



**TENSÖRİYEL DEĞİŞKENLER KULLANARAK LAGRANGE, HAMILTON
FORMALİZMLERİNİN ELEKTRİK DEVRELERİNE UYGULANMASI VE FARKLI
DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ:
KOORDİNAT SİSTEMLERİNDEN BAĞIMSIZ YAKLAŞIM**

*(APPLICATION OF LAGRANGE, HAMILTON FORMALISMS TO AN ELECTRICAL
CIRCUIT USING TENSORIAL VARIABLES AND OBTAINING DIFFERENT FORMS
OF SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS: COORDINATE FREE APPROACH)*

Cem Civelek*

ÖZET/ABSTRACT

Bu çalışmada, genişletilmiş Euler-Lagrange diferansiyel denklemi kullanarak elde edilen Lagrange fonksiyonu L ve hız orantılı (Rayleigh) kayıp fonksiyonu D 'den oluşan modelin, başka bir deyişle $\{L,D\}$ -modelin, basit ve saf elektriksel bir düzenek örneği üzerine uygulanması incelenmekte ve baz vektörler de dahil olmak üzere farklı Lagrange ve Hamilton fonksiyonları ve sonuç olarak da farklı uzaylardaki ayrı hareket denklem sistemleri elde edilmektedir.

The study includes a research on applicability of the model, consisting of Lagrangian L and velocity proportional (Rayleigh) dissipation function D or shortly $\{L,D\}$ -model both obtained using expanded Euler-Lagrange differential equation, on a trivial and pure electrical circuit example and as a result different systems of differential equation including base vectors in different spaces are obtained using different forms of Lagrangian and Hamiltonian.

ANAHTAR KELİMELELER/KEY WORDS

Tensöriyel yaklaşım ve Lagrange-Hamilton formalizmleri, Devre Analizi
Tensorial approach, Lagrange-Hamilton formalisms, Circuit analysis

1. GİRİŞ

Ana konunun matematik kuramsal şekli Arnol'd'un kitabında anlatılmıştır (Arnol'd, 1989). (Maisser vd. ve Maisser vd. kaynaklarında Lagrange ve Hamilton kuramlarının elektriksel sistemlere uyarlanması ile ilgili detaylı çalışma yapılmıştır (Maisser vd., 1974; Maisser, 1976). Goldstein, Lagrange ve Hamilton formalizmlerinin iyi bir şekilde ele alındığı bir kaynaktır (Goldstein, 1980). Kron, kaynağında ise, konusunda ilklerden birisi olarak devreler kuramında tensörler ve diferansiyel geometrik yaklaşım kullanılır (Kron, 1965). Süße vd. ve Süße, fazla ayrıntılı olmamakla beraber varyasyon hesabını tensörler ile birlikte elektrik mühendisliği içerisinde ele alır (Süsse vd., 1996; Süsse, 1998). Kwatny vd. ve Szatkowski yayınlarında ise bahsi geçen formalizmler doğrusal olmayan devrelere uygulanır (Kwatny vd., 1982; Szatkowski, 1979). Süsse ve Civelek, Lagrange ve Hamilton formalizmlerini tensör analitik yaklaşımla ve baz vektörlerini de kapsayarak en genel şekliyle tamamlar (Süsse ve Civelek, 2003). Bu çalışmada ise, temel kavramlar kısa şekilde açıklanarak söz konusu kuramın saf elektriksel düzeneklere tamamen uygulanabilirliği, kısaca farklı bir uzaydaki çözümü basit bir örnek üzerinde açıklanmıştır. Yani devreler kuramı yaklaşımının, koordinat seçiminden tamamen bağımsız değişkenler kullanarak nasıl yapılabileceğini gösterir!

2. SİSTEM TANIMLARI

Kullandığımız büyüklüklerimizi genel anlamda ve kısaca şöyle tanımlıyabiliriz:

L: Lagrange fonksiyonu; D: hız orantılı (Rayleigh) kayıp fonksiyonu; H: Hamilton fonksiyonu; q^i : i'ninci genelleştirilmiş koordinat (üst indis tensöriyel kontravariant form anlamında); \dot{q}^i : i'ninci genelleştirilmiş hız (üst indis tensöriyel kontravariant form anlamında); F_i : i'ninci genelleştirilmiş dış kuvvet, F^i kontravariant şekilde de yazılabilir; p_i : i'ninci genelleştirilmiş momentum (alt indis tensöriyel kovariant form anlamında); $[g_{ij}]$: metrik tensör, matris şeklinde; K: orantı değişmezi

Yaklaşımımızın ana çıkış denklemi, aşağıdaki genişletilmiş Euler-Lagrange diferansiyel denklemi olup hız orantılı kayıp fonksiyonu ve dış kuvvetleri de içermektedir.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}^i} = F_i \quad \text{veya} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}^i} = 0 \quad i = 1, K \quad (1)$$

İkinci formül, dış kuvvetleri de hız orantılı (Rayleigh) kayıp fonksiyonu D içinde negatif kayıp olarak içerir. Metrik tensörün elemanları ise

$$g_{ij} = \frac{1}{K} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = \frac{1}{K} \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = \frac{1}{K} \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} \quad (2)$$

denklemi aracılığıyla elde edilir. Genelleştirilmiş koordinat ve momentumların farklı şekillere dönüştürülmesi

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \delta_j^i \dot{q}^j = \frac{1}{K} \delta_j^i p^j = g^{ij} \dot{q}_j = \frac{1}{K} g^{ij} p_j \quad ; \quad p^i = K \delta_j^i \dot{q}^j = \delta_j^i p^j = K g^{ij} \dot{q}_j = g^{ij} p_j \\ \dot{q}_i &= g_{ij} \dot{q}^j = \frac{1}{K} g_{ij} p^j = \delta_j^i \dot{q}_j = \frac{1}{K} \delta_j^i p_j \quad ; \quad p_i = K g_{ij} \dot{q}^j = g_{ij} p^j = K \delta_j^i \dot{q}_j = \delta_j^i p_j \end{aligned} \quad (3)$$

denklemleri yardımıyla yapılabilir. $\delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ bir kovariant, bir kontravariant

bileşenlerden oluşan ikinci dereceden bir karışık tensördür.

Bizim örneğimizde öncelikle, genelleştirilmiş koordinatları (değişkenleri) bizim durumumuz için (elektrisel büyüklükler olarak) aşağıdaki şekilde tanımlıyoruz.

genelleştirilmiş koordinat $q^k \Leftrightarrow$ yük q^k

genelleştirilmiş hız $\dot{q}^k \Leftrightarrow$ akım $i^k = \dot{q}^k$

genelleştirilmiş momentum $p_k \Leftrightarrow$ manyetik akı Ψ_k

genelleştirilmiş (dış) kuvvet $F_k \Leftrightarrow$ gerilim (kaynağı) $u(t)$

Kirchoff'un akım yasasından dolayı, söz konusu durum için serbestlik derecesi $f = 2$, yani

$$\dot{q}^1 - \dot{q}^2 - \dot{q}^3 = 0 \quad (4)$$

Buradaki bağ koşulu holonomiktir, çünkü

$$\dot{q}^1 - \dot{q}^2 - \dot{q}^3 = 0 \quad \text{veya} \quad dq^1 - dq^2 - dq^3 = 0 \quad (5)$$

ve de ayrıca integre edilebilir.

$$q^1 - q^2 - q^3 = \text{const.} \Big|_t \quad (6)$$

3. LAGRANGE FONKSİYONU VE HIZ ORANTILI (RAYLEIGH) KAYIP FONKSİYONU: {L,D}-MODELİ

Devremizdeki her elemanımız için Lagrange ve hızla orantılı (Rayleigh) kayıp fonksiyonu bilindiğinden, Lagrange-kayıp fonksiyonu veya kısaca {L,D}- modelimiz şu şekildedir.

$$\{L, D\} = \begin{cases} L = \frac{L_1^*}{2} (\dot{q}^1)^2 + \frac{L_2^*}{2} (\dot{q}^2)^2 + \frac{L_3^*}{2} (\dot{q}^1 - \dot{q}^2)^2 - \frac{(q^2)^2}{2C_2} - \frac{(q^1 - q^2)^2}{2C_3} \\ D = \frac{R_1}{2} (\dot{q}^1)^2 + \frac{R_2}{2} (\dot{q}^2)^2 - u(t)\dot{q}^1 \end{cases} \quad (7)$$

Genelleştirilmiş dış kuvvetler negatif kayıp olarak düşünülebilindiğinden, hızla orantılı (Rayleigh) kayıp fonksiyonu D dış kuvvetleri de kapsamaktadır! Potansiyel fonksiyonu olarak düşünülmesi durumunda ise Lagrange fonksiyonu içinde gösterilebilirler. Lagrange fonksiyonu, aşağıda görülebileceği üzere kuadratik form şeklindedir.

$$L(q^1, q^2, \dot{q}^1, \dot{q}^2) = L_1^* \frac{(\dot{q}^1)^2}{2} + L_2^* \frac{(\dot{q}^2)^2}{2} + L_3^* \frac{(\dot{q}^1 - \dot{q}^2)^2}{2} - \frac{(q^2)^2}{2C_2} - \frac{(q^1 - q^2)^2}{2C_3}$$

$$= (\dot{q}^1 \quad \dot{q}^2 \quad \dot{q}^1 - \dot{q}^2) \begin{pmatrix} \frac{L_1^*}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2^*}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3^*}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \dot{q}^1 - \dot{q}^2 \end{pmatrix}$$

$$- (q^2 \quad q^1 - q^2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2C_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^2 \\ q^1 - q^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

başka bir deyişle iki kuadratik formun farkıdır.

3.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ MOMENTUMLARIN VE METRİK TENSÖRÜN ELDE EDİLMESİ

Örneğimiz için genelleştirilmiş momentumlar ise

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^1} = (L_1^* + L_3^*)\dot{\varphi}^1 - L_3^*\dot{\varphi}^2 \\ p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^2} = -L_3^*\dot{\varphi}^1 + (L_2^* + L_3^*)\dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (9)$$

şeklinde olup birimleri de Vs'dir.

Durumumuz için metrik tensörümüz aşağıdaki gibi elde edilir

$$[g_{ij}] = \left[\frac{1}{K} \frac{\partial p_i}{\partial \dot{\varphi}^j} \right] = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} L_1^* + L_3^* & -L_3^* \\ -L_3^* & L_2^* + L_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Bu durum için normlaştırma sabitinin birimi $[K] = \text{Henry}$ olmaktadır.

Metrik tensörümüzün tersi ise şöyledir.

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} = \frac{K}{\Delta} \begin{pmatrix} L_2^* + L_3^* & L_3^* \\ L_3^* & L_1^* + L_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Determinantın değeri

$$\Delta = L_1^*L_2^* + L_1^*L_3^* + L_2^*L_3^* \neq 0 \quad \forall L_i^* \neq 0 \quad ; \quad i = 1, 2 \text{ veya } 1, 3 \text{ veya } 2, 3 \quad (12)$$

şeklinindedir.

3.2 BAZ VEKTÖRLERİNİN BULUNMASI

Metrik tensörümüzün kovariant baz (temel) vektörleri aşağıdaki temel bağıntı üzerinden hesaplanır.

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad i, j = 1, L, f \quad (13)$$

(veya metrik tensör g_{ij} 'nin elemanları g^j biliniyorsa, $\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j$ bağıntısı kullanılarak da baz vektörleri hesaplanabilir).

Sağlanması gereken koşullar ise

$$\begin{aligned} g_{11} &= (g_{1x})^2 + (g_{1y})^2 \\ g_{12} &= g_{21} = g_{1x}g_{2x} + g_{1y}g_{2y} \\ g_{22} &= (g_{2x})^2 + (g_{2y})^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Metrik tensörümüzün elemanlarını kullanarak

$$\begin{aligned} (g_{1x})^2 + (g_{1y})^2 &= \frac{L_1^* + L_3^*}{K} \\ g_{1x}g_{2x} + g_{1y}g_{2y} &= -\frac{L_3^*}{K} \\ (g_{2x})^2 + (g_{2y})^2 &= \frac{L_2^* + L_3^*}{K} \end{aligned} \quad (15)$$

$2^2 = 4$ değişken elde ederiz. 2 boyutlu uzayda üç koşulun sağlanması gerekir ki, bu da parametrelerden bir tanesini serbest olarak seçebileceğimiz anlamına gelir. Biz de seçimimizi, örnek olarak, $g_{1y} = 0$ olarak yapar ve

$$g_{1x} = \sqrt{\frac{L_1^* + L_3^*}{K}} \quad ; \quad g_{2x} = -\frac{L_3^*}{\sqrt{K(L_1^* + L_3^*)}} \quad (16)$$

$$g_{2y} = \sqrt{\frac{L_1^*L_2^* + L_1^*L_3^* + L_2^*L_3^*}{K(L_1^* + L_3^*)}} = \sqrt{\frac{\Delta}{K(L_1^* + L_3^*)}}$$

elde ederiz. Bu da demektir ki baz vektörlerimiz

$$\mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{L_1^* + L_3^*}{K}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{L_3^*}{\sqrt{K(L_1^* + L_3^*)}} \\ \sqrt{\frac{\Delta}{K(L_1^* + L_3^*)}} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Aşağıdaki bağıntıyı kullanarak

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad i, j = 1, 2 \quad (18)$$

kontravariant baz vektörlerini aşağıdaki yapıldığı üzere bulabiliriz (veya tıpkı yukarıda yaptığımız gibi, $\mathbf{g}_j g^{ij} = \mathbf{g}^i$ bağıntısı üzerinden de kontravariant baz vektörleri hesaplanabilir).

$$\mathbf{g}^1 = g^{11} \mathbf{g}_1 + g^{12} \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{K}{L_1^* + L_3^*}} \\ L_3^* \sqrt{\frac{K}{\Delta(L_1^* + L_3^*)}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}^2 = g^{21} \mathbf{g}_1 + g^{22} \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{K(L_1^* + L_3^*)}{\Delta}} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Sonuçların ayrıca şu şekilde sağlanması yapılabilir (${}^T \mathbf{g}^i$ vektörün devriği olmak üzere)

$${}^T \mathbf{g}^1 \mathbf{g}^1 = \frac{K(L_2^* + L_3^*)}{\Delta} = g^{11}$$

$${}^T \mathbf{g}^1 \mathbf{g}^2 = L_3^* \frac{K}{\Delta} = g^{12} = g^{21} = {}^T \mathbf{g}^2 \mathbf{g}^1$$

$${}^T \mathbf{g}^2 \mathbf{g}^2 = \frac{K(L_1^* + L_3^*)}{\Delta} = g^{22}$$

$${}^T \mathbf{g}^1 \mathbf{g}_1 = 1 = {}^T \mathbf{g}_1 \mathbf{g}^1$$

$${}^T \mathbf{g}^1 \mathbf{g}_2 = 0 = {}^T \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_1$$

$${}^T \mathbf{g}^2 \mathbf{g}_2 = 1 = {}^T \mathbf{g}_2 \mathbf{g}^2 \quad (20)$$

Bu şekilde Tensör Analizi yasaları ile örneğimizin sonuçlarının uyduğunu saptarız. Hesaplanan metrik katsayılar ikinci dereceden bir metrik tensörün koordinatları (elemanları)dır.

Çizelge 1 kovariant ve kontravariant büyüklüklerin nasıl birbirine dönüştürüleceğini göstermektedir.

4. HAMILTON FONKSİYONUNUN ELDE EDİLMESİ

Legendre-dönüşümü koşulu

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \mathcal{Q}^i \partial \mathcal{Q}^j}\right) = \det\left(\frac{\partial p_i}{\partial \mathcal{Q}^j}\right) \neq 0 \quad (21)$$

bu durum için sağlanmış olup aşağıdaki şekildedir.

$$\Delta = L_1^* L_2^* + L_1^* L_3^* + L_2^* L_3^* \neq 0 \quad \forall L_i^* \neq 0 \quad ; \quad i = 1, 2 \text{ veya } 1, 3 \text{ veya } 2, 3 \quad (22)$$

Hamilton fonksiyonunu Legendre-dönüşümü kullanarak şu şekilde elde ederiz.

$$\begin{aligned} H^+[q^k(t), \mathcal{Q}^k(t)] &= \sum_{k=1}^2 p_k \mathcal{Q}^k - L \\ &= L_1^* \frac{(\mathcal{Q}^1)^2}{2} + L_2^* \frac{(\mathcal{Q}^2)^2}{2} + L_3^* \frac{(\mathcal{Q}^1 - \mathcal{Q}^2)^2}{2} + \frac{(q^1 - q^2)^2}{2C_2} + \frac{(q^2)^2}{2C_3} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{Q}^1 & \mathcal{Q}^2 & \mathcal{Q}^1 - \mathcal{Q}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{L_1^*}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2^*}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3^*}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Q}^1 \\ \mathcal{Q}^2 \\ \mathcal{Q}^1 - \mathcal{Q}^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} q^2 & q^1 - q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2C_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^2 & q^1 - q^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

Bu ifade de kuadratik şekilde olup Lagrange fonksiyonu gibi genelleştirilmiş hız ve konumun fonksiyonudur.

Çizelge 1'yi kullanarak Hamilton fonksiyonunun genelleştirilmiş momentum ve hıza bağımlı şeklini aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$\begin{aligned}
H(p_k, q^k) &= \frac{1}{2\Delta} [(L_2^* + L_3^*)p_1^2 + (L_1^* + L_3^*)p_2^2 + 2L_3^*p_1p_2] + \frac{(q^1 - q^2)^2}{2C_3} + \frac{(q^2)^2}{2C_2} \\
&= \frac{1}{2\Delta} [L_2^*p_1^2 + L_1^*p_2^2 + L_3^*(p_1 + p_2)^2] + \frac{1}{2} \left[\frac{(q^1 - q^2)^2}{C_3} + \frac{(q^2)^2}{C_2} \right] \\
&= (p_1 \quad p_2 \quad p_1 + p_2) \begin{pmatrix} \frac{L_2^*}{2\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_1^*}{2\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3^*}{2\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_1 + p_2 \end{pmatrix} \\
&\quad + (q^1 - q^2 \quad q^2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2C_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1 - q^2 \\ q^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{24}$$

Bu ifade de, görüldüğü gibi kuadratik şekildedir.

5. HAREKET DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Hareket denklemlerinin bir şekli şu şekildedir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^1 &= \frac{\partial H^+}{\partial p_1} = \frac{1}{\Delta} [L_2^*p_1 + L_3^*(p_1 + p_2)] \\
\mathcal{Q}^2 &= \frac{\partial H^+}{\partial p_2} = \frac{1}{\Delta} [L_1^*p_2 + L_3^*(p_1 + p_2)] \\
\mathcal{P}_1 &= -\frac{\partial H^+}{\partial q^1} - \frac{\partial D}{\partial \mathcal{Q}^1} = -\frac{q^1 - q^2}{C_3} - R_1 \mathcal{Q}^1 + u(t) \\
\mathcal{P}_2 &= -\frac{\partial H^+}{\partial q^2} - \frac{\partial D}{\partial \mathcal{Q}^2} = \frac{q^1 - q^2}{C_3} - \frac{q^2}{C_2} - R_2 \mathcal{Q}^2
\end{aligned} \tag{25}$$

Yukarıdaki denklem sistemi akım ve gerilimleri ifade ettiğinden devre analitik yaklaşımla bulunabilecek olan şekli ile birebir aynıdır! Lagrange ve Hamilton fonksiyonlarının diğer şekilleri ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
L_+(q^k, q_k) &= \frac{L_1^*}{2}(q^1)^2 + \frac{L_2^*}{2}(q^2)^2 + \frac{L_3^*}{2}(q^1 - q^2)^2 \\
&\quad - \frac{K^2}{2\Delta^2} \left\{ \frac{(L_2^*q_1 - L_1^*q_2)^2}{C_3} + \frac{[L_3^*q_1 + (L_1^* + L_3^*)q_2]^2}{C_2} \right\} \\
L_-(q^k, q^k) &= \frac{L_1^*K^2}{2\Delta^2} [(L_2^* + L_3^*)q_1^2 + L_3^*q_2^2]^2 + \frac{L_2^*K^2}{2\Delta^2} [L_3^*q_1^2 + (L_1^* + L_3^*)q_2^2]^2 \\
&\quad + \frac{L_3^*K^2}{2\Delta^2} (L_2^*q_1^2 - L_1^*q_2^2)^2 - \frac{(q^1 - q^2)^2}{2C_3} - \frac{(q^2)^2}{2C_2} \\
L^-(q^k, q_k) &= \frac{L_1^*K^2}{2\Delta^2} [(L_2^* + L_3^*)q_1^2 + L_3^*q_2^2]^2 + \frac{L_2^*K^2}{2\Delta^2} [L_3^*q_1^2 + (L_1^* + L_3^*)q_2^2]^2 \\
&\quad + \frac{L_3^*K^2}{2\Delta^2} (L_2^*q_1^2 - L_1^*q_2^2)^2 - \frac{K^2}{2\Delta^2} \left\{ \frac{(L_2^*q_1 - L_1^*q_2)^2}{C_3} + \frac{[L_3^*q_1 + (L_1^* + L_3^*)q_2]^2}{C_2} \right\} \\
H_-(p^k, q^k) &= \frac{1}{2\Delta} \left\{ L_2^* \left[\left(\frac{L_1^* + L_3^*}{K} \right) p^1 - \frac{L_3^*}{K} p^2 \right]^2 + L_1^* \left[-\frac{L_3^*}{K} p^1 + \left(\frac{L_2^* + L_3^*}{K} \right) p^2 \right]^2 \right\} \\
&\quad + \frac{L_3^*}{K^2} (L_1^*p^1 + L_2^*p^2)^2 \\
&\quad + \frac{(q^1 - q^2)^2}{2C_3} + \frac{(q^2)^2}{2C_2} \\
H_+(p_k, q_k) &= \frac{1}{2\Delta} [L_2^*p_1^2 + L_1^*p_2^2 + L_3^*(p_1 + p_2)^2] \\
&\quad + \frac{K^2}{2\Delta^2} \left\{ \frac{(L_2^*q_1 - L_1^*q_2)^2}{C_3} + \frac{[L_3^*q_1 + (L_1^* + L_3^*)q_2]^2}{C_2} \right\} \\
H^-(p^k, q_k) &= \frac{1}{2\Delta} \left\{ L_2^* \left[\left(\frac{L_1^* + L_3^*}{K} \right) p^1 - \frac{L_3^*}{K} p^2 \right]^2 + L_1^* \left[-\frac{L_3^*}{K} p^1 + \left(\frac{L_2^* + L_3^*}{K} \right) p^2 \right]^2 \right\} \\
&\quad + \frac{L_3^*}{K^2} (L_1^*p^1 + L_2^*p^2)^2 \\
&\quad + \frac{K^2}{2\Delta^2} \left\{ \frac{(L_2^*q_1 - L_1^*q_2)^2}{C_3} + \frac{[L_3^*q_1 + (L_1^* + L_3^*)q_2]^2}{C_2} \right\} \tag{26}
\end{aligned}$$

Hız orantılı (Rayleigh) kayıp fonksiyonu D'nin diğer şekli ise

$$D(\phi_1, \phi_2) = \frac{R_1 K^2}{2\Delta^2} [(L_2^* + L_3^*)\phi_1 + L_3^*\phi_2]^2 + \frac{R_2 K^2}{2\Delta^2} [L_3^*\phi_1 + (L_1^* + L_3^*)\phi_2]^2 - u(t) \frac{K}{\Delta} [(L_2^* + L_3^*)\phi_1 + L_3^*\phi_2] \quad (27)$$

Bütün bu ifadelerden sonra artık hareket denklemlerinin diğer şeklini ise şu şekilde verebiliriz.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\partial H^-}{\partial p^1} = \frac{L_1^* + L_3^*}{K^2} p^1 - \frac{L_3^*}{K^2} p^2 \\ \phi_2 &= \frac{\partial H^-}{\partial p^2} = -\frac{L_3^*}{K^2} p^1 + \frac{L_2^* + L_3^*}{K^2} p^2 \\ \phi_1^l &= -\frac{\partial H^-}{\partial q_1} - \frac{\partial D}{\partial \phi_1} = -\frac{K^2}{\Delta^2} \left\{ \frac{[L_2^* q_1 - L_1^* q_2] L_2^*}{C_3} + \frac{[L_3^* q_1 + (L_1^* + L_3^*) q_2] L_3^*}{C_2} \right. \\ &\quad \left. + R_1 [(L_2^* + L_3^*)\phi_1 + L_3^*\phi_2] (L_2^* + L_3^*) + R_2 [L_3^*\phi_1 + (L_1^* + L_3^*)\phi_2] L_3^* \right\} \\ &\quad + u(t) \frac{K}{\Delta} (L_2^* + L_3^*) \\ \phi_2^l &= -\frac{\partial H^-}{\partial q_2} - \frac{\partial D}{\partial \phi_2} = -\frac{K^2}{\Delta^2} \left\{ -\frac{L_1^* (L_2^* q_1 - L_1^* q_2)}{C_3} + \frac{[L_3^* q_1 + (L_1^* + L_3^*) q_2] (L_1^* + L_3^*)}{C_2} \right. \\ &\quad \left. + R_1 [(L_2^* + L_3^*)\phi_1 + L_3^*\phi_2] L_3^* + R_2 [L_3^*\phi_1 + (L_1^* + L_3^*)\phi_2] (L_1^* + L_3^*) \right\} \\ &\quad + u(t) \frac{K}{\Delta} (L_1^* + L_3^*) \end{aligned} \quad (28)$$

Yukarıda, ikinci denklem sistemi Hamilton fonksiyonunun H^- şekli kullanılarak elde edilmiştir. Eşitlik 25’i metrik tensörü kullanarak da Eşitlik 28’e dönüştürmek olanaklıdır. Eşitlik 28 farklı bir uzaydaki çözüm olup ölçülebilen sonuçlarla örtüşmez!

6. SONUÇLAR

Bu araştırmanın nedeni söz konusu kuramın elektriksel sistemlere tamamen uygulanabilirliğinin gösterilmesidir. Ancak hangi tür sistem için hangi denklem sisteminin daha iyi olabileceği henüz bilinmemektedir. Ayrıca, özel bazı durumlarda doğrusal olmamanın doğrusallığa dönüşüp dönüşmeyeceği de açık ve net değildir. Bu nedenle de konu üzerine daha fazla araştırma yapılması gerekmektedir.

TEŞEKKÜR

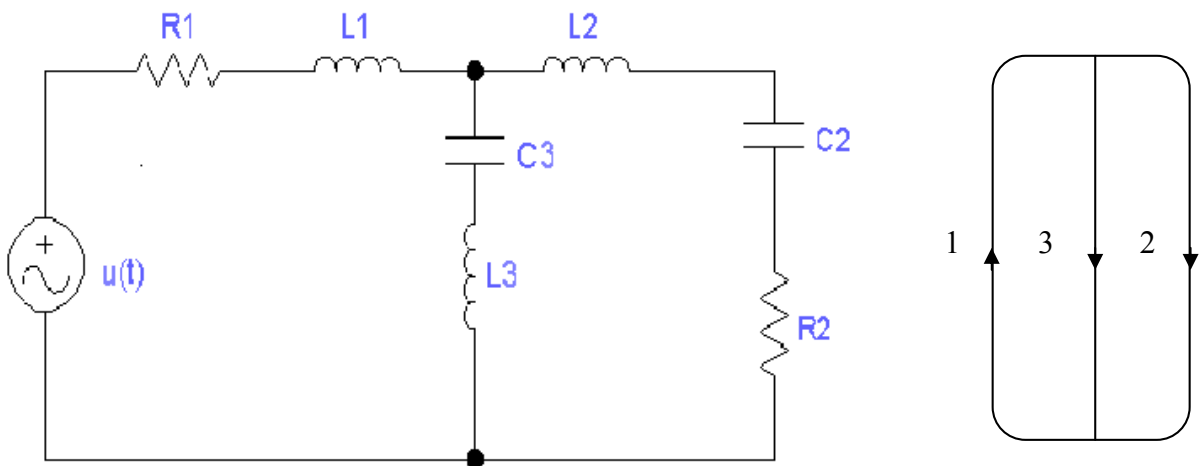
Birlikte çalışma fırsatını bulduğum Priv.Doç.Dr.-Ing. Roland Süsse’ye (Ilmenau Teknik Üniversitesi, Elektrotechnik Fakültesi-Teorik Elektrotechnik ABD, Ilmenau/Almanya) çok teşekkür ederim. Ayrıca Prof.Dr.Doğan Demirhan’a (“Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi-Fizik Bölümü Teorik ve Matematiksel Fizik ABD) bu çalışmayı okuması ve önerileri için teşekkürü bir borç bilirim.

KAYNAKLAR

- Arnol'd V.I. (1989): "Mathematical Methods of Classical Mechanics", 2nd Ed. Corr. 3rd, Printing, Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg- New York.
- Maisser P., Steigenberger J. (1974): "Zugang Zur Theorie Elektromechanischer Systeme Mittels Klassischer Mechanik", Wiss. Zeitschrift der Technischen Hochschule Ilmenau, Teil 1 20, 6.
- Maisser P., Steigenberger J. (1976): "Zugang Zur Theorie Elektromechanischer Systeme Mittels Klassischer Mechanik", Wiss. Zeitschrift der Technischen Hochschule Ilmenau, Teil 2 22, 3,
- Goldstein H. (1980): "Classical Mechanics", Addison-Wesley Pub. Comp. Reading, Massachusetts.
- Kron G. (1965): "Tensor Analysis of Networks", Macdonald, London.
- Süsse R., Ströhla T. (1996): "Calculation of Linear Electrical Networks with Metric Coefficients and Covariant Impulses", Journal of Electrical Engineering, vol. 47, No. 5, VEDA, Bratislava.
- Süsse R. (1998): "Some Aspects on the Theory of the Electrical Engineering on the Basis of the Variational and Tensor-Calculus. 43", International wissenschaftliches Kolloquium der Technischen Universität Ilmenau, Band 3, Ilmenau1, s. 156-160.
- Kwatny H.G., Massimo F.M., Bahar L.Y. (1982): "The Generalized Lagrange Formulation for Nonlinear RLC Networks", IEEE CAS-29, 220-233.
- Szatkowski A. (1979): "Remark on "Explicit Topological Formulation of Lagrangian and Hamiltonian Equations for Nonlinear Networks", IEEE CAS-26, 358-360.
- Süsse R., Civelek C. (2003): "Analysis of Engineering Systems by Means of Lagrange and Hamilton Formalisms Depending on Contravariant, Covariant Tensorial Variables", Forschung im Ingenieurwesen-Engineering Research 67.

Çizelge 1. Genelleştirilmiş kovariant, kontravariant momentum ve koordinatların dönüşümleri

| | $\begin{pmatrix} \mathcal{Q}^1 \\ \mathcal{Q}^2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 \\ \mathcal{Q}_2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ |
|--|--|--|---|---|
| $\begin{pmatrix} \mathcal{Q}^1 \\ \mathcal{Q}^2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{K} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{K}{\Delta} \begin{pmatrix} L_2^* + L_3^* & L_3^* \\ L_3^* & L_1^* + L_3^* \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} L_2^* + L_3^* & L_3^* \\ L_3^* & L_1^* + L_3^* \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix}$ | $K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{K^2}{\Delta} \begin{pmatrix} L_2^* + L_3^* & L_3^* \\ L_3^* & L_1^* + L_3^* \end{pmatrix}$ | $\frac{K}{\Delta} \begin{pmatrix} L_2^* + L_3^* & L_3^* \\ L_3^* & L_1^* + L_3^* \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 \\ \mathcal{Q}_2 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{K} \begin{pmatrix} L_1^* + L_3^* & -L_3^* \\ -L_3^* & L_2^* + L_3^* \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{K^2} \begin{pmatrix} L_1^* + L_3^* & -L_3^* \\ -L_3^* & L_2^* + L_3^* \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{K} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} L_1^* + L_3^* & -L_3^* \\ -L_3^* & L_2^* + L_3^* \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{K} \begin{pmatrix} L_1^* + L_3^* & -L_3^* \\ -L_3^* & L_2^* + L_3^* \end{pmatrix}$ | $K \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |



Şekil 1. Doğrusal metrik tensörü olan bir devre ve onun çizgesi