,47882
0,96	0,25164	0,33147	2,29	0,02898	0,48899
1,04	0,23230	0,35083	2,37	0,02406	0,49111
1,30	0,17137	0,40320	3,99	0,00014	0,49997

ğünü ve i de sınıf genişliğini göstermektedir) ile çarpımı sonucu teorik frekanslar (normal eğri yüksekliği) elde edilmektedir.

Tablo 14. Teorik frekansların hesaplanması - 2. Metod.

Sınıf ortası (X) (1)	$(X - \bar{x})$ (2)	$z = (X - \bar{x})/s$ (3)	$\varphi(z)$ (4)	Teorik frekanslar (5) = (4) . n_i/s
45	—15,25	—2,03	0,05082	3,4
50	—10,25	—1,37	0,15608	10,4
55	— 5,25	—0,70	0,31225	20,8
60	— 0,25	—0,03	0,39876	26,6
65	+ 4,75	+0,63	0,32713	21,8
70	+ 9,75	+1,30	0,17137	11,4
75	+14,75	+1,97	0,05730	3,8
				(98,2)

Temel veriler : $\bar{x} = 60{,}25$, $s = 7{,}495$, $n = 100$, $i = 5$.

Ana hatları açıklanan bu metodlar ancak, nümuneye dayanarak tesbit edilen frekanslar yaklaşık olarak normal bir bölünme gösterdikleri takdirde avantajlı olabilecektir. Her iki hesaplama metodu da, seçilen sayısal örnek için pratik bakımdan aynı sonuçları vermektedir. Son olarak belirtilen mutlak frekanslar, nümunedeki birim sayısına (n) bölünmek suretiyle nisbileştirilebilir ve teorik ortalama değerin hesaplanmasında tartı faktörü olarak kullanılabilir. Bu değer söz konusu hal için 59,20 DM olmaktadır; bu durumda da envanter değeri 236 800 DM olarak gösterilecektir.

Nisbî frekanslar (yani Tablo : 12, sütun 7'de gösterilen satır farkları), a-priori ihtimallerle kombine edilerek Bayes teoremi kurallarına göre işlenmeye devam edilebilir. Bunun için yapılacak hesaplamalar Tablo: 15 de görülmektedir. A-posteriori ihtimallerin —sınıf fasılası sabit kalmak şartıyla—, çok basitleştirilmiş şekilde Tablo : 16'ya göre bulunabileceğine işaret etmek gerekir.

Tablo 15. A-posteriori ihtimallerin hesaplanması - 1. Metod.

Sınıf ortası (1)	Sınıf aralığı (2)	a-priori ihtimal (Tablo 11) (3)	Şartlı ihtimal (Tablo 12) (4)	Çarpımın ihtimali (5)	a-posteriori ihtimal (6)
45	42,5 - 47,5	0,02	0,03	0,0008	0,002
50	47,5 - 52,5	0,03	0,10	0,0030	0,013
55	52,5 - 57,5	0,15	0,21	0,0315	0,138
60	57,5 - 62,5	0,60	0,26	0,1560	0,633
65	62,5 - 67,5	0,15	0,22	0,0330	0,144
70	67,5 - 72,5	0,03	0,12	0,0036	0,016
75	72,5 - 77,5	0,02	0,04	0,0008	0,004
		1,00		0,2285	1,000

Tablo 16. A-posteriori ihtimallerin hesaplanması - 2. Metod.

Sınıf ortası (1)	a-priori ihtimal (Tablo 11) (2)	Yoğunluk φ (z) (Tablo 14) (3)	Çarpım (4) = (2) × (3)	a-posteriori ihtimal (5)
45	0,02	0,05082	0,001016	0,00
50	0,03	0,15608	0,004682	0,01
55	0,15	0,31225	0,046837	0,14
60	0,60	0,39876	0,239256	0,69
65	0,15	0,32713	0,049069	0,14
70	0,03	0,17137	0,005141	0,02
75	0,02	0,05730	0,001146	0,00
	1,00		0,347147	1,00

İhtimal yapısı, tartışma konusu örnek ile ilgili olarak, Bayes analizindeki birleştirme prosesi içerisinde önemli ölçüde genişlemiştir. Bunun sonucunda teorik ortalama değer 59,20 DM'dan 60,10 DM'a yükselmekte; toplam envanter değeri de böylece, sadece örnekleme sonuçlarının gözönüne alınması halinde, 236 800 DM'a karşılık 240 000 DM olmaktadır. Ayrıca, başlangıçtaki tahmine dayanarak 52,5-67,5 aralığı için tayin edilen ihtimal değerinin % 90 olduğunu belirtmek gerekir. Bu değer ilâve inceleme için % 69'a düşmekte, birleştirme prosesinde ise % 97'ye yükseltilmiş bulunmaktadır. Buna uygun olarak ihtimal bünyesinde yapılacak bir iyileştirme, geleneksel örnekleme metodlarının kullanılması halinde, ancak nümune büyüklüğünü — ve bu suretle de denetim maliyetlerini — önemli ölçüde arttırarak gerçekleştirilebilecektir.

III. *Bayes teoremine göre nümunenin, enformasyon değeri hesaplanarak değerlendirilmesi:*

Bayes analiz tekniğinin sağlıyacağı başarı, enformasyon değerinin hesaplanmasıyla arttırılabilir. Bu hesaplamalar genel olarak projeye bağlı şekilde yapılmakta ve *tam* (perfekt) veya *tam olmayan* (imperfekt) enformasyonlarla ilgili olabilmektedir.

Tam ilâve enformasyon, başlangıçtaki belirsizlikler bir ilâve inceleme süreci içersinde tamamen ortadan kaldırılabildiği takdirde mevcut olacaktır. Buna karşılık tam olmayan enformasyonlar belirsizliği ancak kısmen ortadan kaldırabilmektedir.

Tam ilâve enformasyon değeri, tam enformasyon durumundaki en iyi aksiyonun başarısına ait matematik ümitle önceki tam olmayan enformasyon durumu arasındaki farkı ifade etmektedir. $Q = q_i$ $(i = 1,2...)$ 'nin vukubulması halindeki aksiyonun başarısı $W(X = x_k \mid Q = q_i)$ ile gösterildiği ve $P(Q = q_i)$, $Q = q_i$'nin gerçekleşmesine ait a-priori ihtimali gösterdiği takdirde, $X = x_k$ aksiyonunun başarısının matematik ümidi

$$E(X = x_k) = \sum_i W(X = x_k \mid Q = q_i)\ P(Q = q_i)$$

şeklinde bulunacaktır.

Tam olmayan enformasyon durumunda en iyi aksiyona ait başarı için

$$E(X = x_k^*) = \max_k \sum_i W(X = x_k \mid Q = q_i) \; P(Q = q_i)$$

geçerlidir.

Şayet tam enformasyon mevcutsa en iyi aksiyonun başarısına ait matematik ümit,

$$E(X = x^*) = \sum_i \max_k W(x = x_k \mid Q = q_i) \; P(Q = q_i)$$

formülüyle elde edilebilir.

Tam ilâve enformasyon değeri (TIED) böylece,

$$\text{TIED} = \sum_i \left[\max_k W(X = x_k \mid Q = q_i) \; P(Q = q_i) \right] - \max_k \sum_i W(X = x_k \mid Q = q_i) \; P(Q = q_i)$$

olacaktır.

Tam olmayan bir ilâve enformasyon değerinin belirlenmesi biraz daha güç olmaktadır; çünkü inceleme dönemi başında farklı nümune büyüklükleri (n) ile çalışmak mümkündür. $P_n(Y = y_j \mid Q = q_i)$, n birimlik bir nümunede $Y = y_j$ ($j = 1,2...$) sonucunun, $Q = q_i$ gerçekleştiği takdirde ortaya çıkması ihtimalini göstermektedir. $P_n(Y = y_j)$ de, n sayıda birime dayanan bir örneklemede $Y = y_j$ durumunun tesbit edilmesine ait a-priori ihtimaldir; öyle ki

$$P_n(Q = q_i \mid Y = y_j) = P_n(y = y_j \mid Q = q_i) \; P(Q = q_i) \,/\, P_n(Y = y_j)$$

eşitliği geçerli olmaktadır. Birim sayısı n olan ve $Y = y_j$ durumunun gerçekleştiği planlanmış bir örneklemenin maksimum başarısına ait matematik ümit,

$$E_n^*(Y = y_j) = \max_k \left[\sum_i W(X = x_k \mid Q = q_i) \; P(Q = q_i \mid Y = y_j) \right]$$

şeklinde hesaplanacaktır.

n sayıda birime dayanan bir örneklemede maksimum matematik ümit, $Y = y_j$ ($j = 1,2,..$)'ye ait bütün potansiyel sonuçlar için

$$E_n^* = \sum_j E_n^* (Y = y_j)\ P_n\ (Y = y_j)$$

olmaktadır. Fakat,

$$P\ (q = q_i \mid Y = y_j)\ P\ (Y = y_j) = P\ (Y = y_j \mid Q = q_i)\ P\ (Q = q_i)$$

olduğu için

$$E_n^* = \sum_j [max \sum_k \sum_i W\ (X = x_k \mid Q = q_i)\ P\ (Y = y_i \mid Q = q_i)\ P\ (Q = q_i)]$$

de geçerli olmaktadır. n birimlik bir örneklemede tam olmayan ilâve enformasyon değeri (TOİED$_n$) bu durumda,

$$\text{TOİED}_n = E_n^* - E\ (X = x_k^*)$$

şeklindedir.

Enformasyon değeri fırsat maliyetleri yoluyla da hesaplanabilir. Bunları, hatalı bir karara bağlı olan başarı kayıpları olarak tanımlamak mümkündür. Tam ve tam olmayan ilâve enformasyonlar, başlangıçta gözönüne alınması gereken fırsat maliyetlerinin — sırasıyla — tam veya kısmî olarak elimine edilmesine yol açacaklardır. Fırsat maliyetleri öte yandan, karar verici tarafından mevcut enformasyon durumunda rasyonel olarak tercih edilecek olan ve en büyük nisbî tam maliyet tasarrufu ile tanımlanan aksiyonla ilgili bulunmaktadır. En basit halde, sadece alternatif proje uygulaması veya bundan vazgeçilmesi tartışma konusu olmakta; böylece, söz konusu nisbi maliyet tasarrufu nisbeten kolay olarak tayin edilebilmektedir.

TİED ile TOİED$_n$'nin elde edilmesinde kullanılmak üzere yukarıda ifade edilen formüllerden, gerekli değişiklikler yapılarak, karar vermeye hazırlık için de yararlanılabilir. $X = x_k$ aksiyonuna, $Q = q_i$'nin vukubulması halinde bağlı olan maliyetler $C\ (X = x_k \mid Q = q_i)$ ile gösterildiği takdirde, $P\ (Q = q_i)$ a-priori ihtimallerine göre beklenen maliyetler aşağıdaki şekilde ifade edilecektir:

$$E\ (X = x_k) = \sum_i C\ (X = x_k \mid Q = q_i)\ P\ (Q = q_i)$$

Rasyonel olarak tercih edilecek aksiyon için, kararın münhasıran maliyet esasına göre verilmesi gerektiği, ve paranın lineer bir fayda fonksiyonuna sahip olduğu varsayıldığı takdirde

$$E\ (X = x_k{}^*) = \min_k \sum_i C\ (X = x_k \mid Q = q_i)\ P\ (Q = q_i)$$

eşitliği geçerli olacaktır.

Tam ilâve enformasyon değeri

$$\text{TİED} = E\ (X = x_k{}^*) - E\ (X = x^*)$$

formülüyle bulunacaktır. Burada,

$$E\ (X = x^*) = \sum_i \left[\min_k\ C\ (X = x_k \mid Q = q_i)\ P\ (Q = q)\right]$$

dir. Tam ilâve enformasyon değeri böylece, tam olmayan enformasyon durumundaki en iyi aksiyona bağlı olan hatalı karar maliyetlerine tekabül etmektedir.

Tam olmayan enformasyon değerinin hesaplanması için aşağıdaki formüller kullanılacaktır:

$$E_n^*\ (Y = y_j) = \min_k \left[\sum_i\ C\ (X = x_k \mid Q = q_i)\ P_n\ (Q = q_i \mid Y = y_j)\right]$$

ve

$$E_n^* = \sum_j E^*\ (Y = y_j)\ P_n\ (Y = y_j)$$

Bu durumda tam olmayan ilâve enformasyon değeri

$$\text{TOİED}_n = E\ (X = x_k{}^*) - E_n{}^*$$

olmaktadır. Tam enformasyon değeri, ilâve incelemelerin uygulanmasından evvel veya sonra tayin edilebilir; buna uygun olarak Amerikan literatüründe, «a-priori ve a-posteriori tam enformasyon değerleri» ayırımı yapılmaktadır.

Kontrol dönemi başındaki gözlemlerde hata sıklığı sabit değildir; bu durumda beklenen bütün hata oranlarının (q_i), hesaplara dahil edilmesi ve diğer şartların değişmemesi halindeki (ceteris paribus kalıbı içindeki) optimal hareket tarzının tayininde kullanılması gerekmektedir. Nisbi olarak yüksek fırsat maliyetleri genel olarak, ilâve incelemeler yapılmasına sebep teşkil edeceklerdir. Fakat bunlara bağlı olan maliyetlerin, tam enformasyonun dönem başında tesbit edilmiş bulunan değerini aşmaması gerekir.

Şayet ilâve inceleme bir örnekleme şeklinde uygulanacaksa, azamî nümune büyüklüğü basit şartlar altında (maliyet fonksiyonunun bilinmesi), belirtilen tam enformasyon değerinin gözönüne alınması suretiyle yaklaşık olarak hesaplanabilir. Buna karşılık, optimal nümune büyüklüğünü bu esasa göre belirlemek mümkün değildir. Optimal nümune büyüklüğünün tesbit edilebilmesi için farklı örneklemelerin potansiyel değeri bilinmelidir; en büyük net enformasyon değerine sahip olan nümunenin gerçekleştirilmesi teklif edilecektir.

Söz konusu enformasyon değeri hesaplamaları, (diğer) örneklemelerin maksada uygunluğunun açık hale getirilmesi gerektiği takdirde muhasebe denetiminde de yapılabilir. Bu durumda en basit halde — diğer bütün projelerde olduğu gibi —, gerçekleştirme veya vazgeçme alternatifi mevcuttur. Her iki imkâna ait olan maliyetler, *denetimi uygulama ve denetimden vazgeçme maliyetleri* şeklinde gösterilmektedir.

Denetimi uygulama maliyetleri içersinde önce örnekleme maliyetleri yer almaktadır. Bunlar da, sabit maliyetler (F) ile nümunedeki birim sayısına (n) bağlı olan değişken maliyetlerden oluşmaktadır. Birim başına değişken maliyet k_1 ile gösterildiği takdirde, toplam örnekleme maliyetleri en basit halde aşağıdaki gibi olacaktır:

$$K_1 = F + nk_1$$

Bu maliyetlerin, tesbit edilen hata sayısına bağlı olan *hataları düzeltme maliyetleri* toplamı kadar arttırılması gerekmektedir. Beklenen hata sıklığı (hata tesbiti ihtimali) p, ye tesbit edilen hata başına düşen hata düzeltme maliyetleri de k_2 ile gösterildiği takdirde, toplam denetim maliyetleri aşağıdaki formüle göre hesaplanacaktır:

$$K_2 = F + nk_1 + npk_2$$

Denetimden vazgeçme maliyetlerine, başlangıçta tesbit edilmemiş olarak kalan hatalara ait maliyetler dahildir. Bunların seviyesini, muhasebe organizasyonu ve teşebbüs içindeki denetim düzeninin — aynı zamanda iç kontrol sisteminin — fonksiyon kabiliyeti önemli ölçüde etkilemektedir. Bu maliyetlerin tahmini güçtür; fakat buna rağmen hesaplamalara dahil edilmeleri gerekmektedir. Denetimin uygulanması veya denetimden vazgeçilmesi hakkında doğrudan doğruya söz konusu maliyetlere dayanarak karar verilemiyecektir. Bu karara daha çok, ilgili beklenen değerler esas teşkil edecektir.

Basit bir örnekte, 2000 kartlık bir hesap sisteminin kontrol edileceği varsayılmıştır; a-priori ihtimaller Tablo : 3'de (Sah. 370) görülmektedir. Bir tam incelemeye veya örneklemeye ait sabit maliyetler 50 DM'dır; değişken maliyetler birim başına 0,50 DM olarak alınmaktadır. Hata düzeltme maliyetleri, örneği basit tutmak amacıyla gözönüne alınmamıştır. Denetimden vazgeçme maliyetleri ancak hata oranının % 2 nin üstüne çıkması halinde söz konusu olacaktır. Bu konudaki yaklaşımlar Tablo: 17'de görülmektedir.

Tablo 17. A-priori alternatiflerin mukayesesi.

Satır No.	Hata oranı	a-priori ihtimal	Maliyet (DM)		Muhtemel maliyet (DM)	
			Tam denetim	Denetimden vazgeçme	Tam denetim	Denetimden vazgeçme
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6) = (3).(4)	(7) = (3).(5)
1	0,001	0,60	1.050,00	—	630,00	—
2	0,005	0,20	1.050,00	—	210,00	—
3	0,01	0,10	1.050,00	—	105,00	—
4	0,02	0,05	1.050,00	1.000,00	52,50	50,00
5	0,03	0,03	1.050,00	2.000,00	31,50	60,00
6	0,04	0,01	1.050,00	4.000,00	10,50	40,00
7	0,05	0,01	1.050,00	8.000,00	10,50	80,00
8	Beklenen değer				1.050,00	230,00
9	Nisbî maliyet tasarrufu				—	820,00
10	En iyi aksiyon					X

Tablo: 17 ayrıca a-priori ihtimallere dayanan bir analizde denetimden vazgeçmenin yerinde olabileceğini göstermektedir. Bir hatalı karar tehlikesi her halde mevcuttur. Tam denetim, $q_1 \geqslant 0{,}03$ şeklindeki gerçek bir hata oranında denetimden vazgeçme durumuna kıyasla daha düşük maliyetlere yol açacaktır. Nisbî maliyet tasarrufu 820 DM olmaktadır.

Tahmindeki belirsizliği bir ilâve inceleme ile azaltmaya teşebbüs edildiği takdirde, böyle bir inceleme için en fazla 127,50 DM (mutlak azamî mümkün enformasyon kazancı, TİED) harcamak gerekecektir. İki alternatif hesaplama tarzı Tablo : 18'de görülmektedir. İlk belirtilen metod, TİED'nin hesaplanmasında kullanılan ve daha önce üzerinde durulmuş olan formüllerden ortaya çıkmaktadır; fakat pratik maksatlar için fazla tavsiye edilmemektedir.

Tablo 18. Tam enformasyon değerinin hesaplanması.

Satır No. (1)	Hata oranı (2)	a-priori ihtimal (3)	Asgarî maliyet (DM) Tam denetim/ Denetimden vazgeçme (Tablo 17) (4)	Beklenen değer(DM) (5) = (3) . (4)	En iyi aksiyon lehine maliyet farkı (DM) (Tablo 17) (6)	Deklenen değer(DM) (7) = (3) . (6)
1	0,001	0,60	—	—	—	—
2	0,005	0,20	—	—	—	—
3	0,01	0,10	—	—	—	—
4	0,02	0,05	1.000,00	50,00	—	—
5	0,03	0,03	1.050,00	31,50	950,00	28,50
6	0,04	0,01	1.050,00	10,50	2.950,00	29,50
7	0,05	0,01	1.050,00	10,50	6.950,00	69,50
8	Beklenen değer			102,50	—	127,50
9	Tablo 17'ye göre beklenen değer			230,00	—	—
10	Tam enformasyon değeri (9 - 8)			127,50	—	127,50

Bir ilâve inceleme için azamî 127,50 DM harcanması gerektiği şeklindeki ifade, ancak ilâve incelemenin tam enformasyon sağlaması şartıyla geçerli olacaktır. Bu normal olarak gerçekleşmediği için, bir ilâve incelemede kabul edilebilir azamî maliyetlerin tam olmayan enformasyon durumunda tayin edilmesi gerekmektedir. Seçilen sayısal örnek için gerekli olan — ve önceki formüllere uyan — hesaplamalar Tablo : 19 ve Tablo : 20'de görülmektedir. Bu hesap-

(n birimlik nümunenin kullanılması halinde boklenen maliyet) elde edilmektedir.

Tablo 20. Tam olmayan enformasyon değerinin hesaplanması.

n = 100 olması halinde alternatif nümune sonuçları					
Satır No. (1)	Hata oranı (2)	Beklenen değer (3)	En iyi aksiyon (4)	En iyi aksiyonun q_i için muhtemel maliyetleri (DM) (5)	Beklenen değer (DM) (6) = (3).(5)
1	0,00	0,7096	Denetimden vazgeçme	14,00	9,93
2	0,01	0,1703	Denetimden vazgeçme	163,00	27,84
3*	0,02	0,0588	Denetimden vazgeçme	070,00	39,40
4	0,03	0,0279	Denetimi uygulama	1.050,00	29,30
5	0,04	0,0151	Denetimi uygulama	1.050,00	15,85
6	0,05	0,0085	Denetimi uygulama	1.050,00	8,93
7	a-prepostoriori beklenen değer				131,25
8	a-priori beklenen değor (Tablo 17)				230,00
9	Tam olmayan enformasyon değeri (8-7)				98,75

* Tablo : 19.

n = 100, $q_i = 0{,}02$ için yapılaoak hesaplamalar, aynı şokilde gorekli olan ihtimal dağılımları Tablo : 6'da yer aldığı içın kolayca tamamlanabilir. Ayrıoa, $E_n\ (Y = y_j)\ P_n\ (Y = {}_j) = (670).\ (0{,}0588) = 39{,}40$ dır.

Tam olmayan enformasyon doğeri, $TOİED_n$, bu verilere göre aşağıdaki gibi hesaplanacaktır:

$$TOİED_n = E\,(X = \overset{*}{x_k}) - E_n = 230 - 131 = 99\,.$$

lamalara 100 birimlik ($n = 100$) petansiyel bir nümune esas teşkil etmektedir.

Tablo 19. a-preposteriori alternatiflerin mukayesesi.

Satır No.	Hata oranı	a-preposteriori ihtimal (Tablo 6)	Maliyet (DM)		Muhtemel maliyetler (DM)	
			Tam denetim	Denetimdon vazgeçme	Tam denetim	Denetimden vazgeçme
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6) = (3) . (4)	(7) = (3) . (5)
1	0,001	0,046	1.050,00	—	48,30	—
2	0,005	0,258	1.050,00	—	270,90	—
3	0,01	0,313	1.050,00	—	328,05	—
4	0,02	0,230	1.050,00	1.000,00	241,50	230,00
5	0,03	0,114	1.050,00	2.000,00	119,70	228,00
6	0,04	0,025	1.050,00	4.000,00	26,25	100,00
7	0,05	0,014	1.050,00	8.000,00	14,70	112,00
8	Beklenen değer				1.050,00	670,00
9	Nisbî maliyet tasarrufu				—	430,00
10	En iyi aksiyon					X
Temel veriler : $n = 100$, $q_i = 0{,}02$.						

Table 19, $q_i = 0{,}02$ kabul edilcrek, ve Tabio : 6 (Salı. 374) alınmış bulunan a-prepostcrieri ihtimallerle (yani, söz konusu ilâve incelemenin fiilen uygulanmasından önce) hazırlanmıştır. Bu table, tam denetim ve denetimden vazgeçme hallerindeki beklenen maliyetleri ve tercib edileeek aksiyenun — burada denetimden vazgeçmenin — sağlıyacağı nisbî maliyet tasarrufunu göstermektedir. Bununla ilgili besaplamaların, pratik bakımdan önem taşıyan diğer bütün hata oranları için de yapılması ve elde edilen senuçların genel incelemeye dahil edilmesi gerekmektedir.

Genel inceleme için gerekli olan hesaplanalar da Table : 20'de görülmektedir. Farklı nümune senuçlarında ceteris paribus kalıbı içinde ertaya çıkan ve E ($Y = y_j$) ile gösterilen a-prepesterieri beklenen değerlerin P_n ($Y = y_j$) ihtimalleri ile çarpılması gerekmektedir. Böylece bulunan ara senuçların toplamı olarak, aranan E^*, değeri

Buradan, net enformasyon değerinin negatif olmaması gerektiği takdirde, ilâve enformasyon temini için — diğer şartlar aynı kalmak üzere — azamî 99 DM'lık harcama yapılabileceği sonucu çıkmaktadır. Bundan sonra kullanılabilecek verilere dayanarak, n = 100 birimlik bir ilâve incelemenin üst sınır halini temsil ettiği sonucuna varılmaktadır. Hesaplama tarzı şöyledir:

$$(\text{TOİED}_{100} - F) / k_1 = (99 - 50) / 0{,}5 = 98 .$$

Buraya kadar ana hatlarıyla belirtilen hesaplamalar, optimal nümune büyüklüğünün yaklaşık olarak tayini için (söz konusu halde örneğin, n = 50 ve n = 75 için) tekrar edilecek ve en büyük net enformasyon değerine sahip olan alternatifin gerçekleştirilmesi önerilecektir. Bu hesaplamaların burada ayrıca gösterilmesinden sarfınazar edilmiştir.

Plânlanan ilâve incelemenin gerçekten yapılmış olduğu, ve bunun sonucunda 100 birimlik (n = 100) bir nümunede üç hata tesbit edildiği varsayılmaktadır. Bu suretle enformasyon deeğrinin a-pos-

Tablo 21. a-posteriori alternatiflerin mukayesesi.

Satır No.	Hata oranı	a-posteriori ihtimal (Tablo 7)	Maliyet (DM)		En iyi aksiyon lehine maliyet farkı (DM) (4) > (5) olduğu takdirde	Beklenen değer (DM)
			Geri kalan bölümün denetimi	Denetimden vazgeçme		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6) = (4) — (5)	(7) = (3) . (6)
1	0,001	0,004	1.000,00	—	1.000,00	4,00
2	0,005	0,090	1.000,00	—	1.000,00	90,00
3	0,01	0,220	1.000,00	—	1.000,00	220,00
4	0,02	0,324	1.000,00	1.000,00	—	—
5	0,03	0,241	1.000,00	2.000,00	—	—
6	0,04	0,070	1.000,00	4.000,00	—	—
7	0,05	0,051	1.000,00	8.000,00	—	—
8	Beklenen değer		1.000,00	1.494,00	—	314,00
9	Nishî maliyet tasarrufu (4):(5)		494,00			
10	En iyi aksiyon		X			

Temel veriler : $n = 100$, $q_i = 0{,}03$.

teriori ihtimallere dayanarak hesaplanması imkânı ortaya çıkmaktadır. (Bkz. Tablo : 21). Bu tabloda yer alan a-posteriori ihtimaller (satır farkı olarak) Tablo : 7'den elde edilmiştir. Denetimden vazgeçme maliyetleri değiştirilmeden bırakılmıştır; denetim maliyetleri artık geriye kalan (daha kontrol edilmemiş olan) 1900 adet hesapla ilgili olmaktadır.

Tablo 21, ilk olarak a-priori ihtimaller yardımıyla yapılan analize karşılık, elde edilen sonuçlara göre denetimi uygulamanın yerinde olacağını göstermektedir. Hatalı karar maliyetleri 314 DM'dır. Durumun yorumu şöyledir: Hata oranı kesinlikle 0,01 ile 0,02 arasında olsaydı, denetimden vazgeçme doğru karar olacaktı. Bu takdirde, beklenen değeri 314 DM olarak gösterilen ilgili denetim maliyetlerinden tasarruf edilebilecekti.

Bu tip enformasyon değeri hesaplamaları pratik bakımdan ancak nadir hallerde yapılacaktır. Muhasebe denetiminde daha az tanınan durumlar için ise, burada üzerlerinde durulmayacak olan basitleştirilmiş hesaplama metodları geliştirilmiştir.