STOK KESİM PROBLEMLERİ VE DOĞRUSAL PROGRAMLAMAYA DAYANAN BİR ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Doç. Dr. Gökay SÜRSAL
İ. Ü. İşletme Fakültesi
Üretim Yönetim Kürsüsü

The Cutting Stock Problems And A Solution Algorithm By Linear Programming

Stok kesim problemi bir veya daha çok boyutlu stoktan müşteri siparişlerine uygun malzemelerin genellikle minimum fire kriterine göre kesimi olarak tanımlanabilir.

Bu makalede bir iki ve üç boyutlu stok kesim problemleri ve bunların çözümünde kullanılmak üzere geliştirilen karar modelleri anlatılmakta, minimum fire kriteri yanında kesim modellerinin optimum sıralarının saptanmasının problemin optimum çözümü için gerekll olduğuna dikkat çekilmektedir.

Cutting stock problem can be defined as processing orders with one or more dimensions froni stock according to the minimum wastage criteria.

In this article cutting stock problems with one, two or three dimensions are considered, and the decision models used in solving such problems are summarized. In obtaining optimal solution sequencing of cutting patterns must be taken into consideration beside the minimum wastage criteria.

I. GİRİŞ

Bu makalede ele alınan stok kesim problemi özellikle cam, saç ve alüminyum levha, sunta, kâğıt ve plastik sanayi için önem taşımaktadır. Bu sanayi dallarında tüketici gereksinmelerini karşılamak için mamulün standart boyutlarda üretilmesi zorunludur. Ancak tüketici için gerekli olan boyutların her zaman bu standartlara uyması beklenemez. Buna rağmen üretici boyut standartlarının sayısını kısıtlıyarak ölçek ekonomisinden yararlanmak için her standart boyuttan çok sayıda üretmeyi tercih etmektedir. Bu nedenle tüketici siparişlerindeki boyutlar göz önünde bulundurularak en az fire veren standart boyutların saptanması gerekir Mamulleri ham madde olarak kullanan fabrikalar ise üretim gereksinmeleri olan levha veya ruloları kesim sırasında en az fire verecek boyutlarda sipariş etmek, kesim işlemi için optimum kesim modellerinden yararlanarak fireyi minimize etmek durumundadırlar.

Problem stok rulodan sipariş edilen çeşitli endeki ruloların kesimi halinde tek boyutlu stok kesim problemi olarak tanımlanır. Büyük dikdörtgen stok levhalardan sipariş edilen daha küçük levhaların kesimi ise iki boyutlu stok kesim problemi olarak nitelendirilir. Problemin üç boyutlu örneği için ağaç kütüklerinden çeşitli boyutlarda kerestenin kesilmesi verilebilir. Ayrıca tren vagonlarının veya TIR kamyonlarının yüklenmesi ile üç boyutlu stok kesim problemi arasında da kesin bir benzerlik kurulabilir.

Böyle bir problemde amaç mevcut hacimlerin içine yükleme yaparken boş hacimlerin toplamının minimizasyonudur.

II. TEK BOYUTLU STOK KESİM PROBLEMİ

Tek boyutlu stok kesim problemi E enindeki bir rulodan U_i adet e_i, $i=1, \ldots, n$ eninde şeritin en az fire verecek biçimde kesimi olarak tanımlanabilir. Problemin doğrusal programlama gösterimi ;

$$\min \sum_j x_j \qquad [1]$$

Kısıt :

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq U_i$$

U_i, $i=1, \ldots n$ = e_i eninde talep edilen rulo sayısı

x_j = j'inci kesim planının uygulanış sayısı

$a_{i,j}$ = her j'inci kesim planı uygulandığında e_i eninde kesilen rulo sayısı

şeklindedir.

Stok ruloların sayısı birden fazla ve her biri farklı uzunlukta ise stok rulo maliyeti c_j olarak kabul edilerek amaç fonksiyonu,

$$\sum_j c_j x_j$$

şeklini alır.

Doğrusal programlama modelindeki kolon sayısının azaltılması ve problemin basitleştirilmesi için GILMORE ve GOMORY (1) tarafından önerilen yöntem DANTZIG (2)'in «knapsack» algoritmasının uygulanması şeklindedir. «Knapsack» problemi şöyle tanımlanabilir :

---

(1) P.C. Gilmore ve R.E. Gomory, «A Linear programming Approach to the Cutting Stock Problem - Part II», Opns. Res. II, s. 863 - 888 (1963).

(2) George B. Dantzig, «Discrete Variable Extremum Problems», Opns. Res. 5, 161 - 310 (1957).

$\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_m$ doğrusal programlama problemindeki temel uygun çözüme giren m adet denkleme ilişkin lagrange çarpanları veya gölge fiyatları olarak alınırsa problem,

$$\max \pi_1 a_1 + \pi_2 a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \pi_m a_m \qquad [2]$$

Kısıt :

$$u_1 a_1 + u_2 a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_m a_m \leqslant U$$

$$a_1 = i = 1, \ldots m > 0$$

şeklindedir.

GILMORE ve GOMORY tarafından önerilen çözüm yöntemlerinin her ikisi de yineli hesaplamaya dayanan dinamik programlama ve dal ve sınır algoritmalardır. (1) ve (3)'de bu yöntemler ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Burada kısaca stok kesim probleminde 'knapsack' algoritmasından nasıl yararlanılabileceğini göstermek istiyoruz.

«KNAPSACK» PROBLEMİ

Stok kesim probleminin doğrusal programlama için gösterimi matris notasyonu ile aşağıdaki gibidir ;

$$\bar{A}\,\bar{x} = \bar{b} \qquad [3]$$

Matrislerin açık olarak yazılımı ise şöyledir ;

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -c_1 & -c_2 & \ldots & c_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N_m \end{bmatrix} \qquad [4]$$

Ayrıca x vektörüne ve A matrisine gevşek değişkenler de ilave edilirse gösterim tamamlanmış olur.

Herhangi bir tablonun temel değişkenleri $x_1, x_2 \ldots, x_m$ varsayılırsa, $\bar{x}$ ve $\bar{A}$ aşağıdaki gibi ayırıma tabi tutulabilir ;

$$\bar{x} = \left[\frac{\bar{x}_b}{\bar{x}_n} \right] \quad \text{ve} \quad \bar{A} = \left[\bar{B} \;\middle|\; \bar{A}_1 \right] \qquad [5]$$

$\bar{x}_b = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$

$\bar{x}_n$ = Temel olmayan değişkenler vektörü

$\bar{B}$ = $\bar{A}$'nın $\bar{x}_b$'ye karşı gelen kolonları

$\bar{A}_1$ = $\bar{A}$'nın $\bar{x}_n$'e karşı gelen kolonları

[3] . denklem yeniden yazılırsa ;

$$[\bar{B} \vdots \bar{A}_1] \left[\frac{\bar{x}_b}{\bar{x}_n} \right] = \bar{b} \qquad [6]$$

veya

$$\bar{B}\,\bar{x}_b + \bar{A}_1\,\bar{x}_n = \bar{b} \qquad [7]$$

[7] B^{-1} ile çarpılırsa $\bar{x}_b$'nin temel değişken vektörü olduğu simpleks tablosunun matris gösterimi elde edilir.

$$\bar{x}_b + \bar{B}^{-1}\,\bar{A}_1\,\bar{x}_n = \bar{B}^{-1}\,\bar{b}$$

$\bar{A}$'nın tüm kolonlarını geliştirerek çözüme girecek temel değişkenin seçilmesi uzun hesaplamalara dayanması nedeniyle $\bar{P} = [-e, a_1\ a_2, \ldots, a_m]$ gibi herhangi bir uygun kesim modelini tanımlayan $\bar{P}$ vektöründen yararlanarak ($\bar{P}$ ise $\bar{A}$'nin bir kolonuna karşı gelir) $\bar{B}_1^{-1}$ P'yi maksimize eden $\bar{P}$ araştırılarak, [2]'deki denklemi gerçekleyen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tamsayı de-

(3) P.C. Gilmore ve R.E. Gomory, «A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem», Opns. Res. 9, 849 - 859 (1961).

ğerleri bulunabilir (*). Elde edilen değerler uygun bir kesim modelini tanımlar ve karşı gelen değişken çözüme girecek temel değişken olarak seçilir (4).

BARNETT ve KYNCH (5) bazı varsayımlar altında iki boyutlu stok kesim problemi için kolay ve kesin çözüm yöntemi geliştirmişlerdir. Yapılan varsayım ise dikdörtgen bir alanın, A birim eninde ve a uzunluğuuda (a birim değerden büyük bir tam sayı) küçük dikdörtgenlere bölüneceğidir. A alanının kenarları a'dan büyük tamsayılı ölçüler l_1 ve l_2'dir.

Yukardaki varsayımlar altında,

$l_1 = m_1 a + n_1$

$l_2 = m_2 a + n_2$

m_1, m_2, n_1, n_2 tamsayı ve $m_1, m_2 > 0$; $a > n_1 \geqslant 0$; $a > n_2 \geqslant 0$.

BARNETT ve KYNCH, A alanının $n_1 n_2$ ($n_1 + n_2 \leqslant a$) veya $(a - n_1) \times (a - n_2)$, (hangisi daha küçükse) büyüklüğünde fire verecek şekilde kesimlenebileceğini ortaya koymuşlardır. Her iki şekilde de minimum fire $\leqslant 0.25\ a^2$'dir. $n_1 + n_2 = a$ durumunda ise sonuç eşit çıkmaktadır.

Ancak problemin her zaman bu varsayımlarla basitleştirilmesi olanak dahilinde olmayabilir. İki boyutlu problemin tek boyutlu problemlerde olduğu gibi knapsack problemi ile gösterimi mümkün ise de bu tip bir knapsack problemi için ekonomik bir çözüm elde etmek mümkün değildir. Bu nedenle iki boyutlu problemlerde kesim yöntemlerine ilişkin bazı gerçekçi varsayımlarla problemi doğrusal programlama ile çözümleme olanağı aramak gerekir (6).

IV. İKİ KADEMELİ GİYOTİN KESİMİ

4.1. PROBLEMİN TANIMI

Gerçekten, giyotin kesimi olarak adlandırılan kesim çeşitli sanayi dallarında ve çeşitli tip makinelerde uygulanır. Giyotin kesimde bir levhanın

(*) Dinamik programlama hesaplamaları için

$$P_{s+1}(x) = \max_s \{r\pi_{s+1} + P_s(x - rl_{s+1})\},\ [0 \leqslant r \leqslant (x/l_{s+1})]$$

formülasyonundan yararlanılmaktadır.

(4) R.G. Dyson ve A.S. Gregory, «The Cutting Stock Problem in the Flat Glass Industry», Opns. Res. 25, 50 (1974).

(5) S. Barnett ve G.J. Kynch, «Exact Solution of a Simple Cutting Problem» Opns. Res. 15, 1051 - 1056, (1967).

(6) P.C. Gilmore ve R.E. Gomory, «Multistage Cutting Stock Problems of Two or More Dimensions» Opns. Res. 13, 94 - 120 (1965).

bir kenarında başlayan kesme işlemi levhanın diğer kenarına kadar kesiksiz, düz bir hat üzerinde sürdürülür: örnek, kâğıt kesme işlemi için kullanılan giyotin. Bu kesim şekli muhtemel kesim modellerinin sayısını büyük ölçüde azaltır. Ancak gene de geri kalan kesim modelerinin sayısı oldukça fazladır. Bu makalede bazı sanayi dallarında uygulanan daha gerçekçi kesim modelleri üzerinde durulacaktır. Bu tip kesim modelleri bir ölçüde hesaplama kolaylığı da sağlamaktadır.

Özel bazı kesim modellerini incelemeden önce malzemelerin izotropik özellikleri üzerinde durmak stok kesim problemlerinde karşılaşılabilecek bir başka sorunu ortaya koymak açısından yararlı olacaktır. Cam, saç levha ve benzeri malzemeler izotropiktir. Yani, $e_i x u_i$ boyutlarında bir dikdörtgenin ExU boyutlarındaki malzemeden kesilirken kesiliş konumunun önemi yoktur. Ancak oluklu mukavva, veya benzeri bir malzeme izotropik olmaması nedeniyle kesiliş konumu önem kazanır. Bu çalışmada ele alınacak malzemelerin izotropik oldukları varsayılmakta, izotoprik olmayan malzemelerin ortaya çıkarabileceği sorun ihmal edilmektedir.

4.2. PROBLEMİN KADEMELİ DOĞRUSAL PROGRAMLAMA İÇİN GÖSTERİMİ

İki boyutlu stok kesim problemi kademeli doğrusal programlama yöntemi ile çözümlenebilmektedir. Bu tip doğrusal programlama problemleri için DANTZIG ve WOLFE (7) ayrışım yöntemi bilgisayar zamanından büyük ölçüde kazanç sağlamaktadır (8). Ancak bu çalışma için kullanılan IBM 370 Model 135 bilgisayarı ayrışım yöntemine gerek göstermeden kademeli doğrusal programlama için geliştirilmiş 25 değişkenden oluşturulan modeli 4 dakika içinde çözümlemiştir.

Problem şöyle tanımlanabilir ;

$$\text{Min } \sum_j x_j^{\circ} \qquad [9]$$

Kısıt :

$$\bar{A} . x \geqslant \bar{N}$$

(7) George B. Dantzig ve Philip Wolfe, «Decomposition Principle for Linear Programs», Opns. Res. 8, 101 - 111 (1960).

(8) Frederich S. Hillier ve Gerald J. Lieberman, *Operations Research*, Holden - Day, Inc., San Francisco, 1974, s. 680 - 690.

Kullanılan notasyon :

x_j^o = Şeritleri elde etmek için boyuna kesim modelinin kullanılış sayısı

x_j^s = e_s enindeki şeritleri doğramak için enine kesit modelinin kullanılış sayısı

Problemin matris gösterimi ise aşağıda verilmiştir :

$$[x_1^o, x_2^o, \ldots, x_m^o \mid x_1^1, \ldots, x_m^1 \mid x_1^m, \ldots, x_m^m \mid u_1, u_2, \ldots, u_m]$$

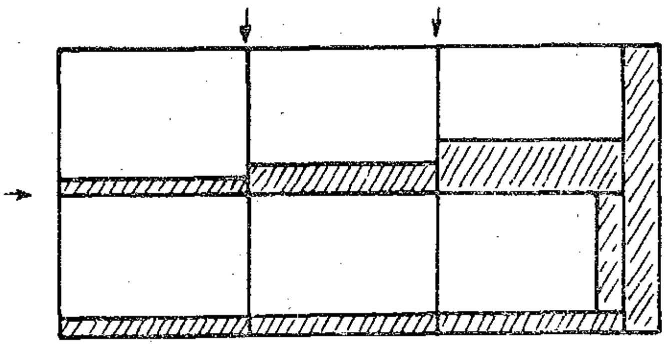
$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} & -1, \ldots, -1 & 0 & \\ A_o & 0 & & 0 \\ & & -1, \ldots, -1 & \\ \hline & A_1 & & \\ \cline{2-2} 0 & & & -I \\ & 0 & A_m & \\ \cline{3-3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \\ \hline \\ \bar{N} \\ \\ \end{array}\right]$$

A_o matrisinin kolonları stok kesim işleminin ilk kademesi olan boyuna kesim modellerini tanımlar. $A_1, \ldots, A_m$ matrisleri ise e_s enindeki şeritlerin enine kesim modellerini göstermektedir. A_s kolonlarının ilk m satırının değeri 0'dır. Sadece s. satırın değeri — 1'dir. m + i, i = 1, ..., s satırlarında ise $\sum_i a_i u_i \leqslant U$ eşitsizliğini sağlayan sıfırdan büyük tamsayılar vardır. Nihayet $[A_m + 1]$ 2mxm boyutunda bir matristir. İlk m satırı sıfır, ikinci m satırı ise $-I$, gevşek değişkenlerin katsayılarını gösterir. $\bar{x}$ kolon vektörü A matrisine uygun olarak x değişkenlerini ve gevşek değişkenleri gösterir. $\bar{N}$, 2 m boyutunda m satırlık sıfır vektörü ile m satırlık talep vektöründen oluşmuştur. Talep vektöründe sipariş edilen levhaların talep düzeyleri e_i boyutlarına göre küçükten büyüğe doğru sıra ile yerleştirilmiştir.

İlk m denklem ilk kesim kademesi sonucu elde edilen şeritleri, ikinci m denklem ise müşteri siparişlerini karşılamak üzere şerittlerin enine doğranması sonucu elde edilen dikdörtgen şeklindeki levhaları göstermektedır.

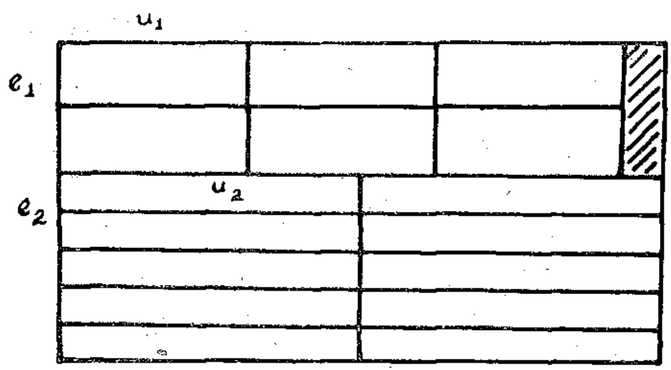
V. İKİ BOYUTLU KESİM TİPLERİ

Yukarıda ele alma iki kademeli ve iki boyutlu giyotin kesimi «genel iki boyutlu kesim» olarak nitelendirilmektedir. Ancak özellikle cam ve çelik endüstrisinde uygulanan iki boyutlu kesim işlemi daha farklı özellikler taşımaktadır. Bu kesim yöntemleri tek grup, çift grup ve üç kademeli giyotin kesimi olarak adlandırılmıştır (9). Makinelere ve üretim teknolojisine bağımlı olarak geliştirilen bu yöntemler hem kesim işlemini kolaylaştırmakta hem de stok kesim problemindeki seçenek kesim modellerinin sayısını büyük ölçüde kısıtlamaktadır. Aşağıda Şekil - 1'de tek grup kesim modeli görülmektedir.



Şekil : 1

Çift grup kesim modeli iki farklı tek grup kesim modelinin aym ExU boyutlarındaki bir levha için düzenlenmesi ile geliştirilir. Şekil : 2 de çift grup kesim modeli için bir örnek verilmiştir. Her iki tip kesimde de $e_i x u_i$ boyutlarının eşit olması halinde kesim işlemi basitleşmektedir. Şekil : 1'de bu ölçülerin eşit olmaması hali için hazırlanmış bir kesim modeli ve giyotin kesiminin yapılacağı yerler gösterilmiştir.

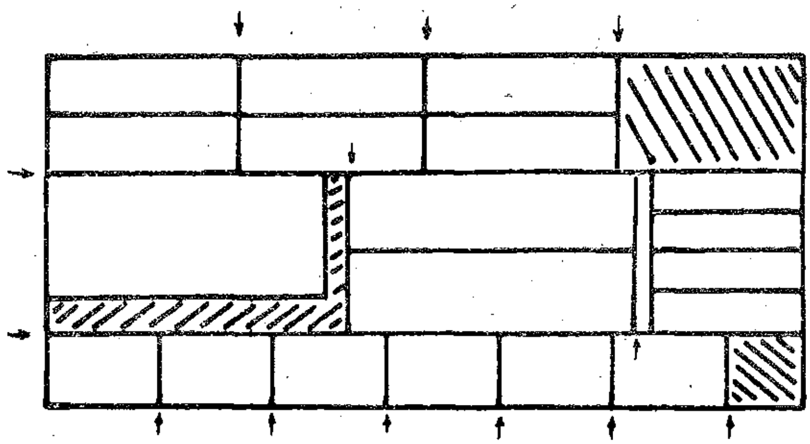


Şekil : 2

(9) P.C. Gilmore ve R.E. Gomory, a.g.m., s. 105 - 107.

Şekil : 2'de görülen kesim modeli iki ayrı gruptan oluşmuştur. e_1xu_1 ve e_2xu_2 sırası ile birinci ve ikinci gruptan kesilecek parçaların boyutlarıdır. Parça boyutları gruplar içinde değişmemektedir. Bu türlü bir düzenleme kesim işlemini basitleştirmekte ve fire yüzdesinin çok düşük olmasını sağlamaktadır.

Üçüncü tip kesim modeli olan üç kademeli giyotin keshninde levha boyuna kesilip şeritler elde edildikten sonra enine doğranır, bu yoldan elde edilen levhalar tekrar boyuna kesilerek istenilen ölçüdeki levhalar hazırlanmış olur. Böyle bir kesim modeli Şekil : 3'de gösterilmiştir.



Şekil : 3

Bu şekilde bir kesim sonucu çeşitli boy ve ende levhaları tek stoktan elde etmek mümkündür. Ancak gerek kesim işlemi, gerekse optimal kesim modelinin hazırlanması daha zor olmaktadır.

VI. ÇEŞİTLİ BOYUTLARDAKİ STOKLARDAN İKİ KADEMELİ KESİM

Stok boyutları E_jxU_j, $j = 1, \ldots, n$ gibi çeşitli ise problemin gösterimi yeni bir gaye fonksiyonu ile [8] yapılır. Yeni gaye fonksiyonuna her farklı stok boyutu için birim yüzölçümü cinsinden bir maliyet katsayısı C_j, ilave edilir. C_j doğrusal programlama gösteriminde U_jxE_j kesim modeline karşı gelen kolonun katsayısı olarak alınır. Bu değişiklik yapıldıktan sonra model bilinen yöntemlerle çözümlenir.

VII. ÜÇ BOYUTLU STOK KESİM PROBLEMİ

Üç boyutlu stok kesim problemi için GILMORE ve GOMORY (10)' nin önerdikleri çözüm yöntemi, ExUxY gibi üç boyutun, Y (Yükseklik) boyutunu sabit tutarak $e_i x u_i x Y$ için optimal kesim modelinin araştırılarak $v(e_i x u_i)$ nin saptanması ve problemin genel iki boyutlu stok kesim problemine dönüştürülmesi şeklindedir.

Üç boyutlu stok kesim problemi için daha farklı bir yaklaşım ise KORTANEK ve SODARO'nun genel şebeke analizi modelidir (11). Şebeke analizi modelinin doğrusal programlama için gösterimi aşağıda verilmiştir :

$$\text{Min} \sum_{t,k,l} q_{kl}^{(t)} c_{kl}^{(t)} + \alpha v + \sum_k a_k p_k \qquad [10]$$

Kısıtlar :

$$\sum_{t,k,l} [v(c_k^{(t)}) - \sum_j v(d_j)\, n_{kjl}^{(t)}]\, c_{kl}^{(t)} - v = 0,$$

$$\sum_{t,k,l} n_{kjl}^{(t)} c_{kl}^{(t)} \geq D_j, \quad j=1,\ldots,N,$$

$$\sum_l c_{kl}^{(t)} - p_k = 0 \qquad \begin{matrix} k=1,\ldots,K, \\ t=1,\ldots,T, \end{matrix}$$

$$c_{kl}^{(t)} \geq 0 \text{ ve } P_k \geq 0.$$

a_k = Birim malzeme maliyeti,

$q_{kl}^{(t)}$ = $c_k^{(t)}$ parçasının $P_{kl}^{(t)}$ kesim modeline göre kesme işlemi (işçilik) maliyeti,

$n_{kjl}^{(t)}$ = $P_{kl}^{(t)}$ kesim modeli ile elde edüen d_j tipi parçaların sayısı,

p_k = k tipi girdi malzemelerinin sayısı,

---

(10) P.C. Gilmore ve R.E. Gomory, a.g.m., s. 108.

(11) K. Kortanek ve D. Sodaro, «A Generalized Network Model for Three-Dimensional Cutting Stock Problems and New Product Analysis, Ind. Eng. Vol. XVII, No. 11, 572 - 579, (Kasım, 1966).

$c_{ki}^{(t)}$ = $c_k^{(t)}$ tipi kesilen parça sayısı,

$c_k^{(t)}$ = Belirli kesim modeline göre elde edilen farklı boyutlarda kesilen parçaları tanımlar,

d_{kji} = d_j tipi mamul sayısı, $P_{ki}^{(t)}$ kesim modeli ile kesilmiş,

I_k = Belirli ExUxY boyutlarında k tipi temel girdi,

$P_{ki}^{(t)}$ = Kesim modeli, $i = 1, \ldots n_{k(t)}$,

D_j = d_j mamulü için toplam talep düzeyi,

$v(C_k^{(t)})$ = $C_k^{(t)}$ parçasının hacmi,

$V(d_j)$ = d_j mamulünün hacmi,

α = Birim hacim maliyeti,

v = Toplam fire miktarı.

Yukarıda tanımlanan problem doğrusal programlama koduna göre çözümlenebilir. Ancak bu model optimal kesim modellerinin saptanması için değil optimal kesim sıralarının belirlenmesinde yardımcı olabilir. Kesim modellerinin önceden hazırlanıp modele yerleştirilmesi gerekmektedir.

VIII. STOK KESİM PROBLEMİ İÇİN YENİ BAZI KISITLAR

8.1. Kesim Bıçağı Sayısı İçin Kısıt

Bir rulo veya levhayı kesmek için kullanılan bıçakların sayısının genellikle makinaya bağlı olarak sınırlandırılması gerekir. Bunun için $a_{i,j} - 1 \leqslant R$ şeklinde bir kısıt yeterli olacaktır. Bu kısıtlayıcı koşulda R kesim bıçağı sayısı, $a_{i,j}$ ise j'inci kesim planı uygulandığında U_i uzunluğunda kesilen rulo sayısını gösterir.

8.2. Makinaların İş Yükü Dengelenmesi Problemi

Talebi karşılamak için birden fazla makina mevcut ise talebin tümünü tek bir makinada kesmek söz konusu olamaz. Bu nedenle iş yükünün dengeli bir şekilde makinalara dağıtılması gerekir.

Önce her makinanın kesebileceği en fazla rulo sayısı hesaba katılmalıdır. Atelyede P adet makina mevcut ise, ve r'inci makina U_r uzunluğunda Q_r adet rulo kesebiliyor ise doğrusal programlama problemi ;

$$\min \textstyle\sum_{j,r} C_r X_{j;r} \qquad [11]$$

Kısıtlar :

$$\textstyle\sum_{j,r} a_{i,j;r} \geq N_i$$

ve

$$\textstyle\sum_j X_{j,r} \leqslant Q_r$$

şeklinde tanımlanabilir.

C_r = r'inci makinadan elde edilen rulonun maliyeti (veya uzunluğu)

$x_{j,r}$ = j'inci kesim modelinin r'inci makinada uygulanma sayısı.

$a_{i,j;r}$ = Bu işlem sonucu u_i uzunluğunda elde edilen rulo sayısı.

Yukarıdaki problemin 3 makina için matris gösterimi.

$$\left\| \begin{array}{llll}
c_1c_1 \dots c_1 & c_2c_2 \dots c_2 & c_3c_3 \dots c_3 & \\
A_1 & A_2 & A_3 & \geqslant N_1 \\
 & & & \dots\dots \\
 & & & \geqslant N_m \\ \hline
11 \dots 1 & & & \leqslant Q_1 \\
 & 11 \dots 1 & & \leqslant Q_2 \\
 & & 11 \dots 1 & \leqslant Q_3
\end{array} \right\|$$

şeklindedir (12).

IX. KESİM MODELLERİNİN SIRALANMASI

Üretim planlaması faaliyetinde stok kesim probleminden daha önemli bii sorun kesim modellerinin sıralanması işlemidir. Günümüze değin fabrika-

(12) P.C. Gilmore-R.E. Gomory, «A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem-Part II», Opns. Res., 11, 878 - 881 (1963).

larda üretim planlamasından sorumlu kişiler stok kesim modellerini siparişleri göz önünde bulundurarak elle yapmakta idiler. Günümüzde yöneylem araştırması tekniklerinin ve bilgisayarların yaygınlaşması bu işin bilgisayarlarda en etkin bir biçimde hazırlanmasına olanak tanımıştır. Ancak stok kesim modellerinin optimal olması üretim faaliyetlerinin düzenli ve verimli yürütülmesi için yeterli olmamaktadır. Örneğin, üretim bölümünde stok kesim modellerinden birinden üç ayrı siparişi karşılamak için kesim yapılırken bir stok levhasından yapılan kesim sonucu üç siparişin ikisi henüz tamamlanmadan biri tamamlanabilir.

O anda yarım kalan siparişlerden herhangi birisi sırada olan kesim modelinde yoksa o siparişin kesimi yarım kalacak, kesim modellerinde aynı parça tekrar edene kadar yarı mamul deposunda bekletilecektir. Bu nedenle kesim işlemini gerçekten optimize etmek için fire miktarım minimize eden gaye fonksiyonuna siparişlerin kesintisiz veya en az kesinti ile gerçekleştirilmesini sağlayacak ek bir gayenin ilâve edilmesi veya çok amaçlı bir gaye fonksiyonunun kullanılması yerinde bir yaklaşım olacaktır.

Literatürde bu konunun yeteri kadar ele alınmadığı dikkati çekmiştir. Sadece DYSON ve GREGORY (13) bir makalelerinde kesim modellerinin sıralanmasına ilişkin iki kademli bir yaklaşım önermişlerdir. Böyle bir model fire oranı ile kesim işleminde ortaya çıkan süreksizliğin (herhangi bir siparişin tamamlanamayarak uygun bir kesim modeline sıra gelene kadar bekletilmesi) minimizasyonu arasında ödün vererek en iyi kesim plan ve programlarını geliştirir. Sık sık değişen iş koşulları ve yeni siparişlerde düşünülürse böyle bir modelin süratli tepki gösterebilmesi zorunludur.

Önceki bölümlerde üzerinde durulan doğrusal programlama modeli böyle bir problem için yeterli olamamaktadır. Ancak problem iki aşamalı olarak düşünülürse, ilk aşamada doğrusal programlama ile en az fire veren kesim modelleri geliştirilir, ikinci aşamada ise kesim işlemindeki süreksizliği minimize edecek optimal kesim modelleri sırası saptanabilir. Sıralama problemi için çözümün gezgin satıcı problemlerine uygulanan LITTLE, MURTY, SWEENEY ve KAREL algoritması ile sağlanabileceğini DYSON ve GREGORY (14) önermişlerdir. Yapılan deneyimler böyle iki aşamalı modelin probleme teorik olarak çözüm sağlayabildiğini, ancak sipariş ve

(13) R.G. Dyson ve A.S. Gregory, «The Cutting Stock Problem in the Flat Glass Industry», Opns. Res. 25, 41 - 53 (1974).

(14) R.G. Dyson ve A.S. Gregory, a.g.m., s. 46 - 47.

kesim modeli sayısına bağımlı olarak bilgisayar zamanının gerçek problemlere ekonomik bir çözüm getirmeyecek düzeylere ulaştığını göstermiştir. Sıralama problemi için geliştirilecek daha etkin bir algoritma veya sezgisel bir yöntem böyle modeli bir daha yararlı bir noktaya ulaştırabilir.

X. ÖRNEK BİR UYGULAMA

İki boyutlu stok kesim problemi için III. bölümde kurulan modele uygun bir problem doğrusal programlama paketi ile IBM 370 Model 135'de çözümlenmiştir. Problemde stok boyutları ExU, 25×60 olarak alınmıştır. Talep edilen levha boyutları $e_i xu_i$ ise sırasıyla 5×15, 8×25 ve 10×20'dir. üç tip levha için sipariş düzeyleri ise 1000, 1500 ve 500 birimdir.

Uygulamada seçenek kesim modelleri elde hazırlanmıştır. Stok 7 ayrı şekilde boyuna kesilebilmektedir;

Seçenek No. e_i	x^0_1	x^0_2	x^0_3	x^0_4	x^0_5	x^0_6	x^0_7
5	5	3	3	1	0	1	1
8	0	1	0	2	3	0	1
10	0	0	1	0	0	2	1
$E-\Sigma e_i x^0_j$ $j=1,3$ $j=1,7$	0	2	0	4	1	0	2

Şeritlerin enine kesim seçenekleri ise şöyledir ;

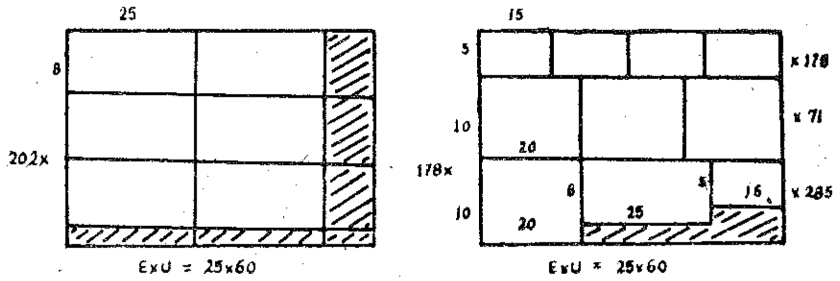
Seçenek No. u_i	x^1_1	x^2_1	x^2_2	x^3_1	x^3_2	x^3_3	x^3_4	x^3_5
15	4	0	2	0	1	1	0	1
25	0	2	1	0	0	1	1	0
20	0	0	0	3	2	1	1	1
$U-u_i x^s_j$	0	10	5	0	5	0	15	25

Problemin doğrusal programlama başlangıç tablosu Tablo No. 1'de verilmiştir. Optimal çözüme 8. tabloda ulaşılmıştır. Problemin sonucunun yorumu ve fire oranının hesaplanması şöyle yapılır :

ÇÖZÜME GİREN DEĞİŞKENLER	DEĞER
5	202
6	178
8	178
9	607
11	71
13	285

Değişken No.	5	6	8	9	11	13
Seçenek No.	x^{0}_{5}	x^{0}_{6}	x^{1}_{1}	x^{2}_{1}	x^{3}_{1}	x^{3}_{3}
m_1	0	1	—1	0	0	0
m_2	3	0	0	—1	0	0
m_3	0	2	0	0	—1	—1
m_4			4	0	0	1
m_5				2	0	1
m_6					3	1
Çözüm Değeri	202	178	178	607	71	285

Çözüm değişkenleri incelendiğinde 7 farklı boyuna kesim modelinden 5. ve 6. modellerin optimal kesim modelleri olarak seçildiği anlaşılmaktadır. 5. kesim modeli 202 defa, 6. kesim modeli ise 178 defa uygulanacaktır. Bu şekilde, boyuna kesim işlemi olan 1. kademe sonunda 380 şerit kesilmiş olacaktır. Enine kesim işlemi ise 2. kademede ele alınmaktadır. 5. kesim modelinin 202 defa uygulanması ile elde edilen 607 şeritin her biri 2 adet e_2xu_2 siparişini karşılayacaktır. 6. kesim modeli ise 178 defa uygulanacaktır. Elde edilecek 534 şeritin, 178'inden e_1xu_1 71'inden e_3xu_3 285'inden ise e_1xu_1, e_2xu_2 ve e_3xu_3 siparişleri karşılanacaktır. 5. ve 6. kesim modellerinin kesim şekilleri aşağıda şekil 4'de gösterilmiştir.



Şekil : 4

2 kademeli boyuna ve enine kesim sonucu elde edilecek toplam parça sayısının talep vektörüne uygunluğu ise şu şekilde konttrol edilebilir :

$$
\begin{array}{ll}
e_1 x u_1 & 178x4 + 285x1 = 997 \sim 1000 \\
e_2 x u_2 & 202x6 + 285x1 = 1497 \sim 1500 \\
e_3 x u_3 & 71x3 + 285x1 = 498 \sim 500
\end{array}
$$

Optimal kesim planına göre hesaplanan fire oranı ise % 17'dir.

XI. SONUÇ

Bu makalede geliştirilmiş olan kademeli doğrusal programlamaya dayanan stok kesim problemi çözüm yöntemi ile literatürde karşılaşılan çözüm yöntemleri arasında temel bir fark vardır. GILMORE ve GOMORY'nin geliştirdikleri çözüm yöntemi doğrusal programlama ayırışım ilkesinden yararlanmakta, çözüme girecek temel değişkenlerin seçiminde ise DANTZIG-in «knapsack» algoritmasını uygulamaktadır. Ancak iki ve üç boyutlu stok kesim probleminde «knapsack» probleminin ekonomik çözümü mümkün olmamaktadır. Doğrusal programlama modelinin bu çalışmada açıklandığı şekilde düzenlenmesi ile «knapsack» algoritmasının kullanılmasına gerek kalmamıştır.

KORTENAK ve SODARO'nun geliştirdikleri şebeke analizine dayanan yöntem ise optimal kesim modellerinin seçiminden ziyade seçenek kesim modellerinin geliştirilmesi ve bunların sıralanması yönünden etkin görünmekte, özellikle iki boyutlu stok kesim problemi için optimal çözüm sağlayacak bir yöntem olarak nitelendirilmemektedir.

Bu çalışmamızda geliştirilen stok kesim yönteminin farklı ve daha gerçekçi problemlere uygulanması ile yöntemin üstünlük ve kısıtları daha iyi anlaşılacaktır.

TABLO NO. 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
AMAC FONK.	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	−1.0	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00	−1.00
	−1.00	−1.00	−1.00	0.0	0.0	0.0	−9999.00	−9999.00	−9999.00	−9999.00	−9999.00	−9999.00
GORECE GETIRI	49994.00	39995.00	39995.00	2999.00	29996.00	29996.00	29996.00	29996.00	9998.00	19997.00	19997.00	19997.0
	19997.00	9998.00	9998.00	−9999.00	−9999.00	−9999.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
X (19)	5.00	3.00	3.00	1.00	0.0	1.00	1.00	−1.00	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0											
X (20)	0.0	1.00	0.0	2.00	1.00	0.0	1.00	0.0	−1.00	−1.00	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0											
X (21)	0.0	0.0	1.00	0.0	0.0	2.00	1.00	0.0	0.0	0.0	−1.00	−1.00
	−1.00	−1.00	−1.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	0.0	0.0	0.0
	0.0											
X (22)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.0	4.00	0.0	2.00	0.0	1.00
	1.00	0.0	1.00	−1.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	0.0	0.0
	1000.00											
X (23)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.00	1.00	0.0	0.0
	1.00	1.00	0.0	0.0	−1.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	0.0
	1500.00											
X (24)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.00	2.00
	1.00	1.00	1.00	0.0	0.0	−1.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00
	500.00											

Z = −29996976.00

TABLO NO. 5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
GORECE GETIRI	0.0	—0.07	0.0	—0.13	0.0	0.0	—0.07	0.0	19996.66	9998.27	29995.60	19996.9
	19996.90	19996.60	9997.90	—0.30	—9999.00	—9999.00	—9998.80	—9998.66	—9998.60	—9998.70	0.0	0.0
X (1)	1.00	0.60	0.50	0.20	0.0	0.0	0.10	0.0	0.0	0.10	0.10	0.15
	0.15	0.10	0.15	—0.05	0.0	0.0	0.20	0.0	—0.10	0.05	0.0	0.0
	50.00											
X (5)	0.0	0.33	0.0	0.67	1.00	0.0	0.33	0.0	—0.33	—0.33	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.33	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0											
X (6)	0.0	0.0	0.50	0.0	0.0	1.00	0.50	0.0	0.0	0.0	—0.50	—0.50
	—0.50	—0.50	—0.50	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.50	0.0	0.0	0.0
	0.0											
X (8)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	0.0	0.50	0.0	0.25
	0.25	0.0	0.25	—0.25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.25	0.0	0.0
	250.00											
X (23)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.00	1.00	0.0	0.0
	1.00	1.00	0.0	0.0	—1.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	0.0
	1500.00											
X (24)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.00	2.00
	1.00	1.00	1.00	0.0	0.0	—1.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00
	500.00											

Z = —19998272.00

TABLO NO. 8

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
GORECE GETIRI	—0.29	—0.24	—0.14	—0.19	0.0	0.0	—0.10	0.0	0.0	—0.10	0.0	—0.1
	0.0	—0.29	—0.67	—0.29	—0.67	—0.48	—9998.86	—9998.66	—9998.57	—9998.71	—9998.33	—9998.52
X (13)	8.57	5.14	4.29	1.71	0.0	0.0	0.86	0.0	0.0	0.86	0.0	0.71
	1.00	0.57	1.00	—0.43	0.0	0.29	1.71	0.0	—0.86	0.43	0.0	—0.29
	285.71											
X (5)	—1.43	—0.52	—0.71	0.38	1.00	0.0	0.19	0.0	0.0	—0.31	0.0	—0.12
	0.0	0.07	—0.17	0.07	—0.17	—0.05	—0.29	0.33	0.14	—0.07	0.17	0.05
	202.38											
X (6)	2.86	1.71	1.93	0.57	0.0	1.00	0.79	0.0	0.0	0.29	0.0	0.07
	0.0	—0.14	0.0	—0.14	0.0	—0.07	0.57	0.0	0.21	0.14	0.0	0.07
	178.57											
X (8)	—2.14	—1.29	—1.07	—0.43	0.0	0.0	—0.21	1.00	0.0	0.29	0.0	0.07
	0.0	—0.14	0.0	—0.14	0.0	—0.07	—0.43	0.0	0.21	0.14	0.0	0.07
	178.57											
X (9)	—4.29	—2.57	—2.14	—0.86	0.0	0.0	—0.43	0.0	1.00	0.07	0.0	—0.36
	0.0	0.21	—0.50	0.21	—0.50	—0.14	—0.86	0.0	0.43	—0.21	0.50	0.14
	607.14											
X (11)	—2.86	—1.71	—1.43	—0.57	0.0	0.0	—0.29	0.0	0.0	—0.29	1.00	0.43
	0.0	0.14	0.0	0.14	0.0	—0.43	—0.57	0.0	0.29	—0.14	0.0	0.43
	71.43											

Z = —1499.48

ÇÖZÜM DEĞİŞKEN	DEĞER
13	285.71436
5	202.38095
6	178.57146
8	178.57141
9	607.14282
11	71.42856

DIĞER TÜM DEĞİŞKENLER = SIFIR

YARARLANILAN KAYNAKLAR

S. Barnett v G.J. Kynch. «Exact Solution ol a Siuıple Cutting Problem», *Opcration: Research*, Vol. 15 (1967).

George B. Dantzig ve Philip Wolfe «Decomposition Principle for Linear Programs» *Operations Research*, Vol. 8 (1960).

George B. Dantzig, «Discrete Variable Extremum Problems», *Operations Research*, Vol. 5 (1957).

R.G. Dyson ve A.S. Gregory, «The Cutting Stock Problem in the Fiat Glass Industry» *Operations Research*, Vol. 25 (1974).

P.C. Gilmore ve R.E. Gomory, «A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem», *Operations Research*, Vol. 9 (1961).

P.C. Gilmore ve R.E. Gomory, «A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem - Part II», *Operations Research*, Vol. 11 (1963).

P.C. Gilmore ve R.E. Gomory, «Multistage Cutting Stock Problems of Two or More Dimensions» *Operations Research*, Vol. 13 (1965).

Frederick S. Hillier ve Gerald J. Lieberman, *Operations Research*, Holden - Day, Inc., San Francisco, 1974.

K. Kortanek ve D. Sodaro, «A Generalized Network Model for Three - Dimensional Cutting Stock Problems and New Product Analysis», Industrial Engineering, Vo. XVII, No. 11 (1966).