



TABAKALI KOMPOZİT DAİRESEL PLAKLARDA STATİK STABİLİTE ANALİZİ

(*STATIC STABILITY ANALYSIS OF LAMINATED COMPOSITE CIRCULAR PLATES*)

Aysun BALTACI, Mehmet SARIKANAT

ÖZET/ABSTRACT

Bu çalışmada, tabakalı kompozit dairesel plakların radyal doğrultuda etkiyen düzlem içi yükler altında statik stabilitesi, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Analiz için 8 düğüm noktalı 24 serbestlik dereceli izoparametrik sektör eleman kullanılmıştır. Delik boyutunun ve farklı fiber oryantasyonlarının dairesel plağın stabilitesine etkileri irdelenmiştir.

In this study, the static stability analysis of laminated composite circular plates subjected to periodic in-plane loads was investigated by using the finite element method. The isoparametric sector element used in this analysis has 8 nodes and 24 degrees of freedom. The effects of hole size and different fiber orientations on the static stability analysis of laminated composite circular plates were investigated.

ANAHTAR KELİMELELER/KEYWORDS

Kompozit malzemeler, Sonlu elemanlar yöntemi, Stabilite analizi
Composite materials, Finite element method, Stability analysis

1. GİRİŞ

Kompozit malzemelerin düşük ağırlığa, yüksek dayanıma sahip olmaları ve çeşitli doğrultulardaki istenilen özellikleri fiber takviyeleri ile sağlanabilmesi, bu malzemeleri, diğer malzemelerden ayıran temel özelliklerdir. Son yıllarda teknolojinin gelişimiyle birlikte, fiber takviyeli kompozit malzemelerin birçok mühendislik alanında kullanımı artmaktadır. Örneğin uzay yapılarında, basınçlı kazanlarda, spor ekipmanlarında, otomobillerde ve daha bir çok alanda kullanılmaktadır. Özellikle üzerinde delik bulunan fiber takviyeli kompozit plaklar, uzay yapılarında daha yaygın olarak kullanılmaktadır (Daniel ve Ishai, 1994; Reddy, 1997).

Günümüzde fiber takviyeli tabakalı kompozit plak problemlerinin analizi için çeşitli nümerik çözüm metotları mevcuttur. Bu nümerik analiz metotlarından en önemlisi 'sonlu elemanlar' yöntemidir. Bilgisayarların kullanımının yaygınlaşması ile bu yöntemin kullanımı daha da artmaktadır.

Bu çalışmada; radyal doğrultuda düzgün yayılı yüke maruz tabakalı kompozit malzemedan yapılmış dairesel plakların statik stabiliteleri, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Tabakalı kompozit malzemedan yapılmış dairesel plakların statik stabilitesi incelenirken, delik büyüklüklerinin kritik burkulma yüküne etkileri irdelenmiştir. Bu analizler yapılırken, 8 düğüm noktalı 24 serbeslik dereceli izoparametrik sektör eleman kullanılmıştır.

2. DAİRESEL TABAKALI KOMPOZİT PLAKALAR İÇİN KLASİK VE BİRİNCİ MERTEBE TEORİLERİ

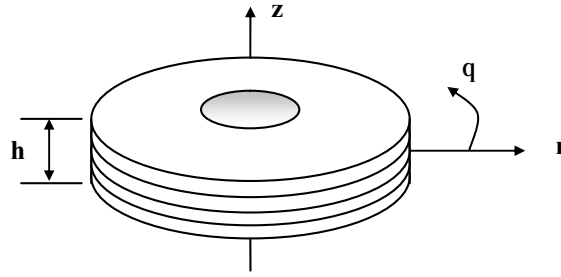
2.1. Silindirik Koordinatlarda Kompozit Tabakaların Yapısal Denklemleri

Silindirik koordinatlarda birim şekil değiştirme-gerilme ilişkileri

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_r} & -\frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta} & -\frac{\nu_{zr}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} & \frac{1}{E_\theta} & -\frac{\nu_{z\theta}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{rz}}{E_r} & -\frac{\nu_{\theta z}}{E_\theta} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\theta z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

şeklinde verilmektedir. Burada E_r , E_θ , E_z sırasıyla radyal, çevresel ve kalınlık doğrultusunda Young modüllerini, ν_{ij} Poisson oranlarını, G_{ij} ise kayma modüllerini göstermektedir.

Genelde, geometri ve yüklemde eksenel simetriye sahip yapılarda, silindirik koordinatlar (r , θ , z), kartezyen koordinatlara (x , y , z) göre daha fazla tercih edilir. Buna göre, bu çalışmada, silindirik koordinat sistemi tercih edilmiş ve bütün teoriler ve formülasyonlar silindirik koordinatlarda verilmiştir (Şekil 1).



Şekil 1. Delikli dairesel bir kompozit plak ve silindirik koordinat sistemi

Silindirik koordinatlarda Kirchoff varsayımına göre (u, v, w) yer değiştirmeleri

$$\begin{aligned}
 u(r, q, z, t) &= u_0(r, q, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial r} \\
 v(r, q, z, t) &= v_0(r, q, t) - z \frac{\partial w_0}{r \partial q} \\
 w(r, q, z, t) &= w_0(r, q, t)
 \end{aligned} \tag{2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada (u_0, v_0, w_0) , orta düzlemdeki yer değiştirmeler olarak bilinmektedir. Küçük birim şekil değiştirmeler için birim şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkileri;

$$\begin{aligned}
 e_{rL}^0 &= \frac{\partial u}{\partial r} & k_{rL} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\
 e_{rqL}^0 &= \frac{\partial u}{r \partial q} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} & k_{qL} &= -\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial q^2} - \frac{\partial w}{r \partial r} \\
 e_{qL}^0 &= \frac{\partial v}{r \partial q} + \frac{u}{r} & k_{rqL} &= -2 \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial q} + \frac{\partial w}{r^2 \partial q}
 \end{aligned} \tag{3}$$

olur. Bütün birim şekil değiştirmeler, tabaka kalınlığına bağlı olarak lineer bir şekilde değişir ve malzeme değişkenlerinden kalınlık boyunca bağımsızdır.

2.2. Tabaka Temel Denklemleri

Teorinin Euler-Lagrange denklemleri virtüel iş ifadelerini kullanarak statik durum için;

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{rq}}{\partial q} &= 0 \\
 \frac{\partial N_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_q}{\partial q} &= 0 \\
 \frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 M_{rq}}{\partial q \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_q}{\partial q^2} + N(w) + q &= 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

şeklinde elde edilir.

Tabaka temel denklemleri, kuvvet ve moment bileşenleri ile birim şekil değiştirmeler arasında ilişki kurar. Kuvvet bileşenleri;

$$\begin{Bmatrix} N_r \\ N_q \\ N_{rq} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_q \\ \sigma_{rq} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_r^0 + ze_r^1 \\ e_q^0 + ze_q^1 \\ e_{rq}^0 + ze_{rq}^1 \end{Bmatrix} dz \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} N_r \\ N_q \\ N_{rq} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_r^0 \\ e_q^0 \\ e_{rq}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_r^1 \\ e_q^1 \\ e_{rq}^1 \end{Bmatrix}$$

ile verilir. Moment bileşenleri ise

$$\begin{Bmatrix} M_r \\ M_q \\ M_{rq} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_q \\ \sigma_{rq} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_r^0 + ze_r^1 \\ e_q^0 + ze_q^1 \\ e_{rq}^0 + ze_{rq}^1 \end{Bmatrix} z dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_r \\ M_q \\ M_{rq} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_r^0 \\ e_q^0 \\ e_{rq}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_r^1 \\ e_q^1 \\ e_{rq}^1 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$N(w) = \frac{\partial}{\partial r} \left(N_r \frac{\partial w}{\partial r} + N_{rq} \frac{\partial w}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(N_{rq} \frac{\partial w}{\partial r} + N_q \frac{\partial w}{\partial q} \right)$$

denklemleriyle gösterilir. Burada A_{ij} boyuna uzama direngenliği, D_{ij} eğilme direngenliği, B_{ij} ise eğilme-boyuna uzama eşleşmesi direngenliği ve $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ tabaka direngenliği cinsinden hesaplanır (Calcote, 1969; Gould, 1999):

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1})$$

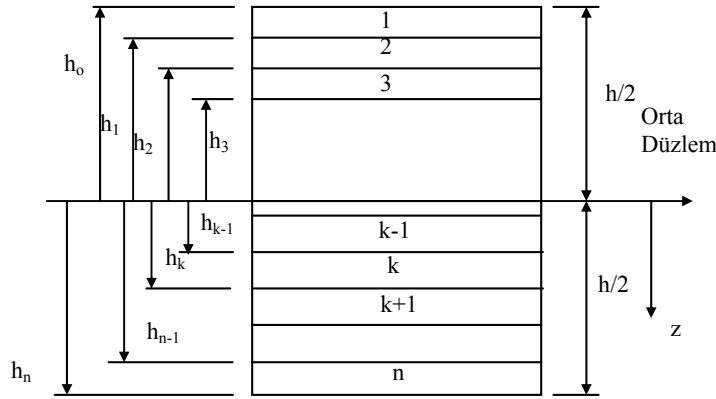
$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (7)$$

Burada N tabaka sayısı, (h_{k-1}, h_k) ise k . tabakanın en alt ve en üstünün koordinatıdır (Şekil 2).

3. DAİRESEL TABAKALI KOMPOZİT PLAKALARIN SONLU ELEMANLAR ANALİZİ

Sonlu elemanlar metodu; karmaşık olan problemlerin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesiyle tam çözümün bulunduğu bir çözüm şeklidir. Bu metod, bilgisayarlar çağının bir ürünüdür. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte data iletim hızlarının sürekli olarak artmasına bağlı olarak, bu metotla çözüm yapan paket programların sayısı gittikçe artmaktadır. Günümüzde, çeşitli analizler için bu paket programların kullanımı yaygınlaşmaktadır.



Şekil 2. Levhadaki tabakaların koordinatları

Sanal yer değiştirmeler ilkesi, Eşitlik 4'deki diferansiyel denklemin weak formunu verir. Bu denklemdaki eşitlikler, (r, θ, z) doğrultularındaki kuvvetlerin dengesine karşılık gelir. Bu yznden, bu eşitliklerin ağrılık fonksiyonları, sırasıyla δu , δv , δw sanal yer değişimleridir. Eşitlik 4, δu ağrılık fonksiyonuyla çarpılır, Ω^e elaman alanı zzerinde integre edilir ve gerekli dzenlemeler yapılırsa, Eşitlik 4'z weak formu

$$0 = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial du}{\partial r} N_r + \frac{\partial du}{\partial q} \frac{N_{rq}}{r} \right) r dr dq - \int_{\Gamma^e} du N_n ds \quad (8)$$

şeklinde olur. u , v , w yerdeğiştirmeleri, eleman zzerinde interpolasyonla yaklaştırılırsa

$$\begin{aligned} u &= \sum u_i Y_i(r, q) \\ v &= \sum v_i Y_i(r, q) \\ w &= \sum \Delta_i Y_i(r, q) \end{aligned} \quad (9)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $(u_j$ ve $v_j)$, u ve v 'nin nodal değerlerini, Δ_j ise w ve tzevlerinin nodal değerlerini gsterir. Tzm yer değiştirmeler ve dznmeler, genelleştirilmiş yer değiştirmeler adını alır ve Ω^e elemanı ile ilişkilidir.

Eşitlik 4'z sonlu eleman modeli, u , v , w ve $\delta u = \psi I, \delta v = \psi I, \delta w = \phi I$ değerleri için Eşitlik 9'daki ifadelerin Eşitlik 8'de yerine konulması ile;

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial y_i}{\partial r} N_r + \frac{1}{r} \frac{\partial y_i}{\partial q} N_{rq} \right) r dr dq - \int_{\Gamma^e} N_n Y_i ds = 0 \\ 0 &= \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial y_i}{\partial r} N_{rq} + \frac{1}{r} \frac{\partial y_i}{\partial q} N_r \right) r dr dq - \int_{\Gamma^e} N_n Y_i ds = 0 \\ & - \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial r^2} M_r + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial r \partial q} M_{rq} \right) r dr dq \\ & - \int_{\Omega^e} \left(+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial q^2} M_q + f_i q \right) r dr dq - \int_{\Gamma^e} \left(f_i V_n + \frac{\partial f_i}{\partial n} M_n \right) ds = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler, aşağıdaki formda ifade edilebilir.

$$\sum_{b=1}^3 \sum_{j=1}^{n(b)} K_{ij}^{ab} \Delta_j^b - F_i^a = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n(a) \quad (11)$$

veya

$$\{K^e\} \{\Delta^e\} = \{F^e\} \quad (12)$$

Burada $\alpha=1, 2, 3$; $n(1)=n(2)=4$ ve $n(3)=16$ dır. Δ_i^b değişkenleri ve K_{ij}^{ab} direngenlik katsayıları;

$$\Delta_j^1 = u_j \quad \Delta_j^2 = v_j \quad \Delta_j^3 = \Delta_j \quad (13)$$

ve

$$\begin{aligned} K_{ij}^{1a} &= \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial y}{\partial r} N_{rj}^a + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial q} N_{rjq}^a \right) r dr dq \\ N_{rj}^1 &= A_{11} \frac{\partial y_j}{\partial r} + A_{16} \frac{\partial y_j}{\partial q} \\ N_{rj}^2 &= A_{16} \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} + A_{12} \frac{\partial \Psi_j}{\partial q} \\ N_{rj}^3 &= - \left(B_{11} \frac{\partial^2 f}{\partial} \right) \\ N_{rj}^3 &= - \left(B_{11} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial \theta} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} \right) \\ K_{ij}^{2\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial r} N_{r\theta j}^\alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \theta} N_{\theta j}^\alpha \right) r dr d\theta \\ N_{r\theta j}^1 &= A_{16} \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} + A_{66} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \theta} \quad N_{r\theta j}^2 = A_{66} \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} + A_{26} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \theta} \\ N_{r\theta j}^3 &= - \left(B_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial \theta} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} \right) \\ N_{\theta j}^1 &= A_{12} \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} + A_{26} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \theta} \quad N_{\theta j}^2 = A_{26} \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} + A_{22} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \theta} \\ N_{\theta j}^3 &= - \left(B_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial \theta} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} \right) \\ K_{ij}^{3\alpha} &= - \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} M_{rj}^\alpha + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r \partial \theta} M_{r\theta j}^\alpha \right) r dr d\theta \\ &\quad - \int_{\Omega^e} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} M_{\theta j}^\alpha \right) r dr d\theta \\ M_{rj}^1 &= B_{11} \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} + B_{16} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \theta} \quad M_{\theta j}^2 = B_{16} \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} + B_{12} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \theta} \\ M_{rj}^3 &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial \theta} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} \right) \\ M_{r\theta j}^1 &= B_{16} \frac{\partial \Psi_j}{\partial r} + B_{66} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
M_{r\theta j}^2 &= B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \\
M_{r\theta j}^3 &= - \left(D_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial \theta} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} \right) \\
M_{\theta j}^1 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \\
M_{\theta j}^2 &= B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + B_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \\
M_{\theta j}^3 &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial \theta} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} \right) \\
F_i^1 &= \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds \quad F_i^2 = \int_{\Gamma^e} N_{ns} \psi_i ds \\
F_i^e &= \int_{\Gamma^e} \left(\phi_i V_n + \frac{\partial \phi_i}{\partial n} M_n \right) ds - \int_{\Omega^e} \phi_i q r dr d\theta
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\tag{16}$$

ifadeleriyle tanımlanır ve diğer katsayılar sıfırdır. Eşitlik 14, Eşitlik 15, Eşitlik 16'daki katsayıların hesabı, her bir elemanın integral değerinin elde edilmesini gerektirir. İntegraller, nümerik integrasyon yöntemleriyle hesaplanır. Eşitlik 11 ve Eşitlik 12'nin elemanları, düğümlerdeki yerdeğiştirmelerin ve düğümlerdeki kuvvet dengesinin sürekliliği kullanılarak birleştirilir. Problemin kuvvet ve yerdeğiştirme sınır şartları, birleşmiş sistemin denklemine uygulanır ve bu denklem tüm sistemin düğümlerinin yerdeğiştirmeleri için çözülür.

Statik stabilite için

$$\left([K^e] - I [S^e] \right) = 0 \tag{17}$$

eşitliğin çözümü kritik burkulma yükü parametresini verir. Eşitlik 17'de λ kritik burkulma yükü parametresi, $[S^e]$ geometrik direngenlik matrisi olup

$$[S^e] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ & [0] & [0] & [0] & [0] \\ & & [S^{33}] & [0] & [0] \\ & sym & & [0] & [0] \\ & & & & [0] \end{bmatrix} \tag{18}$$

şeklinde verilir. Burada $(\bar{N}_r, \bar{N}_\theta, \bar{N}_{r\theta})$ uygulanan kuvvetlerdir ve

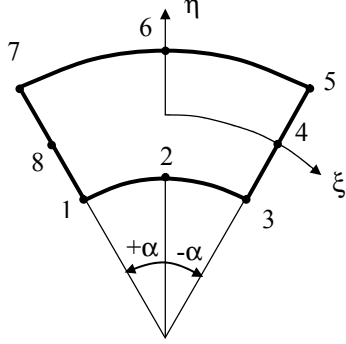
$$\begin{aligned}
S_{ij}^{33} &= \int_{\Omega^e} \left[\bar{N}_r \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \bar{N}_\theta \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} \right] r dr d\theta \\
&+ \int_{\Omega^e} \left[\bar{N}_{r\theta} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) \right] r dr d\theta
\end{aligned} \tag{19}$$

eşitliğiyle verilir. Bu durumda, λ özdeğeri, gerçek burkulma yükünün uygulanan kuvvete oranını gösterir.

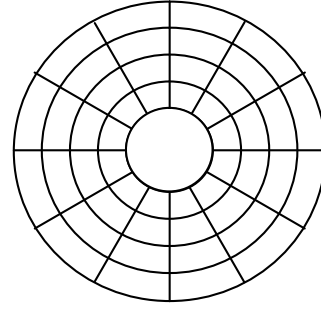
$$\lambda = \frac{N_r}{N_r} = \frac{N_\theta}{N_\theta} = \frac{N_{r\theta}}{N_{r\theta}} \tag{20}$$

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada; radyal doğrultuda üniform yayılı yüke maruz, tabakalı AS/3501 kompozit malzemesinden yapılmış, düzgün kalınlığa sahip dairesel plakların statik stabilitesi sonlu elemanlar yöntemiyle incelenmiştir. Bu analiz yapılırken, 8 düğüm noktalı 24 serbestlik dereceli izoparametrik sektör eleman kullanılmıştır (Şekil 3a , 3b).



Şekil 3a. İzoparametrik bir eleman



Şekil 3b. İzoparametrik bir elemanla diskin modellenmesi

Bu elemanın şekil fonksiyonları; köşelerdeki düğüm noktaları için

$$y_i(x, h) = \frac{1}{4}(1+x_0)(1+h_0)(x_0+h_0-1) \quad i = 1, 3, 5, 7 \quad (21)$$

ve orta noktalardaki düğüm noktaları için

$$y_i(x, h) = \frac{1}{2}(1+x^2)(1+h_0) \quad i = 2, 6$$

$$y_i(x, h) = \frac{1}{2}(1+x_0)(1+h^2) \quad i = 4, 8 \quad (22)$$

olarak yazılır. Burada, $x_0 = xx_i$, $h_0 = hh_i$ olarak verilmiştir. (ξ_i, η_i) ise düğüm noktalarının doğal (eğrisel) koordinatlarda aldığı değerlerdir ve Çizelge 1'de verilmiştir.

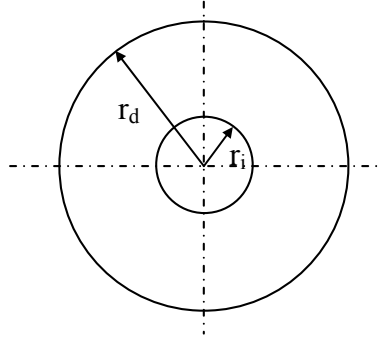
Çizelge 1. (ξ_i, η_i) düğüm noktalarının doğal koordinatlarda aldığı değerler

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-1	0	1	1	1	0	-1	-1
h_i	-1	-1	-1	0	1	1	1	0

Farklı fiber doğrultularında, farklı r_i/r_d oranlarındaki AS/3501 malzemesinden yapılmış sabit kalınlıklı iç kenardan ankastre, dış kenardan serbest (C-F) kompozit diskin (Şekil 4), kritik burkulma yükü parametreleri, Çizelge 2'de verilmiştir.

İç delik çapı çok küçük tutulursa, deliksiz dairesel plakların sonuçları elde edilir. Kompozit deliksiz bir diskin ilk 6 mod şekli, Şekil 5'de verilmiştir.

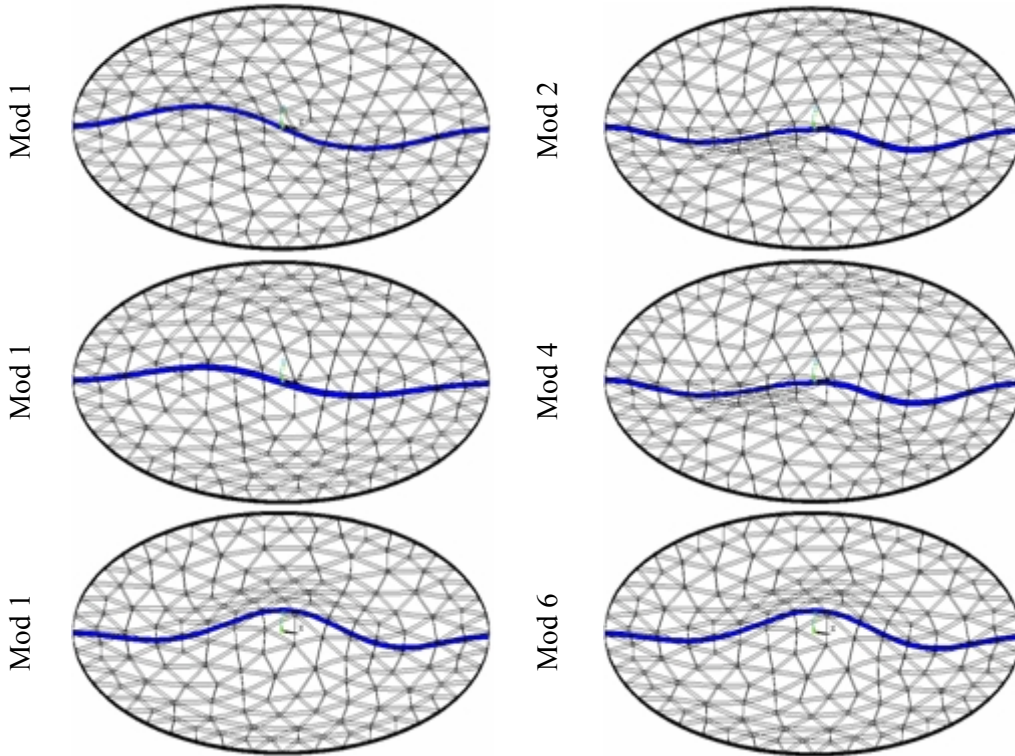
Şekil 6'da; dış kenardan üniform yükleme altındaki sabit kalınlıklı (C-F) sınır koşuluna sahip kompozit diskin, farklı fiber doğrultuları için kritik burkulma yükü parametrelerinin değişimi verilmiştir. Kritik burkulma yükü parametresi, r_i/r_d oranına bağlı olarak, şekilde görüldüğü gibi artmaktadır.



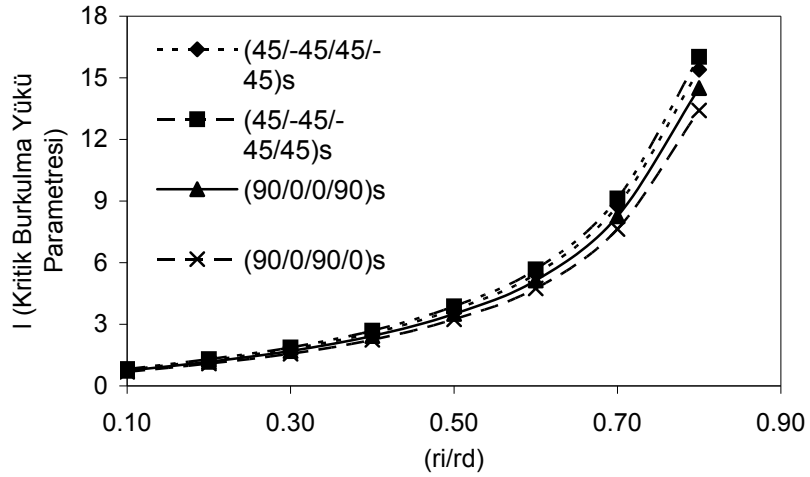
Şekil 4. Kompozit bir disk

Çizelge 2. Kritik burkulma yükü parametreleri

r_i/r_d	$(45/-45/45/-45)_s$	$(45/-45/-45/45)_s$	$(90/0/0/90)_s$	$(90/0/90/0)_s$
	C-F	C-F	C-F	C-F
0,1	0,79	0,82	0,74	0,69
0,2	1,25	1,30	1,18	1,09
0,3	1,8	1,87	1,70	1,57
0,4	2,58	2,68	2,43	2,25
0,5	3,72	3,87	3,50	3,24
0,6	5,45	5,67	5,13	4,75
0,7	8,77	9,13	8,26	7,64
0,8	15,4	16	14,50	13,4



Şekil 5. Kompozit bir diskin ilk 6 mod şekli



Şekil 6. (C-F) Sınır koşuluna sahip kompozit diskin kritik burkulma yükü parametresi değişimi

KAYNAKLAR

- Calcote L.R. (1969): "The Analysis of Laminated Composite Structures", Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- Daniel I.M., Ishai O. (1994): "Engineering Mechanics of Composite Materials", Oxford University Press, New York.
- Gould P.I. (1999): "Analysis of Plates and Shells", Prentice Hall, New Jersey.
- Reddy, J.N. (1997): "Mechanics of Laminated Composite Plates", Theory and Analysis, CRC Press, New York.