C.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Fen Bilimleri Dergisi (2003)Cilt 24 Sayı 1

Çoğul-Değerli Fonksiyonların Almost D-Süreklilikleri Üzerine

Metin AKDAĞ ve Savaş TEMİZİŞLER

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 58140 Sivas

E-posta: makdag@cumhuriyet.edu.tr

Received;07.02.2003, Accepted;04.04.2003

Özet: Bu çalışmada bir topolojik uzay üzerindeki F_σ ve G_δ kümelerden yararlanılarak 2^Y üzerinde D^+ ve D^- topolojileri tanımlandı. Bilinen Vietoris topolojileri ile karşılaştırılarak $D^+ \leq V^+$ ve $D^- \leq V^-$ olduğu görüldü. Daha sonra $F : X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu için a-D-ü.y.s. ve a-D-a.y.s. olması tanımları verildi ve denk koşulları veren teoremler ifade ve ispat edildi. Bu sürekliliklerin daha zayıf tipleri olan w-D-ü.y.s., w-D-a.y.s. tanımları çoğul-değerli fonksiyonların bu tür süreklilikleri için karakterizasyonlar verildi.

Anahtar Kelimeler: Çoğul-değerli fonksiyonlar, D-Süreklilik.

On the Almost D-Continuity of Multifunctions

Abstract: In this paper, we study upper (lower) almost D-continuous of multifunctions and obtain some characterizations and some basic properties of such a multifunction. Also we give some comparisions with upper (lower) D-continuity and weakly upper (lower) D-continuty.

Keywords: Multifunction, D-continuity

1. Giriş ve Bazı Tanımlar

Tek değerli fonksiyonların zayıf süreklilikleri ile ilgili çalışmalar 1922 yılında H.Blumberg ile başladı $[1]$. 1966 yılında T.Husain $[2]$ ve 1968 de Singal and Singal $[3]$ tek değerli fonksiyonların almost sürekliliklerini tanımladılar ve çalıştılar. Bu çalışmamıza örnek olan tek değerli fonksiyonların sürekliliği 1922 yılında J.K.Kohli tarafından tanımlandı $[4]$. Bu makale üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde makalede geçen kavramlar ve önceki çalışmalar özetlenmektedir. İkinci bölümde bir topolojik uzay üzerindeki F_σ ve G_δ kümelerden yararlanılarak 2^Y üzerinde D^+ ve D^- topolojileri tanımlandı. Bilinen Vietoris topolojileri ile karşılaştırılarak $D^+ \leq V^+$ ve $D^- \leq V^-$ olduğu görüldü. Daha sonra $F : X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu için D-ü.y.s. ve D-a.y.s. olması tanımları verildi. Çoğul-değerli fonksiyonların bu tür süreklilikleri için karakterizasyonlar araştırıldı. Son olarak bu makalede geçen süreklilik türleri arasındaki ilişkiler incelendi.

X, Y topolojik uzaylar ve F, X'den Y'ye bir çoğul-değerli fonksiyon, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ olsun. $F(A) = \cup\{F(x) | x \in A\}$, $F^-(B) = \{x | F(x) \cap B \neq \varnothing\}$, $F^\#(A) = \{y | F^-(y) \subseteq A\}$ ve $F^+(B) = \{x | F(x) \subseteq B\}$ kümelerine sırasıyla A'nın F altındaki büyük görüntüsü, B'nin F altındaki büyük ters görüntüsü A'nın F altındaki küçük görüntüsü, B'nin F altındaki küçük ters görüntüsü denir (Ponomarev, 1964 [5]). X, Y topolojik uzaylar ve F, X'den Y'ye bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Her $B \subset Y$ kapalı alt kümesi için $F^-(B)$, X'in kapalı alt kümesi oluyorsa F'ye üstten yarı süreklidir veya kısaca ü.y.s. dir denir, her $A \subset Y$ açık alt kümesi için $F^-(A)$, X'in açık alt kümesi oluyorsa F'ye alttan yarı süreklidir veya kısaca a.y.s. dir denir, F çoğul-değerli fonksiyonu ü.y.s. ve a.y.s. ise F'ye süreklidir denir.(Long and Herrington, 1975 [6]) X, Y topolojik uzaylar ve $F : X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. $G(F)$, F'nin grafiği olmak üzere her bir $(x, y) \in X \times Y - G(F)$ için $(U \times V) \cap G(F) = \varnothing$ $\left[(U \times \overline{V}) \cap G(F) = \varnothing\right]$ olacak şekilde X içinde x noktasının bir U, Y içinde y noktasının bir V komşuluğu varsa F'ye grafiği kapalıdır (kuvvetli kapalıdır) denir.

(Y,τ) bir topolojik uzay olsun. Y kümesi üzerindeki τ topolojisinden yararlanılarak 2^Y kümesi üzerinde çeşitli topolojiler tanımlanabilir. Bunlardan ikisini şöyle tanımlayacağız. $G\in\tau$ olmak üzere $(G)=\{A\subset Y \mid A\cap G\neq\varnothing\}$ ve $\langle G\rangle=\{A\subset Y \mid A\subset G\}$ küme ailelerini tanımlayalım. 2^Y kümesi üzerinde $\{(G) \mid G\in\tau\}$ ailesini taban kabul eden topolojiye alt Vietoris topoloji, $\{\langle G\rangle \mid G\in\tau\}$ ailesini alt taban kabul eden topolojiye üst Vietoris topoloji denir. Bu topolojiler sırasıyla V^- ve V^+ ile gösterilir. Ayrıca 2^Y üzerinde $V=V^-\vee V^+$ topolojisine de Vietoris topoloji denir (Michael, 1951 [7]). X, Y topolojik uzaylar ve $F:X\to Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon olsun. F fonksiyonunun a.y.s.(ü.y.s., sürekli) olması için gerekli ve yeterli koşul X'den $2^Y-\{\varnothing\}$'ye tanımlı olan ve F'ye karşılık gelen f tek-değerli fonksiyonunun $V^-(V^+,V)$ topolojisine göre sürekli olmasıdır [8].

(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bir $A\subseteq X$ için A nın her açık örtüsünün kapanışları A'yı örten bir sonlu altörtüsü varsa, A'ya quasi H-kapalıdır denir. Eğer X uzayının kendisi quasi H-kapalı ise uzaya quasi H-kapalıdır denir. Eğer X uzayı hem quasi H-kapalı hem de Hausdorff ise uzaya H-kapalıdır denir [9]. X uzayının bütün kapalı alt kümeleri quasi H-kapalı ise uzaya C-kompakt uzay denir [10]. X uzayında her $x\in X$ noktasının quasi H-kapalı olan bir U açık komşuluğu varsa uzaya yerel H-kapalı uzay denir. Bir X uzayında her farklı x,y noktaları için $x\in U$, $y\in V$ ve $\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$ olacak biçimde U ve V açık kümeleri varsa X uzayına Uryshon uzay denir (Singal and Arya, 1969 [11]). (X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subseteq X$ olsun. Eğer $\overline{\overset{o}{A}}=A$ $(A=\overset{o}{\overline{A}})$ ise A'ya regüler kapalı (regüler açık) küme denir. Her bir $x\in X$ ve x noktasını bulundurmayan her bir A regüler kapalı kümesi için $x\in U$, $A\subseteq V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde U, V açık kümeleri varsa (X,τ)'ya hemen hemen regüler (almost regüler) uzay denir [11] (Dorsett, 1982 [10]). Her bir $x\in X$ ve x noktasını bulundurmayan her bir A yarı kapalı kümesi için $x\in U$, $A\subseteq V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde U,

V yarı açık kümeleri varsa (X,τ)'ya yarı regüler (semiregular) uzay denir.

2. 2^Y Üzerinde D^+, D^- Topolojileri

Bu bölümde bir topolojik uzaydaki F_σ ve G_δ-kümelerinden yararlanarak 2^Y üzerinde iki yeni topoloji tanımlayacağız. Öncelikle F_σ-küme ve G_δ-küme tanımlarını verelim.

Tanım 2.1: (Eisenberg, 1974 [12]) **(A)** (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesi sayılabilir tane kapalı kümenin birleşimine eşit ise A'ya X'de bir F_σ-küme denir. Sembolik olarak $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n \in \tau^K$ ise A bir F_σ-kümedir. **(B)** (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesi sayılabilir tane açık kümenin keşimi olarak yazılabiliyor ise A'ya X'de bir G_δ-küme denir. Sembolik olarak $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n \in \tau$ ise A bir G_δ-kümedir.

Önerme 2.1: (Y,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $\beta_1 = \{2^Y \setminus (V) \,|\, V,$ kapalı G_δ-küme$\}$ ve $\beta_2 = \{2^Y \setminus \langle V \rangle \,|\, V,$ kapalı G_δ-küme$\} \cup \{\varnothing\}$ aileleri sırasıyla 2^Y üzerinde farklı iki topoloji için taban ve alt taban olurlar.

İspat: (i) $V = \varnothing$ bir kapalı G_δ-kümedir ve $(V) = \varnothing$ olacağından $2^Y \setminus (V)$ = $2^Y \in \beta_1$ olur.

(ii) $2^Y - (V_1)$, $2^Y \setminus (V_2) \in \beta_1$ olsun. $\left[2^Y \setminus (V_1)\right] \cap \left[2^Y \setminus (V_2)\right] = 2^Y \setminus (V_1 \cup V_2)$ ve $(V_1 \cup V_2)$ kapalı G_δ-küme olacağından β_1, 2^Y üzerinde bir topoloji için taban olur.

β_2'nin de alt taban oluşu benzer biçimde gösterilir.

Önermedeki β_1 ve β_2 ailelerinin taban ve alt taban olduğu topolojileri sırasıyla D^+ ve D^- ile gösterelim.

Önerme 2.3: (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere 2^Y üzerindeki D^+, D^-, V^+ ve V^- topolojileri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.

a) $D^+ \leq V^+$

b) $D^- \leq V^-$

İspat:(a) $2^Y - (V) \in \beta_1$ olsun. Burada V kapalı G_δ-kümedir. $2^Y - (V) =$ $< Y \backslash V >$ olduğundan ve $Y \backslash V \subset Y$ açık bir küme olduğundan $< Y \backslash V >$ $\in V^+$ olur. O halde $D^+ \leq V^+$ dir.

(b) Benzer biçimde $2^Y - < V > = (Y \backslash V)$ olduğundan $D^- \leq V^-$ dir.

Tanım 2.4:[14] $F : X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $F(x_0) \cap V = \varnothing$ olan bir $Y \backslash V$ açık F_σ-kümesi için $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \cap V = \varnothing$ gerektirmesini sağlayan en az bir $U_{x_0} \subset X$ açık kümesi varsa, F'ye $x_0 \in X$ noktasında D-üstten yarı sürekli veya kısaca D-ü.y.s. denir.

Teorem 2.5: $F : X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonunun $x_0 \in X$'de D-ü.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul F'ye karşı gelen her $x \in X$ için $f(x) = F(x)$ biçiminde tanımlı $f : X \to (2^Y, D^+)$ tek değerli f fonksiyonunun $x_0 \in X$'de sürekli olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): V, kapalı G_δ-küme, $f(x_0) \in 2^Y \backslash (V)$ olsun. $f(x_0) \in < Y \backslash V >$ ve $f(x_0) \subset Y \backslash V$ olur. O halde $f(x_0) = F(x_0)$ olduğundan $F(x_0) \cap V = \varnothing$ olur. $Y \backslash V$ açık F_σ-küme ve F, D-ü.y.s. olduğundan x_0'ı bulunduran bir $U_{x_0} \subset X$ açık kümesi $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \cap V = \varnothing$ olacak şekilde vardır. Bu durumda $x \in U_{x_0} \Rightarrow f(x) \notin V$ yani $f(x) \in 2^Y \backslash (V)$ olur. Böylece $f : X \to (2^Y, D^+)$ fonksiyonu $x_0 \in X$ de sürekli olur.

($\Leftarrow$): f, x_0'da sürekli olsun. $F(x_0) \cap V = \varnothing$ olan $Y \backslash V$ açık F_σ-kümesi alalım. $F(x_0) \subset Y \backslash V \Rightarrow F(x_0) \in < Y \backslash V > \Rightarrow F(x_0) \in 2^Y \backslash (V)$ olur. $f(x) = F(x)$ olduğundan $f(x_0) \in 2^Y \backslash (V)$ olur. f, x_0'da sürekli olduğundan en az bir $U_{x_0} \subset X$ açık kümesi vardır öyle ki $x \in U_{x_0} \Rightarrow f(x) \in 2^Y \backslash (V)$ dir. Buradan $F(x) \in < Y \backslash V >$ ise $F(x) \subset Y \backslash V$ ve $F(x) \cap V = \varnothing$ olur. Her $x \in U_{x_0}$ için elde edilir. Böylece F, D-ü.y.s olur.

Önerme 2.6: Y, bir C-kompakt, regüler ve Hausdorff uzay olsun. $F : X \to Y$ kuvvetli kapalı grafikli bir çoğul-değerli fonksiyon ise F, D-ü.y.s. dir.

İspat : Kabul edelim ki $G(F)$ kuvvetli kapalı olsun. $K \subset Y$ tümleyeni açık F_σ-küme ve $x \notin F^-(K)$ olsun. $F(x) \cap K = \varnothing$ tur. Her $y \in K$ için $(x,y) \notin G(F)$'tir. $G(F)$ kuvvetli kapalı olduğundan $x \in U_y(x)$, $y \in V_y$ açık kümeleri vardır öyle ki $F(U_y(x)) \cap \overline{V_y} = \varnothing$ tur. $\{V_y \mid y \in K\}$ ailesi K'nın bir açık örtüsünü oluşturur. K tümleyeni açık F_σ-küme olduğundan kapalıdır ve uzay C-kompakt olduğundan K quasi H-kapalı kümedir. y_1, $y_2, \dots,$ $y_n \in K$ noktaları vardır öyle ki $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{y_i}}$ dir. Her i için V_{y_i}'ye karşı gelen $U_{y_i}(x)$'ler için $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}(x)$ olsun. $x \in U$ ve $U \subset X$ açıktır. Ayrıca her i için $F(U_{y_i}(x)) \cap \overline{V_{y_i}} = \varnothing$ olduğun- dan $F(U) \cap \overline{V_{y_i}} = \varnothing$ ve $F(U) \cap \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{y_i}} = \varnothing$ tur. $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{y_i}}$ olduğundan $F^+(F(U)) \cap F^-(K) = \varnothing$ dır ve $U \subset F^+(F(U))$ olduğundan $U \cap F^-(K) = \varnothing$ tur. Sonuç olarak $x \in U \subset X - F^-(K)$ olur. Buradan $X - F^-(K)$ açık ve $F^-(K)$ kapalıdır. Böylece F, X'de D-ü.y.s. olur.

Tanım 2.7:[13] X, Y topolojik uzaylar, $F : X \to Y$ bir çoğul değerli fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ ve $Y - V$ kapalı G_δ-küme olan bir V kümesi için $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \cap V \neq \varnothing$ gerektirmesini sağlayan en az bir $U_{x_0} \subset X$ açık kümesi varsa F'ye $x_0 \in X$ noktasında D-alttan yarı sürekli veya kısaca D-a.y.s. denir.

Önerme 2.8: X, Y topolojik uzaylar, $F : X \to Y$ bir çoğul değerli fonksiyon olsun. F'nin $x_0 \in X$'de D-a.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul F'ye karşı gelen $f : X \to (2^Y, D^-)$ tek-değerli fonksiyonu- nun $x_0 \in X$'de sürekli olmasıdır.

İspat: Teorem 2.5. e benzer olarak yapılır.

3. Çoğul Değerli Fonksiyonların Almost D-Üstten ve Alttan Sürekliliği

Tanım 3.1: (Kohli, 1992 [4]) (X,τ) bir topolojik uzay ve β, (X,τ) topolojik uzayının bütün açık F_σ alt kümelerinin ailesini göstersin. İki açık F_σ-kümenin kesişimi bir açık F_σ-küme olduğundan β ailesi X üzerinde bir τ^* topolojisi için bir taban olur. Açıkça $\tau^* \subset \tau$ olur. Özellikle (X,τ) kompakt, sayılabilir kompakt, lindelöf, bağlantılı veya ayrılabilir ise bu durumda (X,τ^*)'da öyledir. Ek olarak eğer X'deki her bir tek nokta kümesi bir G_δ-küme ise bu durumda (X,τ) T_1-uzay olduğunda (X,τ^*)'da T_1-uzaydır.

Tanım 3.2 :(Heldermann, 1981 [14]) (X,τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x'i içeren her bir U açığı için $x \in V \subset U$ olacak şekilde X'in bir V açık F_σ-alt kümesi varsa (X,τ) uzayına D-regüler uzay denir.

Tanım 3.3: $F : X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyon olsun. $F(x_0) \cap V = \varnothing$ olan her V kapalı G_δ-kümesi için $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \cap \overline{\overset{o}{V}} = \varnothing$ gerektirmesini sağlayan x_0'ın bir U_{x_0} açık komşuluğu varsa F x_0'da almost D-üstten yarı süreklidir denir ve bu durum kısaca almost D-ü.y.s. biçiminde ifade edilir.

Önerme 3.4: $F : X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu x_0 noktasında almost D-ü.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul $f : X \to (2^Y, D^+)$, $f(x) = F(x)$ tek değerli fonksiyonunun almost sürekli olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$): F, x_0 noktasında almost D-ü.y.s. olsun. G kapalı bir G_δ-küme olmak üzere $f(x_0) \in 2^Y \setminus (G)$ alalım. Bu durumda $f(x_0) \in < Y \setminus G >$ olur. Buradan $f(x_0) = F(x_0) \subset Y \setminus G$ elde edilir. $Y \setminus G$ açık F_σ-küme ve F, almost D-ü.y.s. olduğundan x_0'ın öyle bir U_{x_0} açık komşuluğu vardır ki $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset \overline{\overset{o}{Y - G}}$ gerektirmesi sağlanır. Buradan $f(x) = F(x) \in \; < \overline{\overset{o}{Y - G}} >$ ve $f(x) \in \left(\overline{\overset{o}{2^Y - (G)}} \right)$ dir. Dolayısıyla $f(U_{x_0}) \subset \left(\overline{\overset{o}{2^Y - (G)}} \right)$ ve böylece f, x_0'da almost süreklidir.

(⇐): $F(x_0)\subset V$, V açık F_σ-küme olsun. Bu durumda $f(x_0)=F(x_0)\notin(V)$ $\Rightarrow f(x_0)\in 2^Y\setminus(V)$. f, x_0'da sürekli olduğundan x_0'ı bulunduran bir U_{x_0} açık kümesi vardır öyle ki $f(U_{x_0})\subset \overset{o}{\overline{2^Y\setminus(V)}}$. Buradan $x\in U_{x_0}\Rightarrow$ $F(x)\in \overset{o}{\overline{2^Y\setminus(V)}}$ olur. Böylece $x\in U_{x_0}\Rightarrow F(x)\notin(V)$ $\Rightarrow$ $F(x)\subset <\overset{o}{\overline{Y\setminus V}}>$.

Teorem 3.5: X bir topolojik uzay, Y semiregüler uzay, $F:X\to Y$ çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

a) F, x_0'da almost D-ü.y.s.dir.

b) $F(x_0)\subset V$ olan her V açık F_σ-kümesi için $x_0\in\left[F^+(\overset{0}{\overline{V}})\right]^0$ dir.

c) $F(x_0)\subset V$ olan her regüler açık F_σ-kümesi için $x_0\in\left[F^+(V)\right]^0$ dir.

d) $F(x_0)\subset V$ olan her regüler açık F_σ-kümesi için $x\in U_{x_0}\Rightarrow$ $F(x_0)\subset V$ gerektirmesini sağlayan x_0'ın bir U_{x_0} açık komşuluğu vardır.

e) x_0'a yakınsayan her $(a_\lambda)_{\lambda\in\Delta}\subset X$ ağı ve $F(x_0)\subset V$ olan her V regüler açık F_σ-kümesi için $\lambda\geq\lambda_0$ iken $F(a_\lambda)\subset V$ olan en az bir $\lambda_0\in\Delta$ vardır.

İspat : (a)⇒(b): F, x_0'da hemen her yerde D-ü.y.s. olsun. $F(x_0)\subset V$ olan bir V açık Fσ-kümesini alalım. Tanım 3.1.5.'den x_0'ın bir açık U_{x_0} komşuluğu vardır öyle ki $x\in U_{x_0}\Rightarrow F(x)\subset\overset{o}{\overline{V}}$ sağlanır. Bu durumda F^+'nın tanımından $x\in U_{x_0}\Rightarrow x\in F^+\left(\overset{o}{\overline{V}}\right)$ elde edilir ki bu da $x_0\in\left[F^+(\overset{0}{\overline{V}})\right]^0$ olması demektir.

(b)⇒(c): V, $F(x_0)\subset V$ olan bir regüler açık F_σ-küme olsun. V regüler açık olduğundan $\overset{o}{\overline{V}}=V$ dir. O halde (b)'de bunu yerine yazarsak $x_0\in\left[F^+(\overset{0}{\overline{V}})\right]^0=\left[F^+(V)\right]^0$ elde edilir.

(c)⇒(d): V, $F(x_0)\subset V$ olan bir regüler açık F_σ-küme olsun. (c)'den

$x_0 \in \left[F^+(V)\right]^0$ dir. $U_{x_0} = \left[F^+(V)\right]^0$ dersek $x \in U_{x_0} \Rightarrow x \in F^+(V)$ olur. Buradan $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset V$ olur.

(d)⇒(a): $F(x_0) \subset V$ olan açık F_σ-küme V olsun. V, açık F_σ-küme ve $\overline{V}$ kapalı olduğundan $\overset{o}{\overline{V}}$ da açık F_σ-kümedir. Buradan $F(x_0) \subset \overset{o}{\overline{V}}$ olur. (d)'den $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset \overset{o}{\overline{V}}$ gerektirmesini sağlayan x_0'ın bir açık U_{x_0} komşuluğu vardır. $V = \overset{o}{\overline{V}}$ olduğundan da F, x_0'da hemen her yerde D-ü.y.s. olur.

(d)⇒(e): $(a_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \subset X$, x_0'a yakınsayan bir ağ olsun. V, $F(x_0) \subset V$ olan bir regüler açık F_σ-küme olsun. (d)'den x_0'ın $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset V$ gerektirmesini sağlayan bir U_{x_0} komşuluğu vardır. (c)⇔(d) olduğundan $U_{x_0} = \left[F^+(V)\right]^0$ alınabilir. $(a_\lambda) \to x_0 \in U_{x_0}$ olduğundan en az bir $\lambda_0 \in \Delta$ vardır öyle ki her $\lambda \geq \lambda_0$ için $a_\lambda \in \left[F^+(V)\right]^0 \subseteq F^+(V)$ olduğundan $a_\lambda \in F^+(V)$ ve $F(a_\lambda) \subset V$ elde edilir. Böylece $\lambda \geq \lambda_0$ için $F(a_\lambda) \subseteq V$ olur.

(e)⇒(d): Kabul edelim ki (d) doğru olmasın. G regüler açık F_σ-kümesi için, x_0'ı bulunduran her $U \subset X$ açık kümesinde öyle ki $a_u \in U$ vardır ki $F(a_u) \not\subset G$ olur. $\vartheta_{x_0} = \{U \subset X | x_0 \in U ve U açık\}$ ve $\Omega = \{(a_u, U) |\ U \in \vartheta_{x_0}$ ve $F(a_u) \not\subset V\}$ olsun. "$(a_u, U) \leq (a_{u'}, U') \Leftrightarrow U' \leq U$" koşulu ile Ω'yi yönlendirelim. $\Phi : (\Omega, \leq) \to X$, $\Phi\left[(a_u, U)\right] = a_u$ X üzerinde x_0'a yakınsayan bir ağdır. Ancak her bütün $(a_u, U) \in \Omega$'ler için $F(a_u) \not\subset V$ olur. Bu ise hipotezle çelişir. O halde (d) doğrudur.

Teorem 3.6., Teorem 3.7., Teorem 3.8. ve Teorem 3.9.'in ispatı Teorem 3.5.'in ispatına benzer olduğundan yapılmayacaktır.

Teorem 3.6: X bir topolojik uzay, Y semiregüler uzay ve $F : X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

a) F, almost D-ü.y.s. dir.

b) $V \subset Y$ açık F_σ-kümesi için $F^+(V) \subset \left[F^+ \left(\overset{0}{\overline{V}} \right) \right]^0$ dir.

c) $V \subset Y$ regüler açık F_σ-kümesi için $F^+(V)$ açıktır.

d) $V \subset Y$ açık F_σ-kümesi için $F^+ \left(\overset{0}{\overline{V}} \right)$ açıktır.

e) $H \subset Y$ kapalı G_δ-kümesi için $\overline{\left[F^-(\overline{\overset{o}{H}}) \right]} \subset F^-(H)$'dır.

f) $H \subset Y$ regüler kapalı G_δ-kümesi için $F^-(H)$ kapalıdır.

Teorem 3.7: X bir topolojik uzay, Y semiregüler uzay, $F: X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Aşağıdakiler denktirler.

a) F, x_0'da almost D-ü.y.s.dir.

b) $F(x_0) \subset V$ olan her açık küme için $x_0 \in \left[F^+(\overset{0}{\overline{V}}) \right]^0$ dir.

c) $F(x_0) \subset V$ olan her regüler açık küme için $x_0 \in \left[F^+(V) \right]^0$ dir.

d) $F(x_0) \subset V$ olan her regüler açık küme için $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset V$ gerektirmesini sağlayan açık bir U_{x_0} komşuluğu vardır.

e) x_0'a yakınsayan her $(a_\lambda)_{\lambda \in \Delta} \subset X$ ağı ve $F(x_0) \subset V$ olan her regüler açık V kümesi için $\lambda \geq \lambda_0$ iken $F(a_\lambda) \subset V$ olacak şekilde en az bir $\lambda_0 \in \Delta$ vardır.

Teorem 3.8: X herhangi bir topolojik uzay, Y semiregüler uzay, $F: X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

a) F, almost D-ü.y.s. dir.

b) Her $V \subset Y$ açık kümesi için $F^+(V) \subset \left[F^+ \left(\overset{0}{\overline{V}} \right) \right]^0$ dir.

c) Her $V \subset Y$ regüler açık kümesi için $F^+(V)$ açıktır.

d) Her $V \subset Y$ açık kümesi için $F^+ \left(\overset{o}{\overline{V}} \right)$ açıktır.

e) Her $V \subset Y$ kapalı kümesi için $\overline{\left[F^{-}\left(\overline{\overset{o}{V}}\right)\right]} \subset F^{-}(V)$ dir.

f) Y'nin regüler kapalı her V alt kümesi için $F^{-}(V)$ kapalıdır.

Teorem 3.9: X herhangi bir topolojik uzay, Y semiregüler uzay olsun. $F : X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

a) F, almost D-ü.y.s.'dir.

b) Her $V \subset Y$ açık kümesi için $F^{+}(V) \subset \left[F^{+}\left(\overset{0}{\overline{V}}\right)\right]^{0}$ dir.

c) Her $V \subset Y$ regüler açık kümesi için $F^{+}(V) \subset X$ açıktır.

d) $F(x_0) \subset V$ olan her $V \subset Y$ açık kümesi için x_0'ın $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset \overset{o}{\overline{V}}$ gerektirmesini sağlayan bir U_{x_0} açık komşuluğu vardır.

e) x_0'a yakınsayan her $(a_\lambda)_{\lambda \in \Delta} \subset X$ ağı ve $F(x_0) \subset V$ olan her regüler açık V kümesi için $\lambda \geq \lambda_0$ için $F(a_\lambda) \subset V$ olacak şekilde en az bir $\lambda_0 \in \Delta$ vardır.

4.Çoğul-Değerli Fonksiyonların Almost D-Alttan Yarı Süreklilikleri

Bu bölümde çoğul-değerli fonksiyonların almost D-a.y.s. olması tanımlanarak bu sürekliliğe denk koşullar verildi.

Tanım 4.1: $F : X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon, $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ ile tümleyeni kapalı G_δ-küme olan her V kümesi için $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \cap \overset{o}{\overline{V}} \neq \varnothing$ gerektirmesini sağlayan bir $U_{x_0} \subset X$ açık kümesi varsa F'ye $x_0 \in X$'de almost D-alttan yarı süreklidir denir ve bu durum kısaca F x_0'da almost D-a.y.s. biçiminde ifade edilir.

Teorem 4.2: $F : X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonunun $x_0 \in X$'de almost D-a.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul $f : X \to (2^Y, D^-)$ her $x \in X$ için $f(x) = F(x)$ biçiminde tanımlı f, tek-değerli fonksiyonunun almost sürekli olmasıdır.

İspat (⇒): $F : X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyonu $x_0 \in X$'de almost D-a.y.s. olsun. $x_0 \in X$ için $f(x_0) \in 2^Y - < G > \in \beta_2$ alalım. $2^Y - < G > = (Y - G)$ ve $F(x_0) = f(x_0)$ olduğundan $F(x_0) \in (Y - G)$'dir. Buradan $F(x_0) \cap$ $(Y - G) \neq \varnothing$ ve $Y - (Y - G) = G$ kapalı G_δ-kümedir. F, x_0'da almost D-a.y.s. olduğundan x_0'ın $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \cap \overset{o}{\overline{Y - G}} \neq \varnothing$ gerektirmesini sağla- yan açık bir U_{x_0} komşuluğu vardır. $\overline{(Y - G)}^{0} = (Y - \overset{0}{\overline{G}}) = 2^Y - < \overset{0}{\overline{G}} >$ ve $f(x) = F(x) \in 2^Y - < \overset{0}{\overline{G}} >$ olduğundan $x \in U_{x_0} \Rightarrow f(x) \in \overset{o}{\overline{2^Y - < G >}}$ olur. O halde f, x_0'da almost süreklidir.

(⇐): $f : X \to (2^Y, D^-)$ tek-değerli fonksiyonu x_0'da almost sürekli, $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ ve $Y - V$, kapalı G_δ-küme olsun. Buradan $f(x_0) = F(x_0) \in$ $(V) = 2^Y - < Y - V > \in \beta_2$ olur. f, x_0'da almost sürekli olduğundan x_0'ın $x \in U_{x_0} \Rightarrow f(x) \in \overset{o}{\overline{2^Y - < Y - V >}}$ gerektirmesini sağlayan açık bir U_{x_0} komşuluğu vardır. Buradan $x \in U_{x_0} \Rightarrow f(x) = F(x) \in \left(\overset{o}{\overline{V}}\right)$, $F(x) \cap \overset{0}{\overline{V}} \neq \varnothing$ olur. F, x_0'da almost D-a.y.s. dir.

Aşağıdaki Teorem 4. 3., Teorem 4. 4., Teorem 4. 5., Teorem 4. 6. ve Teorem 4. 7.'nin ispatları Teorem 3. 7'nin ispatına benzer olduğundan yapılmayacaktır.

Teorem 4.3: X herhangi bir topolojik uzay, Y semiregüler uzay, $F : X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

a) F, almost D-a.y.s.'dir.

b) F_σ-açık her $V \subset Y$ kümesi için $F^-(V) \subset \left[F^-(\overset{o}{\overline{V}})\right]^o$ dir.

c) F_σ-açık her $V \subset Y$ regüler açık kümesi için $F^-(V) \subset X$ açıktır.

d) F_σ-açık her $V \subset Y$ kümesi için $F^-\left(\overset{o}{\overline{V}}\right) \subset X$ açıktır.

e) G_δ-kapalı her $H \subset Y$ kümesi için $\overline{\left[F^+(\overline{\overset{o}{H}})\right]} \subset F^+(H)$ olur.

f) H, kapalı G_δ, regüler kapalı küme ise $F^+(H) \subset X$ kapalıdır.

Teorem 4.4: X, herhangi bir topolojik uzay, Y D-regüler ve semiregüler uzay ve $F : X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir

a) F, almost D-a.y.s. dir.

b) Her $V \subset Y$ açık kümesi için $F^-\left(\overset{o}{\overline{V}}\right) \subset X$ açıktır.

c) Her $V \subset Y$ regüler açık kümesi için $F^-(V) \subset X$ açıktır.

d) F_σ-açık her $V \subset Y$ açık kümesi için $F^-\left(\overset{o}{\overline{V}}\right) \subset X$ açıktır.

e) Her $H \subset Y$ kapalı kümesi için $\overline{\left[F^+(\overline{\overset{o}{H}})\right]} \subset F^+(H)$ olur.

f) Her $H \subset Y$ regüler kapalı kümesi için $F^+(H) \subset X$ kapalıdır.

Teorem 4.5: X, herhangi bir topolojik uzay, Y semiregüler uzay ve $F : X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

a) F, x_0'da almost D-a.y.s. dir.

b) $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ olan F_σ-açık her V kümesi için $x_0 \in \left[F^-(\overset{0}{V}) \right]^0$ dir.

c) $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ olan F_σ-açık her regüler V açık kümesi için $x_0 \in \left[F^-(V) \right]^0$ dir.

d) $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ olan açık F_σ her regüler açık V kümesi için x_0'ın $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ gerektirmesini sağlayan bir U_{x_0} açık komşuluğu vardır.

e) x_0'a yakınsak olan her $(a_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ ağı ve $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ olan açık F_σ her regüler açık V kümesi için $\lambda \geq \lambda_0$ iken $F(a_\lambda) \cap V \neq \varnothing$ olacak şekilde en az bir $\lambda_0 \in \Delta$ vardır.

Teorem 4.6: X, herhangi bir topolojik uzay, Y semiregüler uzay, $F : X \to Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

a) F, x_0'da almost D-a.y.s.dir.

b) $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ olan her $V \subset Y$ açık kümesi için $x_0 \in \left[F^-(\overset{0}{V}) \right]^0$ dir.

c) $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ olan her $V \subset Y$ regüler açık kümesi için $x_0 \in \left[F^-(V) \right]^0$ dir.

d) $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ olan her $V \subset Y$ regüler açık kümesi için x_0'ın $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ gerektirmesini sağlayan bir U_{x_0} açık komşuluğu vardır.

e) x_0'a yakınsak olan her $(a_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ ağı ve $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ olan her $V \subset Y$ regüler açık kümesi için en az bir $\lambda_0 \in \Delta$ vardır öyle ki her $\lambda \geq \lambda_0$ için $F(a_\lambda) \cap V \neq \varnothing$ olur.

Teorem 4.7: $F : X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu D-a.y.s. ise almost D-a.y.s. dir.

İspat: F, D-a.y.s. olsun. Bir $x \in X$ için $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ olan bir V açık F_σ-

kümesini alalım. F D-a.y.s. olduğundan $z \in U_x$ iken $F(z) \cap V \neq \varnothing$ olan X içinde x'i bulunduran bir U_x açık kümesi vardır. V açık ve her $z \in U_x$ için $F(z) \cap V \neq \varnothing$ olduğundan öyle ki $F(z) \cap \overset{o}{\overline{V}} \neq \varnothing$ olur. Bu F'nin $x \in X$'de almost D-a.y.s. olmasını verir. $x \in X$ keyfi olduğun-dan F, X üzerinde almost D-a.y.s. olur.

Teorem 4.8: $F: X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu D-ü.y.s. ise almost D-ü.y.s. dir.

İspat : F D-ü.y.s. olsun. Bir $x \in X$ için $F(x) \subset V$ olan bir V açık F_σ-kümesini alalım. F D-a.y.s. olduğundan $z \in U_x$ iken $F(z) \subset V$ olan X içinde x'i bulunduran bir U_x açık kümesi vardır. V açık ve her $z \in U_x$ için $F(z) \subset V$ olduğundan öyle ki $F(z) \subset \overset{o}{\overline{V}}$ olur. Bu F'nin $x \in X$'de almost D-ü.y.s. olmasını verir. $x \in X$ keyfi olduğundan F, X üzerinde almost D-ü.y.s. olur.

Sonuç 4.9: Y, C-kompakt ve Hausdorff uzay olsun. Eğer $F: X \to Y$ fonksiyonu kuvvetli kapalı grafikli ise F, almost D-ü.y.s.dir.

İspat : F, kuvvetli kapalı grafikli olduğundan Önerme 2.6'dan F, D-ü.y.s.dir. Teorem 4.8. den de F, almost D-ü.y.s.dir.

Teorem 4.10: Y, C-kompakt, Hausdorff ve kapalı kümeleri G_δ-küme olan uzay ve $F: X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu nokta kompakt ise aşağıdakiler eşdeğerdir.

a) F, almost D-ü.y.s.dir.

b) G(F), kuvvetli kapalıdır.

c) F, D-ü.y.s.dir.

Teorem 4.11: Y, regüler ve kapalı kümeleri G_δ-kümelerden oluşan uzay olsun. Bu durumda $F: X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu almost D-a.y.s.dir.$\Leftrightarrow$ F, a.y.s.dir.

İspat ($\Rightarrow$): F, bir $x_0 \in X$'de almost D-a.y.s. olsun. V, $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ olan bir açık küme olsun. $y \in F(x_0) \cap V$ alalım. Bu durumda $y \in F(x_0)$ ve $y \in V$ dir. Y, regüler uzay olduğundan $y \in G \subset \overline{G} \subset V$ olan bir açık $G \subset Y$ kümesi vardır. Dolayısıyla $y \in F(x_0) \cap G \neq \varnothing$ dır. $Y - G$, kapalı G_δ-küme ve F, x_0'da almost

D-a.y.s. olduğundan x_0’ın $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x_0) \cap \overset{o}{\overline{G}} \neq \varnothing$ gerektirmesini sağlayan bir açık $U_{x_0} \subset X$ komşuluğu vardır. Buradan $\overset{0}{\overline{G}} \subset V$ olduğundan $x \in U_{x_0}$ iken $F(x) \cap V \neq \varnothing$ olur. Dolayısıyla F, x_0’da a.y.s.dir. $x_0 \in X$ keyfi olduğundan F, X üzerin- de a.y.s. olur.

($\Leftarrow$): F, a.y.s. olduğundan $\forall\ V \subset Y$ açığı için $F^{-}(V) \subset X$ açıktır. V, açık F_σ-küme olduğunda $F^{-}(V)$’de açık olur. O halde F, D-a.y.s. dir. Dolayısıyla Teorem 4.7’den F, almost D-a.y.s. dir.

Teorem 4.12: X, herhangi bir topolojik uzay, Y, regüler ve kapalı alt kümeleri G_δ-küme olan uzay olsun. $F: X \to Y$ nokta parakompakt bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bu durumda F almost D-ü.y.s. dir $\Leftrightarrow$ F ü.y.s. dir.

İspat ($\Rightarrow$): F, herhangi bir $x_0 \in X$’de almost D-ü.y.s. ve V, $F(x_0) \subset V$ olan bir açık küme olsun. $y \in F(x_0)$ için $\{y\} \subset V$ dir. Y regüler uzay olduğundan $y \in G_y \subset \overline{G_y} \subset V$ olan en az bir $G_y \subset Y$ açık kümesi vardır. Buradan $F(x_0) \subset \bigcup\limits_{y \in F(x_0)} G_y \subset \bigcup\limits_{y \in F(x_0)} \overline{G_y} \subset V$ olur. $F(x_0)$ parakompakt oldu- ğundan, $\vartheta = \{G_y \mid y \in F(x_0)\}$ örtüsünün $F(x_0)$’ı örten yerel sonlu bir $\gamma = \{T_y \mid y \in F(x_0)\}$ inceliği vardır. Buradan $\bigcup\limits_{y \in F(x_0)} T_y = T$ dersek $F(x_0) \subset T \subset \overline{T} \subset \bigcup\limits_{y \in F(x_0)} \overline{G_y} \subset V$ olur. $Y - T$, kapalı ve dolayısıyla kapalı G_δ-kümedir. F, almost D-ü.y.s. olduğundan x_0’ın $x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset \overset{o}{\overline{T}} \subset \overline{T} \subset V$ gerektirmesini sağlayan bir $U_{x_0} \subset X$ açık komşuluğu vardır. O halde F, x_0’da ü.y.s.dir. $x_0 \in X$ keyfi olduğundan F, X üzerinde ü.y.s. dir.

($\Leftarrow$): F, ü.y.s. olduğundan $\forall\ V \subset Y$ kapalısı için $F^{-}(V) \subset X$ kapalıdır. V, kapalı G_δ-küme olduğunda $F^{-}(V)$’de kapalı olur. O halde F, D-ü.y.s. dir. Dolayısıyla Teorem 4.8’den F, almost D-ü.y.s. dir.

5. Çoğul Değerli Fonksiyonların Zayıfça D-Üstten (Alttan) Yarı Süreklilikleri

Tanım 5.1: $F: X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun.

a) $F(x_0) \subset V$ olan $V \subset Y$ açık kümesi için her $x \in U_{x_0}$ iken $F(x) \subset \overline{V}$ olacak şekilde en az bir $U_{x_0} \subset X$ açık komşuluğu varsa F'ye x_0'da zayıfça üstten yarı sürekli denir.

b) $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ olan $V \subset Y$ açık kümesi için her $x \in U_{x_0}$ iken $F(x_0) \cap \overline{V} \neq \varnothing$ olacak şekilde en az bir $U_{x_0} \subset X$ açık komşuluğu varsa F'ye x_0'da zayıfça alttan yarı sürekli denir.

c) $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ ile tümleyeni kapalı G_δ-küme olan her V kümesi için $x \in U_{x_0}$ için $F(x) \subset \overline{V}$ gerektirmesini sağlayan x_0'ın $U_{x_0} \subset X$ açık komşuluğu varsa F'ye x_0'da zayıfça D-ü.y.s. denir.

d) $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$ ile tümleyeni kapalı G_δ-küme olan her V kümesi için $x \in U_{x_0}$ için $F(x) \cap \overline{V} \neq \varnothing$ gerektirmesini sağlayan x_0'ın $U_{x_0} \subset X$ açık komşuluğu varsa F'ye x_0'da zayıfça D-a.y.s. denir.

Önerme 5.2: $F: X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun.

a) F, D-ü.y.s. ise zayıfça D-ü.y.s. dir.

b) F, almost D-ü.y.s. ise zayıfça D-ü.y.s. dir.

c) F, D-a.y.s. ise zayıfça D-a.y.s. dir.

d) F, almost D-a.y.s. ise zayıfça D-a.y.s. dir.

İspat : Tanımlardan açıktır.

Tanım 5.3: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\theta \subset \tau$ için $\cap\theta \in \tau$ oluyorsa bu uzaya doymuş uzay denir.

Önerme 5.4: X doymuş uzay, Y regüler ve Hausdorff uzay, $F: X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyonu nokta kompakt olsun. F, D-ü.y.s. ise zayıfça ü.y.s. dir.

İspat : F, D-ü.y.s, nokta kompakt ve herhangi bir $x_0 \in X$ alalım. $F(x_0) \subset V$ $(V \subset Y)$ açık küme olsun. Y Hausdorff ve $F(x_0)$ kompakt ve $F(x_0) \subset V$

olduğundan $F(x_0)\subset W\subset\overline{W}\subset\overline{V}$ olan en az bir $\overline{W}$ kapalı G_δ-kümesi vardır. Ayrıca her $y\notin W$ için Y, regüler ve Hausdorff uzay olduğundan, en az bir $y\in H_y\subset Y$ açık ve $\overline{W}\subset F_y\subset Y$ kapalı kümeleri vardır öyle ki $H_y\cap F_y=\varnothing$ tur. $\overline{W}\subset F_y$ olduğundan, $W\cap H_y=\varnothing$ tur. Diğer yandan $y\in H_y$ açığı için Y regüler olduğundan en az bir $G_y\subset Y$ açığı vardır. Buradan $y\in G_y\subset\overline{G_y}\subset H_y$ olur ve $\overline{G_y}$ kapalı G_δ-kümedir. Buradan $F(x_0)\subset\overline{W}\subset Y-\overline{G_y}$ tümleyeni kapalı G_δ-kümedir. F,D-ü.y.s. olduğundan x_0'ın $F(U_y)\subset Y-\overline{G_y}$ olan bir $U_y\subset X$ açık komşuluğu vardır. X uzayı doymuş olduğundan $U_{x_0}=\bigcap_{y\notin\overline{W}}U_y$ denirse, U_{x_0} açık ve $F(U_{x_0})\subset\overline{W}\subset\overline{V}$ olur. Böylece F, x_0'da zayıfça ü.y.s. dir. $x_0\in X$ keyfi olduğundan F, X üzerinde zayıfça ü.y.s. dir.

Önerme 5.5: X ve Y uzayları regüler ve F, X'den Y'ye açık, kapalı ve tek nokta kapalı dönüşüm ise F, zayıfça D-ü.y.s. dir.

İspat : Kabul edelim ki F, $x_0\in X$'de zayıfça D-ü.y.s. olmasın. Bu durumda $F(x_0)\subset V$ koşulunu sağlayan ve kapalı G_δ-küme olan $V\subset Y$ kümesi vardır, x_0'ı bulunduran her U açık kümesi için $F(U)\not\subset V$ olur. Buradan her $U\in n_{x_0}$ için $F(U)\cap(Y-V)\neq\varnothing$ dur. Ayrıca F kapalı dönüşüm olduğundan $F(\overline{U})\subset Y$ kapalıdır. Böylece $\{F(\overline{U})\cap(Y-V)\mid U\in n_{x_0}\}$ ailesi, $Y-V$'nin kapalı alt kümelerinden oluşan ve içleri sonlu arakesit özelliğine sahip olan bir ailedir. Gerçekten en az bir $n_0\in N$ için $\bigcap_{i=1}^{n_0}\left[F(\overline{U_i})\cap(Y-V)\right]^0=\varnothing$ olsaydı, $\bigcap_{i=1}^{n_0}\left[F(\overline{U_i})\right]^0\cap(Y-\overline{V})=\varnothing$ olup $\bigcap_{i=1}^{n_0}\left[F(\overline{U_i})\right]^0\subset\overline{V}$ olurdu. Buradan $\bigcap_{i=1}^{n_0}\left[F(\overline{U_i})\right]^0=\left[\bigcap_{i=1}^{n_0}F(\overline{U_i})\right]^0\subset\overline{V}$ ve $\left[F(\bigcap_{i=1}^{n_0}\overline{U_i})\right]^0\subset V$ ve $\left[F(\bigcap_{i=1}^{n_0}\overline{U_i})\right]^0\subset\overline{V}$ elde ederiz. U_i'ler açık ve F açık dönüşüm olduğun- dan $F\left(\bigcap_{i=1}^{n_0}U_i\right)=\left[F(\bigcap_{i=1}^{n_0}U_i)\right]^0\subset\overline{V}$ dir.

Bu ise F'nin x_0 da zayıfça D-ü.y.s. olmasını verir. Öyleyse kabulümüz ile çelişki doğar. Y uzayı D-regüler uzay olduğundan $\bigcap_{U\in n_{x_0}} F(\overline{U})\cap(Y-V)\neq\varnothing$ olur. Bir $y\in Y$ için y$\in$ $\bigcap_{U\in n_{x_0}} F(\overline{U})\cap(Y-V)$ dir. $F(x_0)\subset V$ olduğundan $y\in F(x_0)$ dır. Buradan $F^{-}(y)\cap\{x_0\}=\varnothing$ ve $x_0\notin F^{-}(y)$ olur. X uzayı regüler ve $F^{-}(y)$ kapalı olduğundan en az bir U_1, $U_2\subset X$ açık kümeleri $x_0\in U_1$, $F^{-}(y)\subset U_2$ ve $U_1\cap U_2=\varnothing$ olacak şekilde vardır. $\overline{U_1}\cap F^{-}(y)=\varnothing$ olur. Sonuç olarak $y\notin F(U_1)$ olur ki $y\in\bigcap_{U\in n_{x_0}} F(\overline{U})\cap(Y-V)$ oluşu ile çelişir. Bu çelişkiye F, x_0'da zayıfça D-ü.y.s. olmasın demekle düştük. O halde F, x_0'da zayıfça D-ü.y.s. dir.

$F: X\rightarrow Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon olsun. Her $x\in X$ için $\overline{F}(x)=\overline{F(x)}$ ile $\overline{F}: X\rightarrow Y$ bir yeni fonksiyon tanımlayalım.

Önerme 5.6: $F: X\rightarrow Y$ zayıfça D-ü.y.s. ise $\overline{F}: X\rightarrow Y$ zayıfça D-ü.y.s. dir.

İspat : $x\in X$ ve $\overline{F}(x)\subset W$ olduğundan $Y-W$ tümleyeni kapalı G_δ-küme olsun. $\overline{F}(x)=\overline{F(x)}\subset W$ olduğundan, $F(x)\subset W$ dir. F, zayıfça D-ü.y.s. olduğundan, bir $x\in U_x\subset X$ açık kümesi vardır öyle ki $F(U)\subset\overline{W}$ dir. Buradan $F(U)\subset\overline{W}$ ise $\overline{F(U)}\subset\overline{W}$ tır. $\overline{F}(U)=\bigcup_{x\in U}\overline{F}(x)=\bigcup_{x\in U}\overline{F(U)}\subset$ $\overline{F(U)}$ olduğundan $\overline{F}(U)\subset\overline{W}$ tır ve böylece F, $x\in X$'de zayıfça D-ü.y.s. dir.

Kaynaklar

[1] H. Blumberg, New Properties Of All Real Functions, Trans. Amer. Math. Soc. 24 (1922), 113-128.

[2] T. Husaın, Almost Continuous Mapping, Proae.Math. 10 (1966), 1-7

[3] C.T.R. Borgers, A Study Of Multivalued Functions, Pasific. J. Math., 23 (1967), 45-1461.

[4] M.K. Sıngal and Sıngal, Almost Continuous Mappings, Yokohama Math. J., 16, (1968), 63-73.

[5] J.K.Kohlı, D-Continuous Functions, D-Regular Spaces and D-Hausdorff Spaces, Bull. Cal. Math. Soc. 84 (1992), 39-46.

[6] V.I. Ponomarev, A New Space Of Closed Sets and Multivalued Continuous Mappings Of Bicompacta, Amer. Math. Soc. 38 (1964),95-118.

[7] P.E. Long and L.L. Herrıngton, Functions With Strongly-Closed Graphs, Boll. U.M.I. (Italy) (4), 12, (1975), 381-384.

[8] E. Mıchael, Topologies On Spacies Of Subsets, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951), 152-182.

[9] G. Choquet, Convergence, Grenoble Universıty Annalles, 23 (1947), 57-112.

[10] Y. Küçük, M. Akdağ, 2^Y-Üzerinde Çeşitli Topolojiler Ve Çoğul-Değerli Fonksiyonların H-Süreklilikleri, IV. Ulusal Matematik Sempozyumu Bildiri Özetleri Kitapçığı, 1991.

[11] C. Dorset, Semi-regular spaces, Soochow J. Math. vol 8, 1982, 45-53.

[12] M.K. Sıngal and S.P. Arya, On Almost-Regular Spaces, Glasnik Matematicki, (24), 4, (1969), 89-99.

[13] M. Eısenberg, Topology, Holt Rinehart and Winston, Inc. 1974.

[14] M. Akdağ, On The Upper Lower D-Continuous Multifunctions, Appl. Math. E-Notes, 1 (2001), 104-110.

[15] N.C. Heldermann, Developability and Some New Regularity Axioms, Canad, J. Math. 33-641,1981.

[16] Y. Küçük, M. Akdağ, Çoğul-Değerli Fonksiyonların H-Almost Sürekli-likleri Üzerine, C. Ü. Fen-Edb. Fak., Fen Bil. Dergisi, Sayı:15, Kasım 1993.