C.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Fen Bilimleri Dergisi (2003)Cilt 24 Sayı 1

Bir Spektruma ve Normalleştirici Sayılara Göre Sturm-Liouville Operatörler için Ters (Inverse) Problem

R.Kh. AMİROV ve Y. ÇAKMAK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü SİVAS

Received:02.05.2003, Accepted: 13.06.2003

Özet: Bu makalede, verilen $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizileri için singüleriteye sahip diferansiyel operatörün kuruluşu verilmiştir. Bunun için $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizileri bazı belli özelliklere sahip olmalıdır. Bu tip asimptotik formüller $q(x)$ fonksiyonunun regülerlik mertebesine bağlıdır. Bu $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümünden görülebilir.
Anahtar Kelimeler: Ters problem, özdeğer, operatör

Inverse Problem For Sturm-Liouville Operators According to A Spectrum and Normalizing

Abstract: In this article, for given of $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ and $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ constructing a differential operator, which has a singularity, has explained. In order to accomplish this, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ and $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ have to some certain asymptotic. This kind of asymptotic formulae depend on the regularity order of the function $q(x)$. This connection can be seen in the solution of the inverse problem which depend on the sequences of $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ and $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$.
Keywords: Inverse problem, eigenvalues, operator

1. Giriş

M.G. Gasimov ve B.M. Levitan [1]'de, regüler Sturm-Liouville denkleminin bir spektrum ve normalleştirici sayıya göre kurmak için etkili metot verdiler. Fakat [1]'de verilen bu metot belli karakteristiklere sahiptir öyle ki, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizileri bilinen bir denklemin sırasıyla özdeğer ve normalleştirici sayılarıdır. Yukarıda verilen bu problem regüler denklemler için çözülmüştür. M.G. Gasimov [2]'de, bir spektrum ve normalleştirici sayılar göre $[0,\pi]$ aralığında $x=\pi$ 'de $\frac{\ell(\ell+1)}{(\pi-x)^2}$ (ℓ pozitif tamsayı) singüleritesi olan denklem için ters problemin çözümünü verdi. $[0,\pi]$ aralığında $x=0$'de $\frac{A}{x}$ (A reel) singüleritesi olan denklem M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov tarafından [3]'de araştırılmıştır.

Bu makalede $[0,\pi]$ aralığında $x=0$'de $\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}$ (A,δ reel $p\in(1,5/4)$) singüleritesine sahip olan denklemler için bir spektrum ve normalleştirici sayılara göre ters problemin çözümü verilir.

2. $F(x,t)$ Fonksiyonunun Araştırılması

$$-y''+\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}+q(x)\right]y=\lambda y,\quad \lambda=\rho^2 \tag{2.1}$$

diferansiyel denklemi ve

$$y(0)=0,\qquad y'(\pi)-Hy(\pi)=0 \tag{2.2}$$

sınır koşulları verilmiş olsun. Burada $q(x)\in W_2^2[0,\pi]$, A,δ ve H gerçel sayılar ve $p\in(1,5/4)$ dir.

$$\varphi(0,\lambda)=0,\qquad \varphi'(0,\lambda)=\rho \tag{2.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan (2.1) denkleminin çözümü $\varphi(x,\lambda)$ olsun. $\lambda_0,\lambda_1,\ldots$'ler (2.1), (2.2) sınır değer probleminin özdeğerleri, $\varphi(x,\lambda_n)$, $(n\geq 0)$ özfonksiyonları ve $q(x)=0$ olması durumunda ise (2.1), (2.2) sınır değer probleminin özdeğerleri $\lambda_0^0,\lambda_1^0,\ldots$'ler ve özfonksiyonları $\varphi_0(x,\lambda_n^0)$, $(n\geq 0)$ olsun.

$$\alpha_n=\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx,\qquad (n\geq 0) \tag{2.4}$$

sayılarına (2.1), (2.2) sınır değer probleminin normalleştirici sayıları denir.

α_n^0, $(n \geq 0)$ sayıları ise (2.1), (2.2) sınır değer probleminin $q(x)=0$ durumuna karşılık gelen normalleştirici sayılarıdır.

1985 yılında M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov yapmış oldukları bir çalışmada [3], singüler diferansiyel operatörler için de $f(x), g(x) \in L_2[0,\pi]$ olmak üzere

$$\int_0^\pi f(x)g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi f(x)\varphi(x,\lambda_n)dx\int_0^\pi g(t)\varphi(t,\lambda_n)dt\right]$$

Parseval eşitliğinin doğru olduğunu göstermişlerdir.

Buradaki $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine (2.1), (2.2) sınır değer probleminin spektral karakteristikleri denir.

$\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin yardımı ile $F(x,t)$ fonksiyonu,

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n) - \frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)\right] \tag{2.5}$$

olarak oluşturulsun. Oluşturulan bu fonksiyon yardımı ile, $K(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$F(x,t) + K(x,t) + \int_0^x K(x,\xi t)F(\xi,t)d\xi = 0 \tag{2.6}$$

Volterra tipi integral denklemi kurulabilir. Bu integral denkleminin çözümünün varlığı ilk kez 1985 yılında M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov tarafından [3] potansiyeli $\left(\frac{A}{x} + q(x)\right)$ olan diferansiyel operatör için gösterilmiştir. Bu çalışmada ise bu integral denklemin çözümünün varlığı ve tekliği $\left(\frac{A}{x} + \frac{\delta}{x^p} + q(x)\right)$ potansiyeline sahip bir operatör için araştırılacaktır. Bunu yapmak için $F(x,t)$ fonksiyonunun özelliklerinin bilinmesi gerekmektedir. Bunun için de $\varphi_0(x,\lambda_n)$ ve $\varphi_0(x,\lambda_n^0)$ fonksiyonlarının asimptotik formüllerinden yararlanılacaktır. Bu asimptotik formüller $x>0$ ve n'nin yeterince büyük değerleri için geçerlidir.

Birinci bölümde verilen operatörün ρ_n özdeğerleri $\varphi(x,\rho_n)$ özfonksiyonları ve α_n normalleştirici sayıların asimptotik ifadelerinden yararlanarak $q(x)=0$ durumuna karşılık gelen operatörün ρ_n^0 özdeğerleri, $\varphi_0(x, \rho_n^0)$ özfonksiyonları, α_n^0 normalleştirici sayıları için,

$$\begin{aligned}
\rho_n^0 &= (n+1/2) + \frac{c_1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)} + \frac{c_2^0}{(n+1/2)} + \frac{c_7}{(n+1/2)^{4-2p}} \\
&+ c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_8}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_{10}^0}{(n+1/2)^2} + \frac{c_{31}}{(n+1/2)^{6-3p}} \\
&+ c_{12}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{5-2p}} + \frac{c_{32}^0}{(n+1/2)^{5-2p}} + c_{14}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} + c_{33}^0\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} \\
&+ \frac{c_{34}^0}{(n+1/2)^{4-p}} - \frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^3} + c_{17}^0\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^3} + c_{35}^0\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^3} \\
&+ \frac{c_{19}^0}{(n+1/2)^3} + O\left(\frac{1}{n^{8-4p}}\right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

buradaki c_i^0 sabitleri, bilinen c_i sabitlerindeki $q(x)=0$ durumudur.

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x,\lambda_n^0) &= \sin(n+1/2)x + \frac{g_1(x)}{(n+1/2)^{2-p}} + g_2(x)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)} + \frac{g_3^0(x)}{(n+1/2)} \\
&+ \frac{g_4(x)}{(n+1/2)^{4-2p}} + g_5(x)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{g_6^0(x)}{(n+1/2)^{3-p}} + g_7(x)\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+ g_8^0(x)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \frac{g_9(x)}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

burada,

$$g_3^0(x) := \frac{A}{4\pi}\sin(n+1/2)x + A_1^0(x)\cos(n+1/2)x,$$

$$g_6^0(x) := A_5^0(x)\sin(n+1/2)x + A_7^0(x)\cos(n+1/2)x,$$

$$g_8^0(x) := A_8^0(x)\sin(n+1/2)x + A_{10}(x)\cos(n+1/2)x,$$

$$g_9^0(x) := A_9^0(x)\sin(n+1/2)x + A_{11}^0(x)\cos(n+1/2)x,$$

ve

$$A_1^0(x) := c_2^0 x - \xi_1^0(x) + \frac{A\ln x}{2},$$

$$A_5^0(x) := -c_1 c_2^0 x^2 + \xi_1^0(x) c_1 x + \frac{A c_1 x \ln x}{2} + \xi_3(x) + \delta c_p c_2^0 x,$$

$$A_7^0(x) := c_8^0 x + \frac{A\pi c_1 x}{4} + \frac{\delta M_4 c_2^0 x}{2} + \xi_1(x),$$

$$A_8^0(x):=-\frac{Ac_2^0x^2}{2\pi}+\frac{A^2x\ln x}{4\pi}+\frac{Ac_2^0x}{2}+\frac{A\xi_1^0(x)x}{2\pi},$$

$$A_9^0(x):=-\frac{\left(c_2^0\right)^2x^2}{2}+\frac{Ac_2^0x\ln x}{2}+\xi_1^0(x)c_2^0x+\xi_5^0(x),$$

$$A_{11}^0(x):=-\frac{A\pi c_2^0x}{4}+c_{10}^0x+\xi_6(x)-\frac{A^2\pi\ln x}{8},$$

$$\begin{aligned}\alpha_n^0&=\frac{\pi}{2}+\frac{\delta M_1\pi}{2}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}}+\frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1/2)}+\frac{b_1}{(n+1/2)^{4-2p}}\\&+A\delta c_p\pi\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}}+\frac{b_2^0}{(n+1/2)^{3-p}}+b_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}\\&+b_4^0\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2}+\frac{b_5^0}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Burada,

$$\begin{aligned}b_2^0:=&-\frac{\delta c_p}{2}-\frac{c_1c_2^0\pi^3}{3}-\frac{Ac_1\pi^2(1-2\ln\pi)}{8}+\frac{\delta c_pc_2^0\pi^2}{2}+\xi_3\pi+Ac_1M_2\pi\\&-\frac{\delta c_1\pi^{3-p}}{2(p-1)(3-p)}+\frac{A\delta M_1\pi^2}{8}+\frac{\delta c_p}{\pi}\left[\frac{c_2^0\pi^3}{3}-\frac{A\pi^2(1-2\ln\pi)}{8}-\frac{c_2^0\pi^3}{4}\right.\\&\left.+\frac{AM_2\pi^2}{2}-\frac{\delta\pi^{3-p}}{2(p-1)(3-p)}-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(\frac{\delta}{2(p-1)x^{p-1}}+\frac{A\ln x}{2}\right)dx\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_4^0:=&-\frac{A}{4}+\frac{Ac_2^0\pi^2}{3}-\frac{A^2\pi(1-2\ln\pi)}{16}+\int_0^\pi\xi_5(x)dx+\frac{\delta A}{\pi}\left[\frac{c_2^0\pi^3}{6}-\frac{A\pi^2(1-2\ln\pi)}{16}\right.\\&\left.-\frac{c_2^0\pi^3}{8}+\frac{AM_2\pi^2}{4}-\frac{\delta\pi^{3-p}}{4(p-1)(3-p)}-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\left(\frac{\delta}{2(p-1)x^{p-1}}+\frac{A\ln x}{2}\right)dx\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_5^0:=&\frac{c_2^0\pi-\xi_1(\pi)}{2}+\frac{A\ln\pi}{4}-\frac{AM_2}{2}-\frac{\left(c_2^0\right)^2\pi^3}{6}-\frac{Ac_2^0\pi^2(1-2\ln\pi)}{8}+Ac_2^0M_2\pi\\&-\frac{\delta c_2^0\pi^{3-p}}{2(p-1)(3-p)}+\frac{A^2\pi^3}{32}+\int_0^\pi\xi_5(x)dx-+\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(c_2^0x-\xi_1(x)+\frac{A\ln x}{2}\right)^2dx\end{aligned}$$

şeklinde sabitlerdir.

Ayrıca (2.5) ifadesindeki $\varphi_0(x,\lambda_n)$ fonksiyonunun asimptotik davranışı,

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(x,\lambda_n) &= \sin(n+1/2)x + \frac{g_1(x)}{(n+1/2)^{2-p}} + g_2(x)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)} \\
&+ \frac{g_3(x)}{(n+1/2)} + \frac{g_4(x)}{(n+1/2)^{4-2p}} + g_5(x)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} \\
&+ \frac{g_6(x)}{(n+1/2)^{3-p}} + g_7(x)\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + g_8(x)\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\
&+ \frac{g_9(x)}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$g_1(x) := \frac{\delta M_4}{2}\sin(n+1/2)x + \frac{\delta c_p}{\pi}(x-\pi)\cos(n+1/2)x,$$

$$g_2(x) := \frac{A}{2\pi}(x-\pi)\cos(n+1/2)x,$$

$$g_3(x) := \frac{A\pi}{4}\sin(n+1/2)x + A_1(x)\cos(n+1/2)x,$$

$$g_4(x) := A_2(x)\sin(n+1/2)x + A_3(x)\cos(n+1/2)x,$$

$$g_5(x) := A_4(x)\sin(n+1/2)x + A_6(x)\cos(n+1/2)x,$$

$$g_6(x) := A_5(x)\sin(n+1/2)x + A_7(x)\cos(n+1/2)x,$$

$$g_7(x) := -\frac{A^2}{8\pi^2}x(x-\pi)\sin(n+1/2)x,$$

$$g_8(x) := A_8(x)\sin(n+1/2)x + A_{10}(x)\cos(n+1/2)x,$$

$$g_9(x) := A_9(x)\sin(n+1/2)x + A_{11}(x)\cos(n+1/2)x,$$

ve

$$A_1(x) := c_2x - \xi_1^0(x) + \frac{A\ln x}{2},\ A_2(x) := -(c_1x)^2 + \delta c_p c_1 x + \frac{\delta^2 M_4}{4}$$

$$A_3(x) := c_7x - \xi_2(x) + \frac{\delta M_4 c_1 x}{2},\ A_4(x) := -\frac{Ac_1x^2}{2\pi} + \frac{Ac_1x}{2} + \frac{A\delta c_p x}{2\pi}$$

$$A_5(x) := -c_1c_2x^2 + \xi_1^0(x)c_1x + \frac{Ac_1x\ln x}{2} + \xi_3(x) + \delta c_p c_2 x,$$

$$A_6(x) := c_4x + \frac{\delta M_4 Ax}{2\pi},\ A_7(x) := c_8x - \xi_4(x) + \frac{A\pi c_1 x}{4} + \frac{\delta M_4 c_1 x}{2},$$

$$A_8(x) := -\frac{Ac_2x^2}{2\pi} - \frac{A^2x\ln x}{4\pi} + \frac{Ac_2x}{2} + \frac{\xi_1^0(x)Ax}{2\pi},$$

$$A_9(x) := -\frac{c_2^2 x^2}{2} + \xi_1^0(x) c_2 x + \frac{A c_2 x \ln x}{2} + \xi_5^0(x),\ A_{10}(x) := \frac{A^2(x-\pi)}{8},$$

$$A_{11}(x) := c_{10} x + \frac{A\pi c_2 x}{4} + \xi_6(x) - \frac{A^2 \pi \ln x}{8}$$

şeklindedir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_n} &= \frac{2}{\pi} - \frac{2\delta M_4}{\pi}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}} - \frac{A}{(n+1/2)} + \frac{d_1}{(n+1/2)^{4-2p}} \\ &- \frac{4A\delta c_p}{\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{d_2}{(n+1/2)^{3-p}} + d_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\ &+ d_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \frac{d_5}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)\end{aligned} \tag{2.11}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha_n^0} &= \frac{2}{\pi} - \frac{2\delta M_4}{\pi}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}} - \frac{A}{(n+1/2)} + \frac{d_1}{(n+1/2)^{4-2p}} \\ &- \frac{4A\delta c_p}{\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{d_2^0}{(n+1/2)^{3-p}} + d_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2} \\ &+ d_4^0\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \frac{d_5^0}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right)\end{aligned} \tag{2.12}$$

şeklinde elde edilir, burada

$$d_1 := \frac{2\delta^2 M_4^2}{\pi} - \frac{4b_1}{\pi^2},\ d_2 := 2\delta M_4 A - \frac{4b_2}{\pi^2},\ d_3 := -\frac{4b_3}{\pi^2},\ d_4 := -\frac{4b_4}{\pi^2}$$

$$d_5 := \frac{A^2\pi}{2} - \frac{4b_5}{\pi^2},\ d_2^0 := 2\delta M_4 A - \frac{4b_2^0}{\pi^2},\ d_4^0 := -\frac{4b_4^0}{\pi^2},\ d_5^0 := \frac{A^2\pi}{2} - \frac{4b_5^0}{\pi^2}$$

Eğer $F(x,t)$ fonksiyonunun (2.5) ifadesinde (2.8), (2.10), (2.11) ve (2.12) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}F(x,t) &= F_1(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left((n+1/2)(t+x)\right)}{(n+1/2)} + F_2(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left((n+1/2)(t-x)\right)}{(n+1/2)} \\ &+ F_3(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((n+1/2)(t+x)\right)}{(n+1/2)^{3-p}} + F_4(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left((n+1/2)(t-x)\right)}{(n+1/2)^{3-p}} \\ &+ F_5(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left((n+1/2)(t+x)\right)}{(n+1/2)^{3-p}} + F_6(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left((n+1/2)(t-x)\right)}{(n+1/2)^{3-p}} \\ &+ F_7(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1/2)\cos\left((n+1/2)(t+x)\right)}{(n+1/2)^2}\end{aligned}$$

$$+F_8(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1/2)\cos\big((n+1/2)(t-x)\big)}{(n+1/2)^2}$$
$$+F_9(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\big((n+1/2)(t+x)\big)}{(n+1/2)^2}+F_{10}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\big((n+1/2)(t-x)\big)}{(n+1/2)^2}$$
$$+F_{11}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\big((n+1/2)(t+x)\big)}{(n+1/2)^2}+F_{12}(x,t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\big((n+1/2)(t-x)\big)}{(n+1/2)^2}+O\left(\frac{1}{n^{5-2p}}\right)$$

elde edilir, burada,

$$F_1(x,t):=\frac{(x+t)}{2\pi^2}\int_0^{\pi}q(t)dt\,,\ F_2(x,t):=\frac{(t-x)}{2\pi^2}\int_0^{\pi}q(t)dt\,,$$

$$F_3(x,t):=\left(\frac{\delta c_p x(t-\pi)+t(x-\pi)}{2\pi^3}-\frac{\delta c_p(x+t)-c_1(x^2+t^2)}{2\pi^2}\right)\int_0^{\pi}q(t)dt-\frac{d_2-d_2^0}{4}\,,$$

$$F_4(x,t):=\left(\frac{\delta c_p x(t-\pi)+t(x-\pi)}{2\pi^3}+\frac{\delta c_p(x+t)-c_1(x^2+t^2)}{2\pi^2}\right)\int_0^{\pi}q(t)dt+\frac{d_2-d_2^0}{4}\,,$$

$$F_5(x,t):=\left(\frac{t}{2\pi^2}-\frac{\delta M_4(x+t)}{4\pi^2}\right)\int_0^{\pi}q(t)dt\,,$$

$$F_6(x,t):=\left(\frac{t}{2\pi^2}+\frac{\delta M_4(x-t)}{4\pi^2}\right)\int_0^{\pi}q(t)dt\,,$$

$$F_7(x,t):=\left(\frac{Ax(t-\pi)+At(x-\pi)}{4\pi^3}-\frac{Ax(\pi-x)+At(\pi-t)}{2\pi^3}\right)\int_0^{\pi}q(t)dt-\frac{d_4-d_4^0}{2}\,,$$

$$F_8(x,t):=\left(\frac{Ax(t-\pi)+At(x-\pi)}{4\pi^3}+\frac{Ax(\pi-x)+At(\pi-t)}{2\pi^3}\right)\int_0^{\pi}q(t)dt+\frac{d_4-d_4^0}{2}\,,$$

$$F_9(x,t):=\Bigg[\left(\frac{2AM_5+A\ln\pi-2H}{4\pi^3}-\frac{\delta}{4(p-1)\pi^{p+2}}\right)(x+t)^2-\frac{AM_5(x+t)}{\pi^2}$$
$$+\frac{\delta(x+t)}{4(p-1)\pi^2}\left(\frac{x^{p-1}+t^{p-1}}{(xt)^{p-1}}\right)+\frac{A(x-t)}{4\pi^2}\ln\frac{t}{x}\Bigg]\int_0^{\pi}q(t)dt-\frac{d_5-d_5^0}{4}\,,$$

$$F_{10}(x,t):=\Bigg[\left(-\frac{2AM_5+A\ln\pi-2H}{4\pi^3}+\frac{\delta}{4(p-1)\pi^{p+2}}\right)(x-t)^2+\frac{AM_5(x-t)}{\pi^2}$$
$$+\frac{\delta(x-t)}{4(p-1)\pi^2}\left(\frac{x^{p-1}-t^{p-1}}{(xt)^{p-1}}\right)+\frac{A(x+t)}{4\pi^2}\ln\frac{t}{x}\Bigg]\int_0^{\pi}q(t)dt+\frac{d_5-d_5^0}{4}\,,$$

$$F_{11}(x,t) := -\frac{A(x+t)}{8\pi}\int_0^{\pi} q(t)dt\ ,\ F_{12}(x,t) := \frac{A(x-t)}{8\pi}\int_0^{\pi} q(t)dt\ ,$$

elde edilir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \qquad 0 < x < 2\pi\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}, \qquad 0 < x < 2\pi\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2} = x\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\int x\cot\frac{x}{2}dx, \qquad 0 \le x \le 2\pi \text{ ve } 0 < x < 1$$

olduğundan dolayı $F(x,t)$ fonksiyonu $0 < x < \pi$ ve $0 < t < \pi$ için x ve t değişkenlerine göre sürekli türevlenebilirdir.

3. $K(x,t)$ Fonksiyonuna göre İntegral Denkleminin Çözümünün Varlığı

Bu bölümde (2.6) integral denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanacaktır. Bunun için

$$g(t)+\int_0^x F(s,t)g(s)ds=0 \tag{3.1}$$

homojen integral denkleminin $x\le\pi$ için bir tek $g(t)=0$ çözümü var olduğu gösterilmelidir. (3.1) denkleminin $g(t)\neq 0$ bir çözümü olduğu kabul edilirse, bu durumda (3.1) denkleminin her iki tarafı $g(t)$ fonksiyonu ile çarpılıp $[0,x]$ aralığında t değişkenine göre integrallenirse,

$$\int_0^x g^2(t)dt+\int_0^x\int_0^x F(s,t)g(s)dsdt=0$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $F(x,t)$ fonksiyonu yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^x g(t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt\right)^2=0$$

bulunur. Burada her n için α_n pozitif olduğundan

$$\int_0^x g(t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt=0 \tag{3.2}$$

olur.

Eğer $\varphi_0(t,\lambda_n)$ fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,\pi]$ uzayında tam olduğu gösterilebilirse $g(t)=0$ çelişkisi elde edilir. Bunu göstermek için $L_2[0,\pi]$ uzayından alınan keyfi bir $f(t)$ fonksiyonun $\int_0^x f(t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt=0$ eşitliğini sağlaması için gerekli ve yeterli koşulun $f(t)=0$ olduğunun gösterilmesidir. M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov yapmış oldukları [3] çalışmasında,

$$\varphi_0(t,\lambda_n)=\frac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n}+\int_0^t K_0(t,s)\frac{\sin\lambda_n s}{\lambda_n}ds$$

eşitliğini ispat etmişlerdir. Buradaki $\varphi_0(t,\lambda_n)$'nın ifadesi son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\varphi_0(t,\lambda_n)=\int_0^\pi f(t)\left[\frac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n}+\int_0^t K_0(t,s)\frac{\sin\lambda_n s}{\lambda_n}ds\right]dt$$
$$=\int_0^\pi f(t)\frac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n}dt+\int_0^\pi f(t)\int_0^t K_0(t,s)\frac{\sin\lambda_n s}{\lambda_n}dsdt$$
$$=\int_0^\pi\left[f(t)+\int_t^\pi K_0(t,s)f(s)ds\right]\frac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n}dt=0$$

elde edilir. $\left\{\frac{\sin\lambda_n t}{\lambda_n}\right\}$ fonksiyonlar sistemi $L_2[0,\pi]$ uzayında lineer bağımsız ve tam olduğundan $\sup\limits_{0\le t\le\pi}\int_0^t K_0^2(t,s)ds<\infty$ ve $f(t)\in L_2[0,\pi]$ olmak üzere

$$f(t)+\int_t^\pi K_0(t,s)f(s)ds=0$$

bulunur. Bu son denklem $f(t)$ fonksiyonu için Volterra tipinden integral denklemi olduğundan, Volterra tipindeki integral denklemler teorisinden yararlanılarak $f(t)=0$ elde edilir ki, bu da $\{\varphi_0(t,\lambda_n)\}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,\pi]$ uzayında tam olduğunu verir. (3.2) eşitliğinden $g(t)=0$ olduğu bulunur. Bu ise ispatı bitirir.

(2.6) integral denkleminden görüldüğü gibi $K(x,t)$ fonksiyonunun t değişkenine göre türevlenebilirlik mertebesi, $F(x,t)$ fonksiyonunun türevlenebilirlik mertebesi ile aynıdır. $K(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre araştırılması B.M. Levitan ve M.G. Gasimov [1] tarafından yapılan benzeri sonuca uygun olarak aşağıdaki Lemma ile ifade edilir.

Lemma 3.1: $H(t,s,a)$ ve $g(t,a)$ fonksiyonları t değişkenine ve a parametresine göre sürekli olmak üzere,

$$g(t,a)=h(t,a)+\int_0^t H(t,s,a)h(s,a)ds$$

integral denklemi verilmiş olsun. Burada $H(t,s,a)$ verilen integral denklemin çekirdeği, $g(t,a)$ ise serbest terimdir. Eğer, verilen integral denkleme karşılık gelen homojen integral denklemin $a=a_0$ için bir tek trivial çözümü var ise verilen integral denklemin $a=a_0$'ın herhangi yakın komşuluğunda $h(t,a)$ çözümü t ve a'ya göre süreklidir. Eğer $H(t,s,a)$ ve $g(t,a)$ fonksiyonları a parametresine göre *m.*

mertebeden türevlere sahip ise $h(t,a)$ fonksiyonu da a parametresine göre *m.* mertebeden türevlere sahiptir.

Lemma'nın sonucu olarak; $F(x,t)$ fonksiyonu x ve t değişkenlerine göre sürekli olduğu zaman $K(x,t)$ fonksiyonu da x ve t değişkenlerine göre süreklidir. Ayrıca $K(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevlenebilirlik mertebesi, $F(x,t)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevlenebilirlik mertebesi ile aynıdır.

4. Diferansiyel Denklemin ve Sınır Koşullarının Belirlenmesi

Bu bölümde $F(x,t)$ fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar dizisinin sağladığı diferansiyel denklem ve sınır koşulları belirlenecektir. $F(x,t)$ fonksiyonu x ve t değişkenlerine göre ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu durumda Lemma (3.1)'e göre $K(x,t)$ fonksiyonu da x ve t değişkenlerine göre ikinci mertebeden sürekli türevlere sahiptir.

Lemma 4.1: (2.5) formülüyle verilen $F(x,t)$ fonksiyonu,

$$-F_{xx}(x,t)+\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}\right]F(x,t)=-F_{tt}(x,t)+\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}\right]F(x,t) \tag{4.1}$$

diferansiyel denklemini sağlar.

Lemma'nın ispatı M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov [3] tarafından verilen Lemma'nın ispatına benzer olarak yapılır.

Teorem 4.2: (2.6) integral denkleminin çözümü olan $K(x,t)$ fonksiyonu,

$$-K_{xx}(x,t)+\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}\right]K(x,t)-2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,t)=-K_{tt}(x,t)+\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}\right]K(x,t) \tag{4.2}$$

diferansiyel denklemini sağlar.

İspat:

$$F(x,t)+\int_0^x K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi+K(x,t)=0 \tag{4.3}$$

denklemi x değişkenine göre iki kez diferansiyellenirse,

$$\begin{aligned} &F_{xx}(x,t)+K_{xx}(x,t)+\frac{dK(x,x)}{dx}F(x,t)+K(x,x)F_x(x,t)\\ &\quad+K_x(x,t)\big|_{t=x}F(x,t)+\int_0^x K_{xx}(x,\xi)F(\xi,t)d\xi=0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitliği ve yine (4.3) denklemi bu kez t değişkenine göre iki kez diferansiyellenirse,

$$F_{tt}(x,t)+K_{tt}(x,t)+\int_0^x K(x,\xi)F_{tt}(\xi,t)d\xi=0$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.1) denklemi göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} &F_{tt}(x,t)+K_{tt}(x,t)+\int_0^x\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}-\frac{A}{\xi}-\frac{\delta}{\xi^p}\right]K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi\\ &\quad+\int_0^x K(x,\xi)F_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi=0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlikte kısmi integrasyon kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&F_{tt}(x,t)+K_{tt}(x,t)+\int_0^x\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}-\frac{A}{\xi}-\frac{\delta}{\xi^p}\right]K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi \\
&+K(x,\xi)F_{\xi}(\xi,t)-K_{\xi}(x,\xi)F(\xi,t)\Big|_{\xi=0}^{x}+\int_0^x K_{\xi\xi}(x,\xi)F(\xi,t)d\xi=0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

elde edilir. $F(x,t)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevleri sınırlı olduğundan (4.5) eşitliğinde $t\to 0$ iken limit alınırsa,

$$F(x,0)=0 \tag{4.6}$$

olur. Bu ise (4.3) ve (4.6) eşitliklerinden $K(x,0)=0$ olduğunu verir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
&F_{tt}(x,t)+K_{tt}(x,t)+\int_0^x\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}-\frac{A}{\xi}-\frac{\delta}{\xi^p}\right]K(x,\xi)F(\xi,t)d\xi \\
&+K(x,\xi)F_{\xi}(\xi,t)-K_{\xi}(x,\xi)F(\xi,t)\Big|_{\xi=x}+\int_0^x K_{\xi\xi}(x,\xi)F(\xi,t)d\xi=0
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

şeklinde yazılabilir. (4.3) eşitliğini $\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}-\frac{A}{x}-\frac{\delta}{x^p}-2\frac{dK(x,x)}{dx}\right]$ ifadesiyle çarpmakla elde edilen yeni eşitliğe (4.4) eşitliği eklenir, elde edilen son ifadeden (4.5) eşitliği çıkarılır ve (4.1) eşitliği göz önünde bulundurulursa,

$$
\begin{aligned}
&K_{xx}(x,t)-\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}\right]K(x,t)-K_{tt}(x,t)+\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}\right]K(x,t) \\
&-2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,t)+\int_0^x\left\{K_{xx}(x,\xi)-\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}\right]K(x,\xi)\right. \\
&\left.-K_{\xi\xi}(x,\xi)-\left[\frac{A}{\xi}+\frac{\delta}{\xi^p}\right]K(x,\xi)-2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,\xi)\right\}F(\xi,t)d\xi=0
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

elde edilir. (4.8) eşitliği homojen Volterra tipinde bir integral denklemi olduğu için

$$
\begin{aligned}
&K_{xx}(x,t)-\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}\right]K(x,t)-K_{tt}(x,t)+\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}\right]K(x,t) \\
&-2\frac{dK(x,x)}{dx}K(x,t)=0
\end{aligned}
$$

veya

$$K_{xx}(x,t)-\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}+2\frac{dK(x,x)}{dx}\right]K(x,t)=K_{tt}(x,t)-\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}\right]K(x,t)$$

olur. Şimdi ise $K(x,t)$ fonksiyonu yardımıyla,

$$\varphi(x,\lambda_n)=\varphi_0(x,\lambda_n)+\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt \tag{4.9}$$

şeklinde $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sistemi oluşturulsun. Burada $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sistemi, $q(x)=0$ durumunda (2.1) denkleminin (2.3) koşullarını sağlayan çözümüdür.

Teorem 4.3: (4.9) eşitliği ile verilen $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu (2.1) diferansiyel denklemin çözümüdür ve

$$q(x)=2\frac{dK(x,x)}{dx}.$$

İspat:

$$\varphi_0''(x,\lambda_n)-\left\{\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}-\lambda_n^2\right\}\varphi_0(x,\lambda_n)=0 \tag{4.10}$$

olduğundan, (4.9)eşitliğindeki $\varphi(x,\lambda_n)$' nın ifadesi (2.1) diferansiyel denkleminin sol tarafında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\varphi''(x,\lambda_n)-\left\{\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}+2\frac{dK(x,x)}{dx}\right\}\varphi(x,\lambda_n)+\lambda_n^2\varphi(x,\lambda_n)=\\
&=-\frac{dK(x,x)}{dx}\varphi_0(x,\lambda_n)-\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}\right]\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt\\
&-2\frac{dK(x,x)}{dx}\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt+\lambda_n^2\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt\\
&+K(x,x)\frac{d\varphi_0(x,\lambda_n)}{dx}+K_x(x,t)\varphi_0(x,\lambda_n)\Big|_{t=x}+\int_0^x K_{xx}(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.2) eşitliği kullanılarak son eşitlikteki $K_{xx}(x,t)$, $K_{tt}(x,t)$ ile ifade edilirse,

$$\begin{aligned}
&\varphi''(x,\lambda_n)-\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}+2\frac{dK(x,x)}{dx}\right]\varphi(x,\lambda_n)+\lambda_n^2\varphi(x,\lambda_n)=\\
&=-\frac{dK(x,x)}{dx}\varphi_0(x,\lambda_n)+\lambda_n^2\int_0^x K(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt\\
&+K(x,x)\frac{d\varphi_0(x,\lambda_n)}{dx}+K_x(x,t)\varphi_0(x,\lambda_n)\Big|_{t=x}\\
&+\int_0^x K_{tt}(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt-\int_0^x\left[\frac{A}{t}+\frac{\delta}{t^p}\right]K(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt
\end{aligned} \tag{4.11}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\int_0^x K_{tt}(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)dt = K_t(x,t)\varphi_0(t,\lambda_n)\Big|_{t=x} - K(x,x)\frac{d\varphi_0(x,\lambda_n)}{dx}$$
$$+\int_0^x K(x,t)\frac{d^2\varphi_0(t,\lambda_n)}{dx^2}dt$$

olduğundan, bu ifade (4.11) eşitliğinde yerine yazılır ve (4.10) eşitliği kullanılırsa $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu için

$$-\varphi''(x,\lambda_n)+\left[\frac{A}{x}+\frac{\delta}{x^p}+2\frac{dK(x,x)}{dx}\right]\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n^2\varphi(x,\lambda_n)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

M.G. Gasimov ve R.Kh. Amirov [3] tarafından yapılan çalışmanın sonuçları kullanılarak, (4.9) denklemi ile verilen $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,\pi]$ uzayında bir tam sistem oluşturduğu açıktır.

$x=\pi$ noktasında $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyon unun sağladığı sınır koşullarını belirtmek için,

$$\varphi''(x,\lambda_n)-\left[\lambda_n - q(x)-\frac{A}{x}-\frac{\delta}{x^p}\right]\varphi(x,\lambda_n)=0$$

ve

$$\varphi''(x,\lambda_m)-\left[\lambda_m - q(x)-\frac{A}{x}-\frac{\delta}{x^p}\right]\varphi(x,\lambda_m)=0$$

denklemlerinin birincisi $\varphi(x,\lambda_m)$ fonksiyonu, ikincisi $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu ile çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa,

$$[\varphi'(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)-\varphi'(x,\lambda_m)\varphi(x,\lambda_n)]' = (\lambda_m-\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlik $[0,\pi]$ aralığında integrallenir ve $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,\pi]$ uzayındaki ortogonalliği kullanılırsa,

$$\varphi'(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)-\varphi'(x,\lambda_m)\varphi(x,\lambda_n)=0$$

veya

$$\frac{\varphi'(x,\lambda_n)}{\varphi(x,\lambda_n)}=\frac{\varphi'(x,\lambda_m)}{\varphi(x,\lambda_m)}, \quad (n,m=0,1,\ldots)$$

eşitliği bulunur. Buradan, sabit bir $\dfrac{\varphi'(x,\lambda_n)}{\varphi(x,\lambda_n)}$ sayısı veya

$$\varphi'(x,\lambda_n)-H\varphi(x,\lambda_n)=0$$

sınır koşulu elde edilir.

Böylece, aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.4: $q(x) \in W_2^2[0,\pi]$ ve $p \in (1, 5/4)$ olmak üzere $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin (2.1)-(2.2) tipindeki bir problemin spektral karakteristikleri olması için $k \neq n$, $\rho_k \neq \rho_n$, her n için $\alpha_n > 0$ ve c_i, b_i sayıları bilinen sabitler olmak üzere,

$$\rho_n = (n+1/2) + \frac{c_1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A}{2\pi}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)} + \frac{c_2}{(n+1/2)} + \frac{c_7}{(n+1/2)^{4-2p}}$$
$$+ c_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_8}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{c_{10}}{(n+1/2)^2} + \frac{c_{31}}{(n+1/2)^{6-3p}}$$
$$+ c_{12}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{5-2p}} + \frac{c_{32}}{(n+1/2)^{5-2p}} + c_{14}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}} + c_{33}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{4-p}}$$
$$+ \frac{c_{34}}{(n+1/2)^{4-p}} - \frac{A^3}{24\pi}\frac{\ln^3(n+1/2)}{(n+1/2)^3} + c_{17}\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^3} + c_{35}\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^3}$$
$$+ \frac{c_{19}}{(n+1/2)^3} + O\left(\frac{1}{n^{8-4p}}\right)$$

ve

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta M_1\pi}{2}\frac{1}{(n+1/2)^{2-p}} + \frac{A\pi^2}{4}\frac{1}{(n+1/2)} + \frac{b_1}{(n+1/2)^{4-2p}}$$
$$+ A\delta c_p\pi\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^{3-p}} + \frac{b_2}{(n+1/2)^{3-p}} + b_3\frac{\ln^2(n+1/2)}{(n+1/2)^2}$$
$$+ b_4\frac{\ln(n+1/2)}{(n+1/2)^2} + \frac{b_5}{(n+1/2)^2} + O\left(\frac{1}{n^{6-3p}}\right).$$

asimptotik formüllerinin sağlanması yeterlidir.

Kaynaklar

[1] M.G. Gasimov and B.M. Levitan, About Sturm-Liouville differential operators, Math. Sborn., 63, (105), No.3, 1964.

[2] M.G. Gasimov, About an inverse problem for Sturm-Liouville equation, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, vol.154, No.2, 1964.

[3] M.G. Gasimov and R.Kh. Amirov, Direct and inverse spectral problems for second order differential operators which has Coulomb singularity, Dokl. Akad. Nauk.Az., SSR, vol.41, No.8, 1-5, 1985.