C.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Fen Bilimleri Dergisi (2005)Cilt 26 Sayı 1

Aralığın İç Noktasında Süreksizliğe Sahip Dirac Operatörünün Spektral Özellikleri

R. Kh. AMİROV ve Y. GÜLDÜ

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
58140 Sivas
emirov@cumhuriyet.edu.tr, yguldu@cumhuriyet.edu.tr

Received:17.07.2006, Accepted: 06.09.2006

Özet: Bu çalışmada sonlu aralığın iç noktasında süreksizlik koşuluna sahip Dirac operatörü için spektral verilerin özellikleri araştırılmıştır.
Anahtar kelimeler: Operatör, Spektrum, Dirac Operatör

Spectral Properties of Dirac Operator With Discontinuity Conditions Inside an Interval

Abstract: We study properties of spectral datas for the Dirac operator on a finite interval with discontinuity conditions inside the interval.
Key Words: Operator, Spectrum, Dirac Operator

1. Giriş

Dirac operatörü için $[0,\infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasimov ve B. M. Levitan[1] tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$ $[0,\infty)$ yarı ekseninin her sonlu aralığında sürekli, reel fonksiyonlar ve

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},\ y(x,l)=\begin{pmatrix}y_1(x,l)\\ y_2(x,l)\end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B\frac{dy}{dx}+Q(x)y=ly,\quad 0<x<\infty \tag{1.1}$$

$$y_1(0)=0,\qquad y_2(p)+Hy_1(p)=0 \tag{1.2}$$

$$y_1(0)=0,\qquad y_2(p)+H_1y_1(p)=0\quad H_1\neq H \tag{1.2'}$$

sınır problemi ele alınmıştır. Bu takdirde $j(x,l)=\begin{pmatrix}j_1(x,l)\\ j_2(x,l)\end{pmatrix}$, (1.1) denkleminin

$$j_1(0,l)=0,\quad j_2(0,l)=-1 \tag{1.3}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, monoton artan $r(l)(-\infty<l<\infty)$ fonksiyonu (1.1), (1.2) probleminin spektral fonksiyonu ve her $f(x)\in L_2(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(l)=\int_0^n f^T(x)j(x,l)dx$$

olacak biçimde

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(l)-F_n(l)\}^2\,dr(l)=0$$

olmak üzere

$$\int_0^\infty f^T(x)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}F^2(l)dr(l) \tag{1.4}$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

İki spektruma göre regüler Dirac operatörünün belirlenmesi problemi M. G. Gasimov ve C. Cebiyev[2] tarafından yapılan çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada aşağıdaki önemli teoremler ispatlanmıştır:

Teorem 1.1: $\{l_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{m_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri sırası ile (1.1), (1.2) ve (1.1) (1.2′) problemlerinin özdeğerleri ise

$$a_n=\frac{H_1-H}{m_n-l_n}\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{l_k-l_n}{m_n-m_k},\quad (n=0,\mathbf{m}1,\mathbf{m}2,\mathbf{K}) \tag{1.5}$$

dir.

Teorem 1.2: $p(x)$ ve $q(x)$, $[0,p]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve k. mertebeden türevleri $L_2(0,p)$ de olacak biçimde $\{l_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{m_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri sırası ile (1.1), (1.2) ve (1.1) (1.2′) problemlerinin spektrumları olması için

1. $\{l_n\}$ ve $\{m_n\}$ sayılarının sıralı olması, yani

$$\mathbf{K} < l_{-n} < m_{-n} < l_{-n+1} < \mathbf{K} < l_0 < m_0 < l_1 < \mathbf{K} < l_n < m_n < l_{n+1} < \mathbf{K}$$

2. $a \neq b$, $0 \leq b$, $a \leq p$ ve $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left|a_{n,k}\right|^2$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left|b_{n,k}\right|^2$ serileri yakınsak olmak üzere

$$l_n = n - \frac{a}{p} + \frac{a_1}{n} + \mathbf{K} + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_{n,k}}{n^k}$$

$$m_n = n - \frac{b}{p} + \frac{b_1}{n} + \mathbf{L}\,\frac{b_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{b_{n,k}}{n^k}$$

asimptotik formüllerinin sağlanması gerek ve yeterdir.

2n mertebeli Dirac denklemler sistemi için ters saçılma problemi [3] çalışmasında incelenmiştir.

Sonlu aralıkta

$$By'(x) + \Omega(x)y(x) = l y(x), \qquad 0 < x < p \tag{1.6}$$

Dirac diferansiyel denklemlerin kanonik sistemi ele alınsın.

$$y_2(0) - hy_1(0) = 0 \tag{1.7}$$

$$y_2(p) + Hy_1(p) = 0 \tag{1.8}$$

sınır koşulları ve $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ aralığının $x = a$ iç noktasındaki

$$y(a-0) = Ay(a+0) \tag{1.9}$$

süreksizlik koşulu ve (1.6) denklemi tarafından üretilen sınır değer problemi L ile gösterilsin. Burada,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

$p(x), q(x)$ reel değerli ve $p(x), q(x) \in L_2(0,p)$, $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, $a \in \left(\frac{p}{2}, p\right)$ ve $a > 0$, $a \neq 1$ olan reel sayıdır.

Ayrıca (1.9) süreksizlik koşulundaki A matrisi için $\det A = 1$ dir. Diğer taraftan L operatörü, tanım kümesi $D(L) = \{y(x) = (y_1(x) \quad y_2(x))^T : y_1(x), y_2(x); [0,a), (a,p]$

aralıklarında $y(a-0)=Ay(a+0)$ süreksizlik koşullarını sağlayan mutlak sürekli fonksiyonlar, $y_2(0)-hy_1(0)=0,\ y_2(p)+Hy_1(p)=0\}$
olan self-adjoint operatördür.

2. Karakteristik Fonksiyon ve Özellikleri

$\Omega(x)\equiv 0$ olduğu durumda L problemi L_0 olarak gösterilsin. $\Omega(x)\equiv 0$ olduğu durumda, $By'=ly$ denkleminin $j_0(0,l)=\begin{pmatrix}1\\ h\end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını ve $j_0(a-0)=Aj_0(a+0)$, $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$ süreksizlik koşullarını sağlayan $j_0(x,l)=\begin{pmatrix}j_{01}(x,l)\\ j_{02}(x,l)\end{pmatrix}$ çözümü,

$$
j_0(x,l)=\begin{cases}\begin{pmatrix}-h\sin lx+\cos lx\\ h\cos lx+\sin lx\end{pmatrix}, & 0<x<a\\[2ex] a^{+}\begin{pmatrix}-h\sin lx+\cos lx\\ h\cos lx+\sin lx\end{pmatrix}\\ +a^{-}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos l(2a-x)-h\sin l(2a-x)\\ h\cos l(2a-x)+\sin l(2a-x)\end{pmatrix}, & a<x<p\end{cases}
$$

şeklinde gösterime sahiptir.

$\Delta_0(l)$ ile L_0 probleminin karakteristik fonksiyonu gösterilecek olursa;
$\Delta_0(l)=y_2(p,l)+Hy_1(p,l)=0$ olduğundan

$$
\Delta_0(l)=a^{+}(h\cos lp+\sin lp)+a^{-}(-h\cos l(2a-p)-\sin l(2a-p))
$$

$$
+H[a^{+}(\cos lp-h\sin lp)+a^{-}(\cos l(2a-p)-h\sin l(2a-p))]=0
$$

olduğu açıktır.

Bu denklemin kökleri L_0 probleminin özdeğerleridir. Burada $n>0$ ise $l_n^0>0$, $n=0$ için $l_0^0=0$ ve $n<0$ ise $l_n^0<0$ olarak kabul edilirse; $n=1,2,\mathbf{K}$ için $l_{-n}^0=-l_n^0$ olduğu açıktır.

Aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 2.1: $\inf\left|l_n^0-l_m^0\right|=b>0$ yani $\Delta_0(l)=0$ karakteristik denkleminin kökleri ayrıktır.

İspat: Tersi kabul edilecek olursa, yani $\{l_n^0\}$ dizisinin $\{l_{n_k}^0\}$ ve $\{\hat{l}_{n_k}^0\}$ alt dizileri vardır, öyleki $l_{n_k}^0 \neq \hat{l}_{n_k}^0$ ve $k \to \infty$ iken $l_{n_k}^0, \hat{l}_{n_k}^0 \to \infty$ ve ayrıca

$$\lim_{k\to\infty}\left| l_{n_k}^0 - \hat{l}_{n_k}^0 \right| = 0$$

dır. $L_2(0,p;R^2)$ uzayında L_0 probleminin $j_0(x, l_{n_k}^0)$ ve $j_0(x, \hat{l}_{n_k}^0)$ özfonksiyonlarının ortogonallik koşulundan yararlanılırsa;

$$0 = \int_0^p j_0(x, l_{n_k}^0)\overline{j_0(x, \hat{l}_{n_k}^0)}dx = \int_0^p j_0(x, l_{n_k}^0)\overline{j_0(x, l_{n_k}^0)}dx$$

$$+\int_0^p j_0(x, l_{n_k}^0)\left[\overline{j_0(x, \hat{l}_{n_k}^0) - j_0(x, l_{n_k}^0)}\right]dx$$

veya

$$0 = \int_0^a j_0(x, l_{n_k}^0)\overline{j_0(x, l_{n_k}^0)}dx + \int_a^p j_0(x, l_{n_k}^0)\overline{j_0(x, l_{n_k}^0)}dx$$

$$+\int_0^p j_0(x, l_{n_k}^0)\left[\overline{j_0(x, \hat{l}_{n_k}^0) - j_0(x, l_{n_k}^0)}\right]dx$$

$$\geq \int_0^a j_0(x, l_{n_k}^0)\overline{j_0(x, l_{n_k}^0)}dx + \int_0^p j_0(x, l_{n_k}^0)\left[\overline{j_0(x, \hat{l}_{n_k}^0) - j_0(x, l_{n_k}^0)}\right]dx$$

$$= \int_0^a \left(-h\sin l_{n_k}^0 x + \cos l_{n_k}^0 x \quad h\cos l_{n_k}^0 x + \sin l_{n_k}^0 x\right)\begin{pmatrix} -h\sin l_{n_k}^0 x + \cos l_{n_k}^0 x \\ h\cos l_{n_k}^0 x + \sin l_{n_k}^0 x \end{pmatrix}dx$$

$$+\int_0^p j_0(x, l_{n_k}^0)\left[\overline{j_0(x, \hat{l}_{n_k}^0) - j_0(x, l_{n_k}^0)}\right]dx$$

$$= \int_0^a (h^2+1)dx + \int_0^p j_0(x, l_{n_k}^0)\left[\overline{j_0(x, \hat{l}_{n_k}^0) - j_0(x, l_{n_k}^0)}\right]dx$$

$$= (h^2+1)a + \int_0^p j_0(x, l_{n_k}^0)\left[\overline{j_0(x, \hat{l}_{n_k}^0) - j_0(x, l_{n_k}^0)}\right]dx$$

olur. Burada $<\cdot,\cdot>$ sembolü R^2 öklid uzayındaki iç çarpımı gösterir. Böylece

$$0 \geq (h^2+1)a + \int_0^p j_0(x, l_{n_k}^0)\left[\overline{j_0(x, \hat{l}_{n_k}^0) - j_0(x, l_{n_k}^0)}\right]dx \tag{2.1}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\varphi_0(x,\lambda)$ çözümünün ifadesinden görüldüğü gibi her $x\in[0,\pi]$ için x'e göre düzgün olarak

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\varphi_0(x,\hat{\lambda}^0_{n_k})-\varphi_0(x,\lambda^0_{n_k})\right\|$$

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\begin{matrix}-h\sin\hat{\lambda}^0_{n_k}x+\cos\hat{\lambda}^0_{n_k}x+h\sin\lambda^0_{n_k}x-\cos\lambda^0_{n_k}x\\ h\cos\lambda^0_{n_k}x+\sin\lambda^0_{n_k}x-h\cos\lambda^0_{n_k}x-\sin\lambda^0_{n_k}x\end{matrix}\right\|_{R^2}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sqrt{(h^2+1)(\sin\hat{\lambda}^0_{n_k}x-\sin\lambda^0_{n_k}x)^2+(h^2+1)(\cos\hat{\lambda}^0_{n_k}x-\cos\lambda^0_{n_k}x)^2}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sqrt{2(h^2+1)\left(1-\cos(\hat{\lambda}^0_{n_k}-\lambda^0_{n_k})x\right)}=\lim_{k\to\infty}2\sqrt{(h^2+1)}\sin\frac{(\hat{\lambda}^0_{n_k}-\lambda^0_{n_k})}{2}x=0$$

olur. Burada $\|\cdot\|_{R^2}=\sqrt{<\cdot,\cdot>}$ dir.

Bu nedenle (2.1) eşitsizliğinde $k\to\infty$ iken limite geçilirse $0>(h^2+1)\alpha$ olduğu elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişki Lemma 2.1'in doğru olduğunu gösterir.

$\Delta(\lambda)$, $\{\lambda_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$'ler sırasıyla L probleminin karakteristik fonksiyonunu, özdeğer dizisini ve normalleştirici sayılar dizisini göstersin.

$\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ fonksiyonu ile (1.6) denkleminin $\varphi(0,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\ h\end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını ve (1.9) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü gösterilsin.

$$f_0(x,\lambda)=Y_0(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h+i\\ 1+ih\end{pmatrix},\quad F(x,\lambda)=Y(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h+i\\ 1+ih\end{pmatrix}$$

vektör çözümleri yardımı ile,

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{F(x,\lambda)-\overline{F(x,\lambda)}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[Y(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h+i\\ 1+ih\end{pmatrix}-Y(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h-i\\ 1-ih\end{pmatrix}\right]=Y(x,\lambda)\begin{pmatrix}1\\ h\end{pmatrix}$$

$$\varphi_0(x,\lambda)=\frac{f_0(x,\lambda)-\overline{f_0(x,\lambda)}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[Y_0(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h+i\\ 1+ih\end{pmatrix}-Y_0(x,\lambda)\begin{pmatrix}-h-i\\ 1-ih\end{pmatrix}\right]=Y_0(x,\lambda)\begin{pmatrix}1\\ h\end{pmatrix}$$

yazılabilir.

$$Y(x,\lambda)=Y_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$

gösteriminden yararlanılırsa,

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_{-x}^{x}K(x,t)e^{-\lambda Bt}\begin{pmatrix}1\\ h\end{pmatrix}dt$$

elde edilir. Böylece, $j(x,l)$ matris çözümünün $j_1(x,l)$ ve $j_2(x,l)$ bileşeni için

$$j_1(x,l) = j_{01}(x,l)$$

$$+\int_{-x}^{x}\{K_{11}(x,t)[\cos lt - h\sin lt] + K_{12}(x,t)[h\cos lt + \sin lt]\}dt$$

$$j_2(x,l) = j_{02}(x,l)$$

$$+\int_{-x}^{x}\{K_{21}(x,t)[\cos lt - h\sin lt] + K_{22}(x,t)[h\cos lt + \sin lt]\}dt$$

olur. Buradan,

$$j_1(x,l) = j_{01}(x,l) + \int_0^x [K_{11}(x,t) + K_{11}(x,-t)]\cos l t dt$$

$$+\int_0^x [K_{11}(x,-t) - K_{11}(x,t)]h\sin l t dt + \int_0^x [K_{12}(x,t) + K_{12}(x,-t)]h\cos l t dt$$

$$+\int_0^x [K_{12}(x,t) - K_{12}(x,-t)]\sin l t dt$$

veya

$$j_1(x,l) = j_{01}(x,l) + \int_0^x \tilde{K}_{11}(x,t)\cos l t dt + \int_0^x \approx{K}_{11}(x,t)h\sin l t dt$$

$$+\int_0^x \tilde{K}_{12}(x,t)h\cos l t dt + \int_0^x \approx{K}_{12}(x,t)\sin l t dt$$

yazılır. Burada

$$\tilde{K}_{11}(x,t) = K_{11}(x,t) + K_{11}(x,-t)$$

$$\overset{\approx}{K}_{11}(x,t) = K_{11}(x,-t) - K_{11}(x,t)$$

$$\tilde{K}_{12}(x,t) = K_{12}(x,t) + K_{12}(x,-t)$$

$$\overset{\approx}{K}_{12}(x,t) = K_{12}(x,t) - K_{12}(x,-t)$$

Benzer şekilde,

$$j_2(x,l) = j_{02}(x,l) + \int_0^x \{\tilde{K}_{21}(x,t)\cos l t dt + \int_0^x \{\overset{\approx}{K}_{21}(x,t)h\sin l t dt$$

$$+\int_0^x \tilde{K}_{22}(x,t)h\cos l t dt + \int_0^x \overset{\approx}{K}_{22}(x,t)\sin l t dt$$

olur. Burada

$$\tilde{K}_{21}(x,t) = K_{21}(x,t) + K_{21}(x,-t)$$

$$\tilde{\tilde{K}}_{21}(x,t) = K_{21}(x,-t) - K_{21}(x,t)$$

$$\tilde{K}_{22}(x,t) = K_{22}(x,t) + K_{22}(x,-t)$$

$$\tilde{\tilde{K}}_{22}(x,t) = K_{22}(x,t) - K_{22}(x,-t)$$

ve ayrıca $\left(\tilde{K}_{ij}(x,\cdot)\right)_{i,j=1}^{2}$ ve $\left(\tilde{\tilde{K}}_{ij}(x,\cdot)\right)_{i,j=1}^{2} \in L_2(-x,x)$ dir.

Böylece L probleminin karakteristik denklemi

$$\Delta(l) = \Delta_0(l) + \int_0^p \tilde{K}_{21}(p,t)\cos l t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{21}(p,t) h \sin l t dt$$

$$+ \int_0^p \tilde{K}_{22}(p,t) h \cos l t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{22}(p,t)\sin l t dt$$

$$+ H\left[\int_0^p \tilde{K}_{11}(p,t)\cos l t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t) h \sin l t dt\right.$$

$$\left. + \int_0^p \tilde{K}_{12}(p,t) h \cos l t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t)\sin l t dt\right] = 0$$

şeklinde elde edilir. Burada $\Delta_0(l) = j_{02}(p,l) + H j_{01}(p,l)$ dır.

Lemma 2.1: L probleminin özdeğerleri basittir. Yani $\dot{\Delta}(l_n) \neq 0$ dır.

İspat: $$B j'(x,l) + \Omega(x) j(x,l) = l\, j(x,l)$$

$$B \dot{j}'(x,l) + \Omega(x) \dot{j}(x,l) = l\, \dot{j}(x,l) + j(x,l)$$

olduğundan R^2 öklid uzayında 1.denklem $\dot{j}(x,l)$, 2.denklem ise $j(x,l)$ ile skaler olarak çarpılır ve taraf tarafa çıkarılırsa,

$B \dot{j}'(x,l) j(x,l) - B j'(x,l) \dot{j}(x,l) = j^2(x,l)$ olur. Yani,

$$< j(x,l), j(x,l) >=< B \dot{j}'(x,l), j(x,l) > - < B j'(x,l), \dot{j}(x,l) >$$

elde edilir. Bu son eşitlik $[0,p]$ aralığı üzerinde $l = l_n$ yazılarak integrallenirse ve

$$a_n = \int_0^p j^2(x, l_n)dx = \int_0^p [j_1^2(x, l_n) + j_2^2(x, l_n)]dx$$

olduğu gözönünde bulundurulursa,

$$a_n = \int_0^p j^2(x, l_n)dx = \int_0^p [\dot{j}_2'(x, l_n) j_1(x, l_n) - \dot{j}_1'(x, l_n) j_2(x, l_n)]dx$$

$$-\int_0^p [j_2'(x, l_n)\dot{j}_1(x, l_n) - j_1'(x, l_n)\dot{j}_2(x, l_n)]dx$$

$$= \dot{j}_2(x, l_n) j_1(x, l_n)\Big|_0^p - \int_0^p \dot{j}_2(x, l_n) j_1'(x, l_n)dx - \dot{j}_1(x, l_n) j_2(x, l_n)\Big|_0^p$$

$$+\int_0^p \dot{j}_1(x, l_n) j_2'(x, l_n)dx - \int_0^p [j_2'(x, l_n)\dot{j}_1(x, l_n) - j_1'(x, l_n)\dot{j}_2(x, l_n)]dx$$

$$= \dot{j}_2(p, l_n) j_1(p, l_n) - \dot{j}_1(p, l_n) j_2(p, l_n) - \dot{j}_2(0, l_n) j_1(0, l_n) + \dot{j}_1(0, l_n) j_2(0, l_n)$$

$$+\int_0^p \left[\dot{j}_1(x, l_n) j_2'(x, l_n) - \dot{j}_2(x, l_n) j_1'(x, l_n)\right]dx$$

$$-\int_0^p \left[j_2'(x, l_n)\dot{j}_1(x, l_n) - j_1'(x, l_n)\dot{j}_2(x, l_n)\right]dx$$

$$= \dot{j}_2(p, l_n) j_1(p, l_n) - \dot{j}_1(p, l_n) j_2(p, l_n) - \dot{j}_2(0, l_n) j_1(0, l_n) + \dot{j}_1(0, l_n) j_2(0, l_n)$$

$$= \dot{j}_2(p, l_n) j_1(p, l_n) - \dot{j}_1(p, l_n) j_2(p, l_n)$$

$$= \dot{j}_2(p, l_n) j_1(p, l_n) - \dot{j}_1(p, l_n)(-H j_1(p, l_n))$$

$$= j_1(p, l_n)[\dot{j}_2(p, l_n) + H\dot{j}_1(p, l_n)] = j_1(p, l_n)\dot{\Delta}(l_n)$$

olur. Yani

$$a_n = \dot{\Delta}(l_n) j_1(p, l_n)$$

elde edilir. Buradan $\dot{\Delta}(l_n) \neq 0$ olduğu açıktır.

3. Özdeğerler ve Normalleştirici Sayıların Asimptotik İfadeleri

Lemma .3.1: L probleminin özdeğerleri için $l_n = l_n^0 + e_n$ asimptotik eşitliği doğrudur. Burada $e_n \in \mathbf{l}_2$ dir.

İspat: δ yeterince küçük pozitif sayı olmak üzere $(d << \frac{b}{2})$

$$\Gamma_n = \left\{ l : |l| = |l_n^0| + \frac{b}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

$$G_d = \left\{ l : |l - l_n^0| \geq d,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

olsun. $\Delta_0(l)$ sinüs tipli olduğundan, $l \in \overline{G_d}$ için $|\Delta_0(l)| > C_d e^{|\operatorname{Im} l|p}$ olacak şekilde $C_d > 0$ vardır[4]. Diğer taraftan

$$\Delta(l) = j_2(p, l) + H j_1(p, l)$$

ve

$$\Delta_0(l) = j_{02}(p, l) + H j_{01}(p, l)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\Delta(l) = \Delta_0(l) &+ \int_0^p \tilde{K}_{21}(p,t)\cos l t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{21}(p,t) h \sin l t dt \\
&+ \int_0^p \tilde{K}_{22}(p,t) h \cos l t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{22}(p,t)\sin l t dt \\
&+ H\left[\int_0^p \tilde{K}_{11}(p,t)\cos l t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t) h \sin l t dt \right.\\
&\left. + \int_0^p \tilde{K}_{12}(p,t) h \cos l t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t)\sin l t dt \right]
\end{aligned}$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
&\lim_{|l|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im} l|p} (\Delta(l) - \Delta_0(l)) \\
&= \lim_{|l|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im} l|p} \left[\int_0^p \tilde{K}_{21}(p,t)\cos l t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{21}(p,t) h \sin l t dt \right] \\
&+ \int_0^p \tilde{K}_{22}(p,t) h \cos l t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{22}(p,t)\sin l t dt \Bigg] \\
&+ e^{-|\operatorname{Im} l|p}\, H\left[\int_0^p \tilde{K}_{11}(p,t)\cos l t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t) h \sin l t dt \right.\\
&\left. + \int_0^p \tilde{K}_{12}(p,t) h \cos l t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t)\sin l t dt \right] = 0
\end{aligned}$$

olur ([5] Lemma 1.3.1 'den).

Yani n 'nin yeterince büyük değerlerinde $l \in \Gamma_n$ için

$$\left|\Delta(l)-\Delta_0(l)\right| < \frac{C_d}{2} e^{|\mathrm{Im}\, l|p}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece n yeterince büyük doğal sayı olmak üzere $l \in \Gamma_n$ için

$$\left|\Delta_0(l)\right| > C_d e^{|\mathrm{Im}\, l|p} > \frac{C_d}{2} e^{|\mathrm{Im}\, l|p} > \left|\Delta(l)-\Delta_0(l)\right|$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu durumda Rouché teoremi uygulanırsa; n 'nin yeterince büyük değerlerinde Γ_n yörüngesinin iç kısmında $\Delta_0(l)$ ve $\Delta_0(l)+\{\Delta(l)-\Delta_0(l)\}=\Delta(l)$ fonksiyonlarının eşit sayıda sıfırları yani $(2n+1)$ sayıda $l_{-n}, \mathbf{K}, l_0, \mathbf{K}, l_n$ sıfırları vardır.

Benzer şekilde Rouché teoreminden yararlanarak; yeterince büyük n 'ler için $\left|l-l_n^0\right|<d\,|$ dairelerinin herbirinde $\Delta(l)$ fonksiyonunun yalnızca bir sıfırı olduğu gösterilir.

Bu durumda δ yeterince küçük pozitif sayı olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = 0$ olmak üzere $l_n = l_n^0 + e_n$ yazılabilir.

l_n sayıları, $\Delta(l)$ karakteristik fonksiyonunun kökleri olduğundan,

$$\begin{aligned}
\Delta(l_n) &= \Delta_0(l_n^0+e_n) + \int_0^p \tilde{K}_{21}(p,t)\cos(l_n^0+e_n)tdt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{21}(p,t)h\sin(l_n^0+e_n)tdt \\
&+ \int_0^p \tilde{K}_{22}(p,t)h\cos(l_n^0+e_n)tdt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{22}(p,t)\sin(l_n^0+e_n)tdt \\
&+ H\Bigg[\int_0^p \tilde{K}_{11}(p,t)\cos(l_n^0+e_n)tdt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t)h\sin(l_n^0+e_n)tdt \\
&+ \int_0^p \tilde{K}_{12}(p,t)h\cos(l_n^0+e_n)tdt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t)\sin(l_n^0+e_n)tdt\Bigg] = 0
\end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan,

$$\Delta_0(l_n^0+e_n) = \dot{\Delta}_0(l_n^0)e_n + o(e_n) = \left(\dot{\Delta}_0(l_n^0)+o(1)\right)e_n$$

dir. Eğer $\Delta_0(l_n^0+e_n)$ ifadesi $\Delta(l_n)$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\left(\dot{\Delta}_0(l_n^0)+o(1)\right)e_n + \int_0^p \tilde{K}_{21}(p,t)\cos(l_n^0+e_n)tdt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{21}(p,t)h\sin(l_n^0+e_n)tdt$$

$$+\int_0^p \tilde{K}_{22}(p,t)h\cos(l_n^0+e_n)tdt+\int_0^p \overset{\approx}{K}_{22}(p,t)\sin(l_n^0+e_n)tdt$$

$$+H\left[\int_0^p \tilde{K}_{11}(p,t)\cos(l_n^0+e_n)tdt+\int_0^p \overset{\approx}{K}_{11}(p,t)h\sin(l_n^0+e_n)tdt\right.$$

$$\left.+\int_0^p \tilde{K}_{12}(p,t)h\cos(l_n^0+e_n)tdt+\int_0^p \overset{\approx}{K}_{12}(p,t)\sin(l_n^0+e_n)tdt\right]=0$$

olur. $\Delta_0(l)$ fonksiyonu sinüs tipli olduğundan, tüm l_n^0 kökleri için N_1, N_2 sabitleri vardır öyle ki $0<N_1<\left|\dot{\Delta}_0(l_n^0)\right|<N_2<\infty,\ n=0,\pm1,\pm2,\mathbf{K}$ dir [4]. Ayrıca [5, 7] çalışmasından yararlanılırsa; $\sup_n\left|h_n\right|\le M$ olmak üzere

$$l_n^0=n+h_n$$

elde edilir.

O halde

$$e_n=-\frac{1}{\dot{\Delta}_0(l_n^0)+o(1)}\left[\int_0^p \tilde{K}_{21}(p,t)\cos(n+h_n+e_n)tdt+\int_0^p \overset{\approx}{K}_{21}(p,t)h\sin(n+h_n+e_n)tdt\right.$$

$$+\int_0^p \tilde{K}_{22}(p,t)h\cos(n+h_n+e_n)tdt+\int_0^p \overset{\approx}{K}_{22}(p,t)\sin(n+h_n+e_n)tdt$$

$$+H\left(\int_0^p \tilde{K}_{11}(p,t)\cos(n+h_n+e_n)tdt+\int_0^p \overset{\approx}{K}_{11}(p,t)h\sin(n+h_n+e_n)tdt\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^p \tilde{K}_{12}(p,t)h\cos(n+h_n+e_n)tdt+\int_0^p \overset{\approx}{K}_{12}(p,t)\sin(n+h_n+e_n)tdt\right)\right]$$

$$\tilde{K}_{11}(p,\cdot), \overset{\approx}{K}_{11}(p,\cdot), \tilde{K}_{12}(p,\cdot), \overset{\approx}{K}_{12}(p,\cdot), \tilde{K}_{21}(p,\cdot), \overset{\approx}{K}_{21}(p,\cdot), \tilde{K}_{22}(p,\cdot), \overset{\approx}{K}_{22}(p,\cdot)\in L_2(0,p)$$

olduğundan, (3.1)'den [5, sayfa 66-67]'ye göre $e_n\in \mathbf{l}_2$ olduğu elde edilir.

Lemma .3.2: L probleminin normalleştirici sayıları için $a_n=a_n^0+d_n$ asimptotik eşitliği geçerlidir. Burada $d_n\in \mathbf{l}_2$ dir.

İspat:

$$\Delta(l)=\Delta_0(l)+\int_0^p \tilde{K}_{21}(p,t)\cos l\,tdt+\int_0^p \overset{\approx}{K}_{21}(p,t)h\sin l\,tdt$$

$$+\int_0^p \tilde{K}_{22}(p,t)h\cos l\,tdt+\int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{22}(p,t)\sin l\,tdt$$

$$+H\left[\int_0^p \tilde{K}_{11}(p,t)\cos l\,tdt+\int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t)h\sin l\,tdt\right.$$

$$\left.+\int_0^p \tilde{K}_{12}(p,t)h\cos l\,tdt+\int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t)\sin l\,tdt\right]$$

olduğundan

$$\dot{\Delta}(l_n)=\dot{\Delta}_0(l_n)-\int_0^p t\tilde{K}_{21}(p,t)\sin l_n tdt+\int_0^p t\tilde{\tilde{K}}_{21}(p,t)h\cos l_n tdt$$

$$-\int_0^p t\tilde{K}_{22}(p,t)h\sin l_n tdt+\int_0^p t\tilde{\tilde{K}}_{22}(p,t)\cos l_n tdt$$

$$+H\left[-\int_0^p t\tilde{K}_{11}(p,t)\sin l_n tdt+\int_0^p t\tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t)h\cos l_n tdt\right.$$

$$\left.-\int_0^p t\tilde{K}_{12}(p,t)h\sin l_n tdt+\int_0^p t\tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t)\cos l_n tdt\right]$$

yazılır.

$$j_1(p,l_n)=j_{01}(p,l_n)+\int_0^p \tilde{K}_{11}(p,t)\cos l_n tdt+\int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t)h\sin l_n tdt$$

$$+\int_0^p \tilde{K}_{12}(p,t)h\cos l_n tdt+\int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t)\sin l_n tdt$$

ve $j_{01}(p,l_n)=j_{01}(p,l_n^0+e_n)=j_{01}(p,l_n^0)+\tilde{d}_n,\quad \tilde{d}_n\in \mathbf{l}_2$

olduğu açıktır.

$$\dot{\Delta}_0(l_n)=\dot{\Delta}_0(l_n^0+e_n)=\dot{\Delta}_0(l_n^0)+\ddot{\Delta}_0(l_n^0)e_n+\dddot{\Delta}_0(l_n^0)\frac{e_n^2}{2!}+\mathbf{L}$$

$$=\dot{\Delta}_0(l_n^0)+O(e_n)$$

ve

$$a_n=\dot{\Delta}(l_n)j_1(p,l_n)$$

olduğundan,

$$a_n = \dot{\Delta}_0(l_n) j_1(p, l_n) + \left[\int_0^p -t \tilde{K}_{21}(p,t) \sin l_n t dt + \int_0^p t \tilde{\tilde{K}}_{21}(p,t) h \cos l_n t dt \right.$$

$$- \int_0^p t \tilde{K}_{22}(p,t) h \sin l_n t dt + \int_0^p t \tilde{\tilde{K}}_{22}(p,t) \cos l_n t dt$$

$$+ H \left[- \int_0^p t \tilde{K}_{11}(p,t) \sin l_n t dt + \int_0^p t \tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t) h \cos l_n t dt \right.$$

$$\left. - \int_0^p t \tilde{K}_{12}(p,t) h \sin l_n t dt + \int_0^p t \tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t) \cos l_n t dt \right] j_1(p, l_n)$$

veya

$$a_n = [\dot{\Delta}_0(l_n) + O(e_n)] \left[j_{01}(p, l_n^0) + \tilde{d}_n + \int_0^p \tilde{K}_{11}(p,t) \cos l_n t dt \right.$$

$$\left. + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t) h \sin l_n t dt + \int_0^p \tilde{K}_{12}(p,t) h \cos l_n t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t) \sin l_n t dt \right]$$

$$\left[\int_0^p -t \tilde{K}_{21}(p,t) \sin l_n t dt + \int_0^p t \tilde{\tilde{K}}_{21}(p,t) h \cos l_n t dt - \int_0^p t \tilde{K}_{22}(p,t) h \sin l_n t dt \right.$$

$$+ \int_0^p t \tilde{\tilde{K}}_{22}(p,t) \cos l_n t dt + H \left(- \int_0^p t \tilde{K}_{11}(p,t) \sin l_n t dt + \int_0^p t \tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t) h \cos l_n t dt \right.$$

$$\left. \left. - \int_0^p t \tilde{K}_{12}(p,t) h \sin l_n t dt + \int_0^p t \tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t) \cos l_n t dt \right) \right] j_1(p, l_n)$$

eşitliği alınır. Buradan,

$$a_n = \dot{\Delta}_0(l_n^0) j_{01}(p, l_n^0) + \dot{\Delta}_0(l_n^0) \tilde{d}_n + \dot{\Delta}_0(l_n^0) \left[\int_0^p \tilde{K}_{11}(p,t) \cos l_n t dt \right.$$

$$\left. + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t) h \sin l_n t dt + \int_0^p \tilde{K}_{12}(p,t) h \cos l_n t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t) \sin l_n t dt \right]$$

$$+ O(e_n) j_{01}(p, l_n^0) + O(e_n) \tilde{d}_n + O(e_n) \left[\int_0^p \tilde{K}_{11}(p,t) \cos l_n t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t) h \sin l_n t dt \right.$$

$$\left. + \int_0^p \tilde{K}_{12}(p,t) h \cos l_n t dt + \int_0^p \tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t) \sin l_n t dt \right]$$

$$+ \left[\int_0^p -t \tilde{K}_{21}(p,t) \sin l_n t dt + \int_0^p t \tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t) h \cos l_n t dt \right.$$

$$-\int_0^p t\,\tilde{K}_{22}(p,t)h\sin l_n t\,dt+\int_0^p t\,\tilde{\tilde{K}}_{22}(p,t)\cos l_n t\,dt$$
$$+H\Bigg[-\int_0^p t\,\tilde{K}_{11}(p,t)\sin l_n t\,dt+\int_0^p t\,\tilde{\tilde{K}}_{11}(p,t)h\cos l_n t\,dt$$
$$-\int_0^p t\,\tilde{K}_{12}(p,t)h\sin l_n t\,dt+\int_0^p t\,\tilde{\tilde{K}}_{12}(p,t)\cos l_n t\,dt\Bigg]\Bigg] j_1(p,l_n)$$

olur. Böylece, Lemma 3.1 'de olduğu gibi

$$a_n=a_n^0+d_n,\ d_n\in \mathbf{l}_2$$

olduğu açıktır.

Kaynaklar

[1]. M. G. Gasymov, and B. M. Levitan, 1966, The Inverse Problem for the Dirac System, Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.

[2]. M. G. Gasymov, and T. T. Dzhabiev, 1975, On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator, Baku/ELM., pp. 46-71.

[3]. M. G. Gasymov, 1967, The Inverse Scattering Problem for a System of Dirac Equations of Order 2n, Soviet Physics Dokl. 11, 676-678.

[4]. B. Ya. Levin, Entire Functions, Moscow University, Moscow (1971).

[5]. V. A. Marchenko, Sturm-Liouville Operators and Their Applications, Naukova Dumka, Kiev (1977).

[6]. V. F. Zhdanovich, Formulas for the Zeros of Dirichlet Polynomials and Quasipolynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 135, No.8, 1046-1049 (1960).

[7]. M. G. Krein and B. Ya. Levin, On Entire Almost Periodic Functions of Exponential Type, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 64, No.3, 285-287 (1948).