

## Radyal basınçlı hava yataklarında yüzey pürüzlülüğünün yatak-rotor sisteminin yük taşıma kapasitesine etkisi

### Effect of surface roughness of a radial aerostatic bearing on the load carrying capacity of a rotor-bearing system

Abdurrahim DAL<sup>1\*</sup>, Tuncay KARAÇAY<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Makine Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Gazi Üniversitesi, Ankara, Türkiye.  
abdurrahimdal@gazi.edu.tr, karacay@gazi.edu.tr

Geliş Tarihi/Received: 24.04.2016, Kabul Tarihi/Accepted: 13.01.2017

\* Yazışılan yazar/Corresponding author

doi: 10.5505/pajes.2017.03274  
Araştırma Makalesi/Research Article

#### Öz

Bu çalışmada, yüzey pürüzlülüğünün, basınçlı hava yatağı ile desteklenmiş bir yatak-rotor sisteminin yük taşıma kapasitesine olan etkileri teorik olarak araştırılmıştır. Bu kapsamda yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki havanın akışı, Reynold's denklemi ile modellenmiştir. Bu model içerisindeki, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki mesafeyi tanımlayan film kalınlık fonksiyonu yüzey pürüzlülüğü ile birlikte ifade edilmiştir. Reynold's denklemi Diferansiyel Transform & Sonlu Farklar hibrid sayısal çözümü kullanılarak çözdürülmüş yüzeyler arasındaki basınç dağılımları ve yatak yük taşıma kapasiteleri hesaplanmıştır. Yüzey pürüzlülüğünün, basınçlı hava yatakları ile desteklenmiş bir yatak-rotor sisteminin yük taşıma kapasitesi üzerindeki etkilerinin araştırılması için, Matlab ortamında bir algoritma geliştirilmiş ve basınçlı hava yatağının geometrik parametreleri ve rotorun açılma hızı için benzetimler yapılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Basınçlı hava yatağı, Yüzey pürüzlülüğü, Yük taşıma kapasitesi, Reynold's denklemi, Hibrid nümerik çözüm yöntemi

#### Abstract

In this study, effects of surface roughness on the load carrying capacity of the rotor-bearing system supported by externally pressurized air bearing are theoretically investigated. Air flow between rotor and bearing surfaces, is modeled using Reynold's equation. In this model, film thickness function which is defined gap between rotor and bearing, is described with surface roughness. In order to obtain pressure distribution between rotor and bearing surface, Reynold's equation is solved with Differential Transform & Finite Difference hybrid numerical solution method and load carrying capacities is calculated. In order to analyze effect of the surface roughness on the load carrying capacity of rotor-bearing system supported by externally pressurized air bearing, an algorithm is developed in Matlab environment and it is simulated for different bearing geometric parameters and rotor angular velocities.

**Keywords:** Externally pressurized air journal bearing, Surface roughness, Load carrying capacity, Hybrid numerical solution method

## 1 Giriş

Basınçlı hava yatakları ile desteklenmiş yatak-rotor sistemlerinde, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki ince yağlayıcı film, yatak üzerine yerleştirilen besleme delikleri üzerinden iletilen basınçlı hava sayesinde oluşturulur. Yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki ince hava filmi rotoru destekleyerek iki yüzeyin temassız çalışmasını sağlar. Basınçlı hava yatakları ile desteklenmiş yatak-rotor sistemlerinde, havanın viskozitesinin sıvı yağlayıcılara göre düşük olması nedeniyle yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki sürtünme kayıpları da düşük olmaktadır. Dolayısıyla, basınçlı hava yatakları yüksek hızlarda dönen rotorların yataklanması için üstünlük sağlayabilmektedir. Bunun yanı sıra, birçok uygulamada sıklıkla kullanılan rulmanlarla kıyaslandığında yatak ve rotor yüzeylerinin temas etmeden çalışması, yatak-rotor sistemi elemanlarının ömrünü de uzatmakta ve bakım maliyetlerini de düşürmektedir.

Basınçlı radyal hava yatakları ile desteklenmiş yatak-rotor sistemlerinde, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki ince yağlayıcı film rotoru taşımaktadır. Yüzeyler arasındaki ince hava filminin hareketi, yatak-rotor sisteminin geometrik parametrelerine ve çalışma şartlarına bağlı olarak ifade edilen Reynold's denklemi ile modellenmektedir. Dolayısıyla basınçlı hava yatağının geometrik parametreleri olan radyal boşluk (c), yatak boy/çap oranı (L/D), yatak üzerindeki besleme deliği sayısı ve bu besleme deliklerinin geometrisi ve çalışma

parametreleri olan besleme basıncı ve rotorun açılma hızı yüzeyler arasındaki akışı etkilemektedir [1]. Bunların yanı sıra, yatak ve/veya rotor yüzeylerinin pürüzlülüğü de yatak ve rotor arasındaki radyal boşluğu değiştirdiği için, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki akışı etkilemektedir. Yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki havanın hareketini etkileyen her bir parametre de yatak-rotor sisteminin dinamiğini doğrudan etkilemektedir [1]-[5]. Literatürde, bu geometrik parametrelerden radyal boşluk miktarı, yatak boy-çap oranı, besleme deliği geometrisinin yatak-rotor sisteminin dinamiğine olan etkilerinin araştırılması üzerine çalışmalar bulunmaktadır. Bu çalışmalarda, yatak ve rotor arasındaki radyal boşluk miktarının, yatak boy-çap oranının (L/D), çalışma koşullarının ve besleme deliği geometrisinin yatak-rotor sistemi dinamiğine etkileri detaylı olarak araştırılmıştır. Majumdar [6], sıralı dizilmiş besleme deliklerine sahip bir basınçlı hava yatağının teorik olarak analiz etmiştir. Çalışmasında basınçlı hava yataklarının tasarım parametreleri olarak adlandırdığı, yatak boy-çap oranı ve eksantriklik oranının yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki ince hava filminin oluşturduğu basınç dağılımına ve yatağın yük taşıma kapasitesine olan etkisini incelemiştir. Yaptığı çalışmada yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki havanın akışını eksenal ve çevresel akış olarak iki parçaya inceleyerek, pertürbasyon metodu ile basınç dağılımlarını elde etmiştir. Han ve diğ. [7], 10 µm radyal boşluğa sahip bir basınçlı hava yatağının boy-çap oranı ve besleme parametrelerinin (besleme deliği geometrisi,

besleme basıncı vb.) yük taşıma kapasitesine olan etkisini teorik ve deneysel olarak araştırmışlardır. Cunningham ve Gunter [8], iki ucundan basınçlı hava yatakları ile desteklenmiş bir yatak-rotor sisteminin kritik hızlarını deneysel olarak incelemişlerdir. Dikey olarak konumlandıkları yatak-rotor sisteminde, rotor ağırlığının etkisini ihmal etmişler ve besleme basıncının, radyal boşluk miktarının ve eksantriklik oranının yatak yay katılığına ve sönüme olan etkilerini araştırmışlardır. Araştırmalarının sonucunda, yay katılığı değerinin lineer olmayan şekilde besleme basıncı ile arttığını ve radyal boşluk miktarı ile azaldığını rapor etmişlerdir. Stout [9], teorik ve deneysel olarak basınçlı hava yataklarının radyal boşluk, besleme deliği geometrisi, yatak boy-çap oranı gibi tasarım parametrelerinin ve yatak formu, yatak yuvarlaklığı, eksen kaçıklığı gibi üretim esnasında ortaya çıkabilecek hataların yatak yük taşıma kapasitesine olan etkisini incelemiştir. Elde ettiği sonuçlara göre üretim toleranslarının belirli bir aralıkta olması gerektiğini ve bu aralığın dışında basınçlı hava yataklarının performansının düştüğünü gözlemlemiştir. Ancak yatak yuvarlaklığının içe dönük (fıçı) olması durumunda yatak yük taşıma kapasitesini arttırdığını rapor etmiştir. Radil ve diğ. [10], basınçlı hava yatakları ile desteklenmiş bir yatak-rotor sisteminde radyal boşluk miktarının yük taşıma kapasitesine olan etkisini deneysel olarak araştırmışlardır. Yatakların tasarım parametrelerinin birbiri ile bağlantılı olduğunu, maksimum yük taşıma kapasitesi için her bir tasarım parametresinin optimizasyonun gerektiğini rapor etmişlerdir. Chen ve diğ. [11], basınçlı hava yataklarının yüksek hızlı matkap uygulamasındaki kullanımları için bir araştırma yapmışlardır. Basınçlı hava yataklarının geometrik parametrelerinin ve sistemin çalışma parametrelerinin yük taşıma kapasitesine ve yatak katılığına olan etkilerini incelemek için benzetimler yapmışlardır. Bu benzetimlerde farklı yatak boy-çap oranına ve farklı besleme deliği geometrilere sahip basınçlı hava yatakları ile oluşturulmuş yüksek hızlı matkap sistemini farklı besleme basınçları için yatak yük taşıma kapasitelerini ve yatak katılıklarını hesaplamışlardır. İki ucundan basınçlı hava yatakları ile desteklenmiş bir yüksek hızlı matkap sistemini test ederek, deneysel ve sayısal sonuçları birbiri ile karşılaştırmışlardır.

Basınçlı hava yatakları ile desteklenmiş yatak-rotor sistemlerinde, rotor ve yatak yüzeylerinin pürüzlülük değerleri yatak ve rotor arasındaki radyal boşluğu değiştirmektedir. Basınçlı hava yataklarının önemli bir parametresi olan radyal boşluktaki değişimler de yatağın performans karakteristiklerini etkileyecektir. Literatürde yüzey kalitelerinin basınçlı hava yataklarının performansına olan etkilerinin araştırıldığı çalışmalar mevcuttur, fakat bu çalışmaların eksenel yataklar üzerinde yapıldığı görülmektedir. Tohder [12], eksenel tip bir hava yatağında yüzey pürüzlülüğünün hava filmine olan etkilerini teorik olarak araştırmıştır. White [13], teorik çalışmada, sıkıştırılabilir bir akışkan yağlaması ile çalışan eksenel tip hava yatağının yüzey pürüzlülüğünün, yatağın yük taşıma kapasitesine olan etkilerini incelemiştir. Bu çalışmanın ardından, White [14], CD okuma/yazma cihazında kullanılan bir eksenel hava yatağının performans özelliklerine, yüzey pürüzlülüğün etkisini inceleyen teorik bir çalışma daha yapmıştır. Bu çalışmada eksenel yatağın her iki yüzeyindeki pürüzlülüğü, radyal boşluk fonksiyonunda stokastik metod (Christensen metodu) ile tanımlayarak, yüzeyler arasındaki basınç dağılımlarını elde etmiş, daha sonraki çalışmalarında

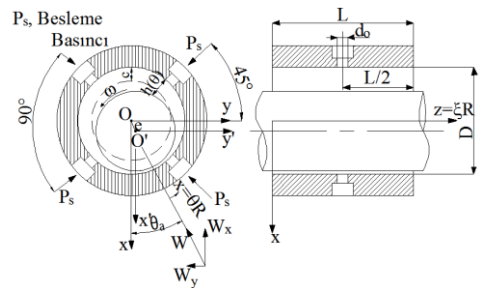
yüzey pürüzlülüğünü hem yatak boyuna hem de yatak enine göre iki kısma ayırarak, her birinin yatak yük taşıma kapasitesine olan etkilerini araştırmıştır [15]-[18]. Yang ve diğ. [19], eksenel tip hava yataklarının yüzey pürüzlülüğünün, yatakların uçurma (flying) karakteristiğine etkilerinin araştırıldığı bir çalışma yapmışlardır. Yaptıkları çalışmada, radyal boşluk fonksiyonunu, istatistiksel olasılık fonksiyonu ile tanımladıkları yüzey pürüzlülüğü ile birlikte ifade etmişler ve farklı yüzey pürüzlülük değerleri için yatağın yük taşıma kapasitesini hesaplamışlardır. Basınçlı hava yataklarının tasarım parametreleri olan radyal boşluk, yatak boy-çap oranı (L/D), besleme deliği geometrisi ve çalışma şartlarının basınçlı hava yataklarının performansına etkilerinin araştırılması ile ilgili çalışmalarda yatak ve rotor yüzeylerinin pürüzsüz olduğu kabul edilmiştir [6]-[11]. Bunun yanı sıra yüzey pürüzlülüğünün etkisi hem aerodinamik hem de eksenel tip hava yatakları için incelenmiştir [12]-[19].

Radyal yataklar konusunda yapılan çalışmalar incelendiğinde rotor ve yatağın temas yüzeylerinin pürüzsüz olduğu kabulü yapılmaktadır. Fakat bu elemanların üretimi sırasında yüzeylerde belirli seviyelerde pürüzlülük oluşmaktadır. Bu çalışmada yüzey pürüzlülüğünün, radyal tip basınçlı hava yataklarının (aerostatik) performansına olan etkisi teorik olarak incelenmiştir. Bu kapsamda ilk olarak yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki havanın akışı, Reynold's denklemi kullanılarak modellenmiştir. Bu matematiksel modelde yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki radyal boşluğu tanımlayan film kalınlık fonksiyonu; yüzey pürüzlülüğü ile birlikte tanımlanmıştır. Yüzey pürüzlülüğünü tanımlamak belirli genlikte normal dağılımlı gelişigüzel veri oluşturulmuş ve nümerik grid üzerine eklenmiştir. Yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki basınç dağılımlarının elde edilmesi için Reynold's denklemi sayısal metodlar kullanılarak çözdürülmüş, basınç dağılımları ile birlikte yağlayıcı hava filmi kuvvetleri de hesaplanmıştır. Film kuvvetleri etkisi altında yatak-rotor sistemi iki serbestlik dereceli olarak modellenmiş ve sistemin hareket denklemleri elde edilmiştir. Bu hareket denklemleri farklı koşullarda çalıştırılmış ve yüzey pürüzlülüğünün, yatakların yük taşıma kapasitesine etkileri benzetimler yapılarak araştırılmıştır.

## 2 Sistemin matematiksel modeli

Basınçlı hava yatağı ile desteklenmiş yatak-rotor sisteminde, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki ince hava filmi, rotora taşır. Dolayısıyla sistemin yük taşıma kapasitesinin, yani performansının analizi için yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki havanın hareketinin modellenmesi gerekmektedir.

Modellenen basınçlı hava yatağı ile desteklenmiş yatak-rotor sistemi, kullanılan koordinat eksenleri ve besleme deliklerinin yatak üzerindeki yerleşimleri Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1: Basınçlı hava yatağı ile desteklenmiş yatak-rotor sisteminin şematik gösterimi.

Akışkan film yağlama teorisinde yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki akışkanın hareketi Navier-Stokes ve süreklilik denklemleri kullanılarak elde edilen Reynold's denklemi ile ifade edilmektedir. Reynold's denklemi sıkıştırılabilir bir akışkan olan hava için, yatağın geometrik parametrelerine ve havanın termodinamik özelliklerine bağlı olarak yapılan kabuller ile birlikte düzenlenerek, Denklem (1)'deki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3 p}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3 p}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + 12 \frac{\dot{m} R^0 T^0}{dx dz} \quad (1)$$

$$= 12 \frac{\partial}{\partial t} (ph) + 6U \frac{\partial}{\partial x} (ph)$$

Burada  $p$  basıncı,  $\mu$  viskoziteyi,  $\dot{m}$  besleme deliklerinden geçen havanın debisini,  $R^0$  gaz sabitini,  $T^0$  mutlak sıcaklığı,  $x$  ve  $z$  ise koordinat eksenlerini (Bkz. Şekil 1),  $h$  film kalınlık fonksiyonunu ifade etmektedir. Pürüzlü bir yüzeyi için film kalınlık fonksiyonu Denklem (2)'deki gibi yatak çevresine ( $\theta$ ) ve yatak boyuna ( $z$ ) bağlı olarak değişen iki farklı fonksiyonun toplamı şeklinde [24]'deki gibi yazılabilir.

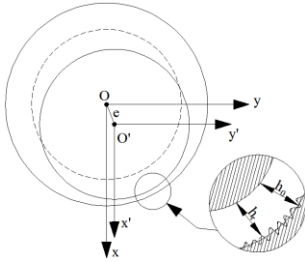
$$h(\theta, z) = h_0(\theta, z) + h_r(\theta, z) \quad (2)$$

Burada,  $h_0$  film kalınlık fonksiyonunun normal kısmını,  $h_r$  ise pürüzlülük kısmını ifade etmektedir. Bu çalışmada, Şekil 2'de gösterildiği gibi sadece yatak yüzeyi pürüzlü rotor yüzeyi pürüzsüz olduğu kabul edilmiş ve yüzey pürüzlülüğü, film kalınlık fonksiyonu içerisinde tanımlanmıştır.

Film kalınlık fonksiyonunun normal kısmını ifade eden  $h_0$  fonksiyonu, radyal boşluğa ( $c$ ) bağlı olarak;

$$h_0(\theta, z) = c + e \cos(\theta - \theta_a) \quad (3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $e$  yatak ve rotor merkezleri arasındaki eksantrikliği,  $\theta_a$  ise hücum açısını ifade etmektedir.



Şekil 2: Yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki radyal boşluk.

Parametre etkilerinin kolay incelenebilmesi için, Denklem (1)'de verilen Reynold's denklemi aşağıda verilen boyutsuz parametreler ile birlikte Denklem (4)'teki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$P = p P_a, H = \frac{h}{c}, \theta = \frac{x}{R}, \xi = \frac{z}{R}, U = r\omega,$$

$$\Lambda = \frac{6\mu\omega}{P_a} \left( \frac{R}{c} \right)^2, \sigma = \frac{12\mu}{P_a} \left( \frac{R}{c} \right)^2 \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( PH^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( PH^3 \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) + \dot{M} = \Lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (PH) + \sigma \frac{\partial}{\partial t} (PH)$$

Burada,  $P$  boyutsuz basıncı,  $\theta$  ve  $\xi$  silindirik koordinat eksen takımını ve  $H$  boyutsuz film kalınlık fonksiyonunu ifade etmektedir. Boyutsuz Reynold's denklemi içerisinde yer alan  $\dot{M}$  boyutsuz kütle debisi olup, yatak üzerine yerleştirilmiş her bir besleme deliğindeki kütle debisi,

$$\dot{M} = \Gamma_o P_s H \Phi \quad (5)$$

şeklinde, besleme basıncına ( $P$ ), film kalınlık fonksiyonuna ( $H$ ), besleme parametresine ( $\Gamma_o$ ) ve orifis fonksiyona ( $\Phi$ ) bağlı olarak ifade edilebilir. Denklem (5)'deki, besleme parametresi ve orifis fonksiyonu sırasıyla Denklem (6) ve Denklem (7)'deki gibi yazılabilir.

$$\Gamma_o = \frac{12\mu c_d \pi d_o \sqrt{R^0 T^0}}{P_a c^2 \Delta \theta \Delta \xi} \quad (6)$$

$$\Phi = \begin{cases} \frac{2\kappa}{\kappa+1} \left( \left( \frac{P_d}{P_s} \right)^{2/\kappa} - \left( \frac{P_d}{P_s} \right)^{\kappa+1/\kappa} \right), & \frac{P_d}{P_s} > \frac{2}{\kappa+1} \\ \sqrt{\left( \frac{2\kappa}{\kappa+1} \right) \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{1/\kappa-1}}, & \frac{P_d}{P_s} \leq \frac{2}{\kappa+1} \end{cases} \quad (7)$$

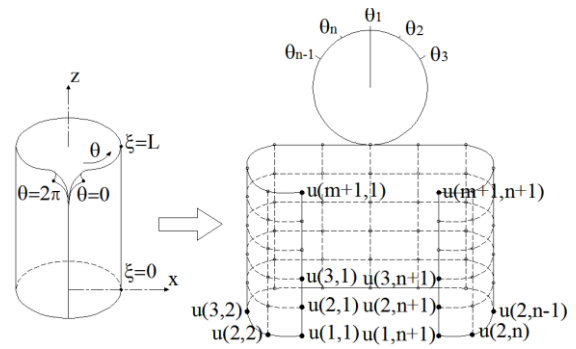
Denklem (6) da geçen,  $d_o$  besleme deliği çapını ve  $c_d$  boşaltım katsayısını ifade etmektedir. Denklem (7) de geçen  $\kappa$  ısı kapasitesi oranını ve  $P_d$  besleme deliği çıkış basıncını ifade etmektedir.

### 3 Yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki hava akışının sayısal çözümü

Reynold's denklemi lineer olmayan kısmi bir diferansiyel denklem olup, sayısal metotlar ile çözülebilir. Literatürde, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki basınç dağılımlarının hesaplanması için Pertürbasyon metodu, sonlu farklar metodu ve sonlu elemanlar metodu sıklıkla kullanılmaktadır. Ancak bu metotlarla yapılan çözümler oldukça fazla işlemci yükü ve zamanı gerektirmektedir [20]. Son zamanlarda, basınç dağılımlarının elde edilmesi için, daha hızlı ve daha az işlemci yükü gerektiren hibrid sayısal çözüm metotlarının kullanımı üzerine çalışmalar başlamıştır. Bu çalışma kapsamında da, basınç dağılımlarının elde edilmesi için Reynold's denklemi hibrid bir sayısal çözüm yöntemi olan Diferansiyel Transform & Sonlu Farklar (DTM&SFM) metodu ile hesaplanmıştır.

#### 3.1 Reynold's denkleminin sayısal çözüm şeması

Reynold's denkleminin sayısal çözümü için, Şekil 3'te gösterildiği gibi, silindirik geometriye sahip yatağın, herhangi bir noktasından açıldığı varsayılabılır, bir kenarı yatak çevresini diğer kenarı da yatak boyunu ifade eden ve  $m \times n$  tane noktadan oluşan dikdörtgen bir çözüm gridi oluşturulmuştur.



Şekil 3: Sayısal çözüm gridi [21].

Çözüm gridi üzerindeki her bir düğüm noktasının değerlerinin hesaplanması için Denklem (4)'de verilen boyutsuz Reynold's denklemi, türevleri alınıp Denklem (9) gibi yeniden yazılabilir.

$$-H^3 \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} \right) - 3H^2 \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + \sigma \frac{H}{P} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + 2\sigma P \frac{\partial H}{\partial t} + \Lambda \frac{H}{P} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + 2\Lambda P \frac{\partial H}{\partial \theta} = 2\dot{M} \quad (9)$$

Burada  $\Theta$ ,  $P^2$ 'yi ifade etmektedir.

Diferansiyel Transform teorisinde, herhangi bir bölgede tanımlı bir fonksiyon, Taylor serisi açılımları ile  $K$  tanım bölgesinde ifade edilebilir. Zaman tanım bölgesinde olan Reynold's denklemi de Diferansiyel Transform teorisine ile  $K$  tanım bölgesinde Denklem (10)'daki gibi ifade edilebilir.

$$-J \otimes \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - I \otimes \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} - 3I \otimes \frac{\partial H}{\partial \xi} \otimes \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - 3I \otimes \frac{\partial H}{\partial \theta} \otimes \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} + 2\Lambda \otimes \frac{\partial P}{\partial \theta} \otimes P + 2\Lambda \otimes \frac{\partial P}{\partial \theta} \otimes H + 4\Lambda \otimes \frac{\partial H}{\partial t} \otimes P + 4\Lambda \otimes \frac{\partial P}{\partial t} \otimes H = 2\dot{M} \quad (10)$$

Burada  $\otimes$ , operatörü konvolusyon operatörünü ifade etmektedir. Denklem (10) içerisinde yer alan  $J$ ,  $I$  ve  $\Theta$  terimlerinin Diferansiyel Transform teorisine ile ifadeleri sırasıyla Denklem (11)-(13)'teki gibi verilebilir.

$$J(k) = H \otimes H \otimes H = \sum_{l=0}^k H_{i,j}(k-l) \sum_{m=0}^l H_{i,j}(l-m) H_{i,j}(m) \quad (11)$$

$$OI(k) = H \otimes H = \sum_{l=0}^k H_{i,j}(k-l) H_{i,jr}(l) \quad (12)$$

$$\Theta(k) = P \otimes P = \sum_{l=0}^k P_{i,j}(k-l) P_{i,j}(l) \quad (13)$$

Diferansiyel Transform & Sonlu farklar hibrid sayısal çözüm metodunda, türevleri alınmış ve  $k$  tanım bölgesine transform edilmiş Reynold's denkleminin (Bkz. Denklem (10)) içerisinde yer alan diferansiyel terimleri,merkezi sonlu farklar yöntemi ile ayrıklaştırılması ve çözüm yaklaşımı [21] de detaylı olarak açıklanmıştır.

### 3.2 Sayısal çözümün başlangıç şartı ve çözüm gridinin sınır şartları

Reynold's denkleminin DTM&SFM hibrid metodu ile çözümünde, çözüm gridi üzerindeki noktaların başlangıçtaki basınç değerleri atmosfer basıncına eşit olduğu kabul edilmiş ve aşağıda sıralanan sınır şartları kullanılmıştır. Yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki basınç dağılımını ifade eden fonksiyon  $P(\xi, \theta)$  ise;

- (1) Yatağın atmosfere açık uçlarındaki basınç değerleri atmosfer basıncına eşittir,
- (2) Yatak ve rotor arasındaki basınç dağılımı sürekli bir fonksiyondur,
- (3) Basınç dağılımı yatak çevresi boyunca periyodik bir fonksiyondur. Yani;

$$P(\xi, \theta) = P(\xi, \theta + 2\pi) \text{ ve } \left. \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|_{\theta} = \left. \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|_{\theta+2\pi}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Sayısal çözümün kararlılığının kontrol edilmesi amacıyla, bir yakınsama kriteri Denklem

(14)'teki gibi tanımlanmıştır. Böylelikle, bir önceki adımdaki çözüm ile anlık çözüm arasındaki mutlak hata belirlenen yakınsama kriterinden küçük olana kadar çözüm devam etmektedir.

$$Y_k \geq \max \left( \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{P_{i,j}^{n+1}} \right) \quad (14)$$

### 3.3 Yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki hava filmi kuvvetleri

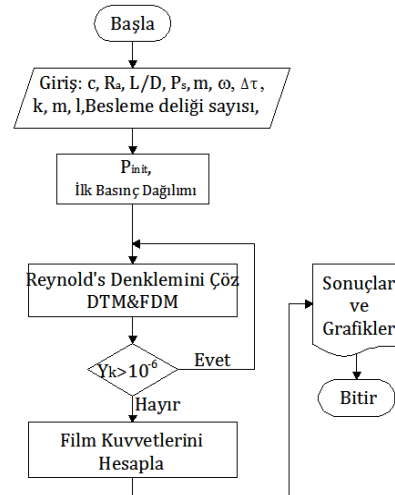
Yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki hava filmi tarafından rotora etkiyen kuvvetler, basınç dağılımı fonksiyonunun rotor boyuna ve rotor çevresine göre integralleri alınarak Denklem (15)'te verildiği gibi hesaplanabilir.

$$W_x = p_a R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{L/R} P(\xi, \theta) \cos \theta d\xi d\theta \quad (15)$$

$$W_y = p_a R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{L/R} P(\xi, \theta) \sin \theta d\xi d\theta -$$

## 4 Yatak-Rotor sistemi benzetim algoritması

Basıncı hava yatağı ile desteklenmiş 2 serbestlik dereceli yatak-rotor sisteminin yük taşıma kapasitesinin ve dinamik hareketlerinin hesaplanması için Matlab ortamında bir algoritma geliştirilmiştir. Bu algoritmaya ait akış şeması Şekil 4'te verilmiştir. Benzetim algoritması, yatağın geometrik parametrelerinin ve havanın termodinamik özelliklerini giriş olarak programa alıp başlamaktadır. Başlangıç ve sınır şartlarının tanımlanmasından sonra, DTM&SFM metodu kullanılarak, grid üzerindeki her bir düğüm noktasının basınç değerleri hesaplanmaktadır. Bir önceki çözümde elde edilen basınç değerleri ile anlık çözüm arasındaki mutlak hata yakınsama kriterinden küçük olana kadar, algoritma yeni basınç değerlerini ilk şart olarak tanımlayıp, tekrar basınç değerlerinin hesaplanması için Reynold's denkleminin çözümüne gitmektedir. Mutlak hatanın yakınsama kriterinden küçük olması halinde çözüm sonlanmakta ve film kuvvetleri hesaplanmaktadır.

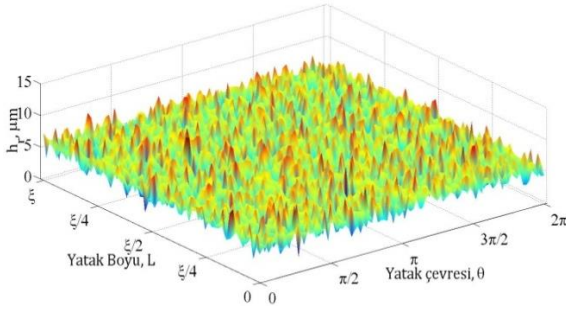


Şekil 4: Yatak-rotor sistemi benzetimi akış şeması.

### 4.1 Yüzey pürüzlülüğü

Basıncı hava yatağı iç yüzeyinde pürüzlülük tanımlamak için nümerik çözüm gridi üzerinde normal dağılım gösteren farklı genliklerde gelişigüzel veri oluşturulmuştur. Bu yüzeyler için

sadece ortalama yüzey pürüzlülüğü bir parametre olarak seçilmiştir. Örnek bir yüzey pürüzlülüğü yapısı üç boyutlu olarak Şekil 5'te verilmiştir.



Şekil 5: Örnek bir yüzey pürüzlülüğü dağılımı.

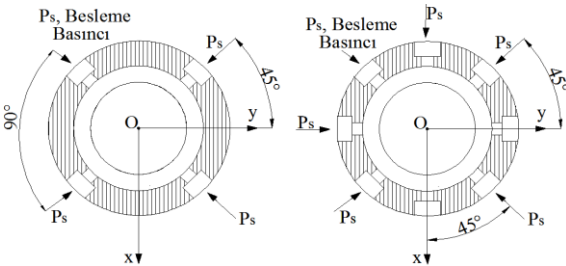
## 5 Bulgular ve tartışmalar

Yüzey pürüzlülüğünün, basınçlı hava yatakları ile desteklenmiş bir yatak-rotor sisteminin yük taşıma kapasitesi üzerindeki etkilerini incelemek için farklı yüzey pürüzlülük değerleri için benzetimler yapılmıştır. Ayrıca yatağın geometrik parametrelerinin bu değişimdeki etkisini incelemek için benzetimler farklı yatak geometrik özellikleri için de tekrarlanmıştır. Reynold's denkleminin sayısal çözümü için, işlemci yükü ve sayısal çözümün kararlılığı göz önünde bulundurularak, 64 adet yatak uzunluğu yönünde, 96 adet yatak çevresi yönünde düğüm noktasından oluşan çözüm gridi kullanılmış, yakınsama kriteri de  $10^{-6}$  olarak seçilmiştir. Benzetimlerin tamamında zaman adımı  $10^{-3}$  s kullanılmıştır.

Benzetimi yapılan basınçlı hava yatağının özellikleri ve havanın termodinamik özellikleri Tablo 1'de, verilmiştir. Bu çalışma kapsamında 4 ve 8 besleme deliğine sahip iki farklı yatak kullanılmış olup, bu yataklardaki besleme deliklerinin, yatak üzerindeki yerleşimleri de Şekil 6'da verilmiştir.

Tablo 1: Benzetimlerde kullanılan basınçlı hava yataklarına ait tipik özellikler.

Özellik	Değer
Viskozite, $\mu$	$17.4 \times 10^{-6}$ Pa.s
Mutlak Sıcaklık, $T^0$	288.15 °K
Gaz Sabiti, $R^0$	287.6 J/Kg °K
Besleme Deliği Çapı, $d_0$	0.003 m
Isı kapasitesi oranı, $\kappa$	1.4

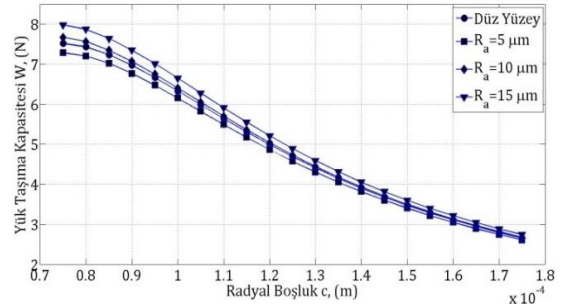


Şekil 6: Besleme deliklerinin yatak üzerindeki yerleşimleri.

### 5.1 Radyal boşluğun etkisi

Basınçlı hava yatağı ile desteklenmiş yatak-rotor sistemlerinde, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki radyal boşluk miktarı ( $c$ ), basınç dağılımını yani basınçlı hava yataklarının performansını etkileyen önemli geometrik parametrelerden biridir. Radyal boşluk miktarının, yatak yük taşıma kapasitesine etkisinin, yatak yüzey yapısı ile değişiminin araştırılması için benzetimler yapılmış ve yatak

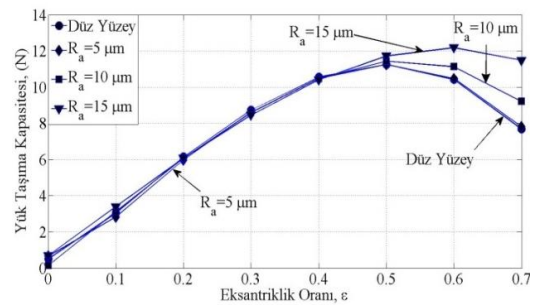
yük taşıma kapasiteleri hesaplanmıştır. Bu benzetimlerde kullanılan tüm yataklar 4 orifisli olup,  $L/D$  oranı 2 olarak seçilmiştir. Şekil 7'de yatak yük taşıma kapasitesinin radyal boşluk miktarına göre değişimi farklı yüzey pürüzlülük değerleri için verilmiştir. Üç farklı yüzey yapısı için, yatak yük taşıma kapasitesi radyal boşluk artması ile birlikte, havanın sıkıştırılabilirlik özelliği nedeniyle, lineer olmayan bir şekilde azalmaktadır. Radyal boşluğun artması ile birlikte, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki hacmin artması, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki hava filminin sıkıştırılabilirlik özelliğinin de değişmesine sebep olmaktadır. Yüzey pürüzlülüğünün artması ile birlikte yatak yük taşıma kapasitesi düşük radyal boşluk miktarları için artmaktadır. Ancak radyal boşluğun artması ile birlikte yüzey pürüzlülüğünün yük taşıma kapasitesi üzerindeki etkisi de azalmaktadır.



Şekil 7: Farklı yüzey pürüzlülük değerleri için yatak yük taşıma kapasitesinin radyal boşluk miktarı ile değişimi ( $\epsilon=0.25$ ,  $L/D=2$ , Besleme Deliği Sayısı=4).

### 5.2 Eksantrikliğin etkisi

Basınçlı hava yatakları ile desteklenmiş yatak-rotor sistemlerinde, rotorun yatak içerisindeki konumu yatak ve rotor arasındaki radyal boşluk miktarını değiştirmektedir. Dolayısıyla, rotorun yatak içerisindeki konumu basınç dağılımını yani yatakların yük taşıma kapasitelerini etkileyen bir diğer önemli parametredir. Eksantrikliğin yük taşıma kapasitesine olan etkisinin yatak yüzey yapısı ile değişiminin incelenmesi için, yatak boy-çap oranı ( $L/D$ ) 2 olan, 75  $\mu$ m radyal boşluğa sahip 4 orifisli bir basınçlı hava yatağı ile desteklenmiş yatak-rotor sisteminin, farklı eksantriklik oranları ve farklı yüzey yapıları için yatak yük taşıma kapasiteleri hesaplanmış ve Şekil 8'de gösterilmiştir. Yatak yük taşıma kapasitesi, eksantriklik oranı 0.5'e kadar tüm yüzey pürüzlülük değerleri için artmaktadır. Bununla birlikte, eksantriklik oranı 0.5'in üzerine çıktığı zaman, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki hava filmi kalınlığı azalmakta ve havanın lineer olmayan karakteristiği nedeniyle yük taşıma kapasitesi de düşmektedir.

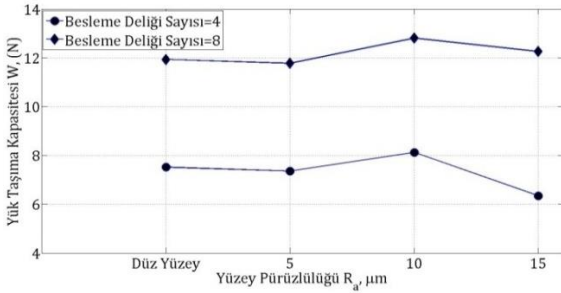


Şekil 8: Farklı yüzey pürüzlülük değerleri için yatak yük taşıma kapasitesinin eksantriklik oranı ile değişimi ( $c=75 \mu$ m,  $L/D=2$ , Besleme Deliği Sayısı=4).

Ancak, yüzey pürüzlülük değeri arttığı zaman ( $R_a > 5 \mu\text{m}$ ) yük taşıma kapasitesindeki düşüş azalmaktadır. Bu durum benzetimi yapılan yüzey pürüzlülük değerlerinde hava filminin bozulmadığı, diğer bir deyişle halen özelliğini koruduğu şeklinde yorumlanmıştır.

### 5.3 Besleme deliği sayının etkisi

Reynold's denklemi, yatak ve rotor yüzeyleri arasına iletilen hava debisinin bir fonksiyonudur (Bkz. Denklem (1)). Dolayısıyla yüzeyler arasındaki basınç dağılımı hava debisini etkileyen her bir parametreden etkilenecektir. Besleme deliği sayısı hava debisini doğrudan etkileyen önemli bir parametredir. Yatak üzerine yerleştirilen besleme deliği sayısının yatak yük taşıma kapasitesine olan etkilerinin yüzey pürüzlülüğü ile değişiminin incelenmesi için, 4 ve 8 adet besleme deliğine sahip iki tip yatak belirlenmiş (Bkz Şekil 5) ve yük taşıma kapasiteleri hesaplanmıştır. Bu benzetimlerde kullanılan tüm yatakların boy çap oranı ( $L/D$ ) 2 olup, radyal boşluk miktarları  $75 \mu\text{m}$  olarak seçilmiştir. Şekil 9'da yatak yük taşıma kapasitesinin yüzey pürüzlülük değerine göre değişimi bu iki farklı tip yatak için verilmiştir. Besleme deliği sayısının artması ile birlikte yatak ve rotor yüzeyleri arasına iletilen hava debisi de doğrusal olarak artmaktadır. Dolayısıyla yatak yük taşıma kapasitesini arttırmaktadır. Bunun yanı sıra her iki tip yatak için yatak yük taşıma kapasitesinin yüzey pürüzlülük değeri ile değişimi benzerlik göstermektedir.

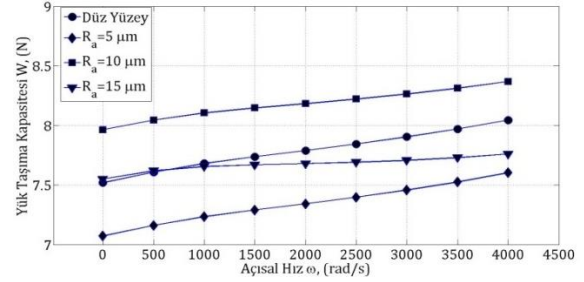


Şekil 9: Farklı besleme deliği sayısı için yatak yük taşıma kapasitesinin yüzey pürüzlülük değeri ile değişimi ( $\epsilon=0.25$ ,  $c=75 \mu\text{m}$ ,  $L/D=2$ ).

### 5.4 Rotor açılma hızının etkisi

Basıncı hava yatakları ile desteklenmiş yatak-rotor sistemlerinde, rotorun açılma hızı, Reynold's denkleminin bir parametresi olup, basınç dağılımını ve yatak performansını etkilemektedir. Rotor açılma hızının farklı yüzey pürüzlülük değerleri için yatak yük taşıma kapasitesine etkisi araştırılmıştır. Bu kapsamda, 4 orifisli,  $L/D$  oranı 2 olan  $75 \mu\text{m}$  radyal boşluğa sahip yatağın farklı yüzey yapıları için 0-4000 rad/s aralığındaki rotor açılma hızlarında benzetimler yapılmış ve yük taşıma kapasiteleri hesaplanmıştır. Şekil 10'da yük taşıma kapasitesinin rotor hızı ile değişimi farklı yüzey pürüzlülük değerleri için verilmiştir. Rotorun açılma hızının artması ile birlikte yatak yük taşıma kapasitesi de doğrusal olmayan şekilde artmıştır. Yüzey pürüzlülüğünün etkisi incelendiğinde,  $10 \mu\text{m}$  yüzey pürüzlülük değerine kadar, yük taşıma kapasitesinin rotor açılma hızı ile değişimi hemen hemen aynı karakteristiği sergilemiştir. Beklenildiği gibi rotorun artan açılma hızı ile birlikte hava filmi oluşan aerodinamik etkilerin artmasıyla birlikte yük taşıma kabiliyeti artmıştır. Ancak yüzey pürüzlülüğü daha fazla artırıldığında ( $10 \mu\text{m}$  üzerine çıktığında), rotorun açılma hızının etkisi 1000

rad/s üzerinde neredeyse görülmemektedir. Bu durum yüksek yüzey pürüzlülüğü değerlerinde, dinamik şartlarda, hava filminin sürekliliğinin sağlanamadığı ve bu sebeple aerodinamik etkilerin oluşmadığı, dolayısıyla aerodinamik etki kaynaklı yük taşıma kabiliyetinin artmadığı şeklinde yorumlanmıştır. Radyal havalı yataklarda, bu konuda literatürde çalışma bulunmamakla birlikte, akışkan olarak yağlayıcıların kullanıldığı radyal yataklarda yapılan çalışmalarda da benzer durumun olduğu, yağ filminin kırıldığı ve yük taşıma kabiliyetinin düştüğü görülmektedir [22],[23].



Şekil 10: Farklı yüzey pürüzlülük değerleri için yatak yük taşıma kapasitesinin rotorun açılma hızı ile değişimi ( $\epsilon=0.25$ ,  $c=75 \mu\text{m}$ ,  $L/D=2$ ).

## 6 Sonuçlar

Bu çalışmada yüzey pürüzlülüğünün, radyal tip basınçlı hava yataklarının (aerostatik) performansına olan etkisi teorik olarak incelenmiştir. Bu amaçla yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki havanın akışı, yatak ve rotor yüzeyleri arasındaki radyal boşluğu tanımlayan film kalınlık fonksiyonu; yüzey pürüzlülüğü ile birlikte tanımlanarak, film kuvvetleri, diğer bir ifadeyle yatağın yük taşıma kabiliyeti incelenmiştir. Yüzey pürüzlülük değerinin artmasıyla düşük radyal boşluk miktarları için yük taşıma kabiliyetinin arttığı, ancak radyal boşluk miktarının artması ile birlikte yüzey pürüzlülüğünün yük taşıma kabiliyeti üzerindeki etkisinin azaldığı görülmüştür. Diğer taraftan rotorun yatağa yaklaştığı durumlarda, yüksek eksantriklik değerlerinde, yüzey pürüzlülüğünün hava filminin özelliğini korumaya yardımcı olduğu ve yük taşıma kapasitesini artırdığı görülmüştür. Hava yatağını besleyen orifislerinin sayısının değiştirildiği durumda yüzey pürüzlülüğünün büyük bir farklılık göstermediği, hava debisindeki artışın yük taşıma kapasitesine olan etkisinin çok daha baskın olduğu tespit edilmiştir. Rotorun dinamik durumunda ise düşük yüzey pürüzlülüklerinde açılma hızının artmasıyla aerodinamik kuvvetlerin etkisinin arttığı ve dolayısıyla yatağın performansının arttığı gözlemlenmiş olmakla birlikte, yüzey pürüzlülüğü daha da artırıldığında muhtemelen hava filminin bütünlüğü korunamadığı için yük taşıma kabiliyetinin etkilenmediği tespit edilmiştir. Çalışmanın sonuçlarının özellikle deneysel çalışmalara ışık tutacak nitelikte olduğu, yatak imalatı yapılırken geometrik tasarım parametreleriyle birlikte yüzey pürüzlülüğünün de göz önünde tutulması gerektiği anlaşılmaktadır.

## 7 Teşekkür

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından ARDEB-1001 programı kapsamında 112M847 kodlu proje ile desteklenmiştir. Bu çalışmanın yapılmasına katkı sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederiz.

## 8 Kaynaklar

- [1] Powell N, Powell J. *Gas Lubricated Bearings*. London, UK, Butterworths Publishing, 1964.
- [2] Powell J. *Design of Aerostatic Bearings, Machinery's Books for Engineers*. London, UK, Machinery Publishing Co. Ltd., 1970.
- [3] Şahin DE. Basınçlı Hava Yataklı Rotorların Salınımları. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara, Türkiye, 2001.
- [4] Czolczynski K. *Rotordynamics of Gas-Lubricated Journal Bearing Systems, Mechanical Engineering Series*. New York, USA, Springer, 1999.
- [5] Slocum A. *Precision Machine Design*, USA, Prentice Hall, 1992.
- [6] Majumdar BC. "Analysis of externally pressurized gas journal bearing". *Journal of Mechanical Science*, 12(1), 1-8, 1970.
- [7] Cunningham R, Gunter E, Center R. "Critical Speeds of a Rotor in Rigidly Mounted, Externally Pressurized Air-lubricated Bearings". NASA, USA, Technical Report, NASA-TN-D-6350, E-6134, 1971.
- [8] Stouth KJ. "The effect of manufacturing variations on the performance of externally pressurized gas-lubricated journal bearings" *Journal of Mechanical Engineering Science*, 199(4), 299-309, 1985.
- [9] Han D, Park S, Kim W, Kim J. "A study on the characteristics of externally pressurized air bearings". *Precision Engineering*, 16(3), 164-173, 1994.
- [10] Radil K, Howard S, Dykas B. "The Role of Radial Clearance on the Performance of Foil air Bearings". NASA, USA, Technical Report, NASA-TM-2002-211705, 2002.
- [11] Chen Y, Chiu C, Cheng Y. "Influences of operational conditions and geometric parameters on the stiffness of aerostatic journal bearings". *Precision Engineering*, 34(4), 722-734, 2010.
- [12] Tønder KK. "A Numerical assessment of the effect of striated roughness on gas lubrication". *Journal of Tribology*, 106(3), 315-319, 1984.
- [13] White JW. "Surface roughness effects on the load carrying capacity of very thin compressible lubricating films". *Journal of Lubrication Tech*, 102(4), 445-451, 1980.
- [14] White J. "The effect of two sided surface roughness on ultra-thin gas films". *Journal of Lubrication Tech*, 105(1), 131-137, 1983.
- [15] White J. "The effect of two-dimensional surface roughness on the load-carrying capacity of a thin compressible gas film". *Journal Tribol*, 115(2), 246-252, 1993.
- [16] White J, Tabrizi PE, Ketkar AH, Prabhu PP. "A numerical study of surface roughness on ultra-thin gas films". *Journal Tribol*, 108(1), 171-177, 1986.
- [17] White J, Raad PE. "Effect of a rough translating surface on gas film lubrication". *Journal Tribol*, 109, 271-275, 1987.
- [18] White J. "A gas lubrication equation for high knudsen number flows and striated rough surfaces". *Journal Tribol*, 132(2), 21701-21709, 2010.
- [19] Yang TY, Shu DW, Shi BJ, Bai X. "Effects of disk surface roughness on static flying characteristics of air bearing slider by using a combined method of Reynolds equation and rough disk surface". *Microsyst Technol*, 22(9), 2295-2306, 2016.
- [20] Wang CC, Yau HT. "Theoretical analysis of high speed spindle air bearings by a hybrid numerical method". *Applied Mathematics and Computation*, 217(5), 2084-2096, 2010.
- [21] Dal A, Karaçay T. "Basınçlı hava yataklarında reynold's denkleminin sayısal çözümü için diferansiyel transform sonlu farklar hibrid metodu uygulaması". *XIX. Ulusal Mekanik Kongresi*, Trabzon, Türkiye, 24-28 Ağustos 2015.
- [22] Weng CI, Chen CR. "Linear stability of short journal bearings with consideration of flow rheology and surface roughness". *Tribology International*, 34(8), 507-516, 2001.
- [23] Lin JW, Hsu CH, Lai C. "Surface roughness effects on the oscillating squeeze-film behavior of long partial journal bearings". *Computers&Structures*, 80(3), 297-303, 2002.
- [24] Dal A, Karaçay T. "Effects of surface roughness on the dynamics of a rotor supported by aerostatic bearing", *Proceedings of World Conference on Engineering* London, UK, June 29-July 1 2016, Vol. II, 919-924, 2016.