

## LİNEER PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN VEKTÖREL ANALİZİ ve EKONOMİK YORUMLARI

Yılmaz YÜCEL \*

**ÖZET:** Bir kaynaklar bankasından çekilerek icra edilecek bir miktar faaliyet veya üretilecek bir miktar ürünler grubu verilmiş olsun. Eğer kaynakların miktarı veya kullanılacak yollar kısıtlanmış ise her bir faaliyeti icra etmek veya her bir ürünü verimli bir şekilde üretmek imkânsız olabilir. Bu bir tahsis problemidir ve yöneylem araştırması tahsis teknikleri faaliyetlere veya ürünlere kaynakların tahsis yollarını genel etkinliğe ilişkin bazı ölçümlerin optimizasyonunu sağlayacak şekilde belirler. Yöneylem araştırması işlerinde böylesine çözümleri bulmada en güçlü yöntem matematik programlama ve kullanılan matematik programlama tipi ise lineer programlamadır.

**Anahtar sözcükler :** Lineer programlama, matematik programlama , optimizasyon.

### VECTORAL ANALYSES OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS AND THEIR ECONOMICAL COMMENTRIES

**SUMMARY:** Given that a number of activities are to be performed a number of products are to be produced and that the group of activities or products draw on a common bank of resources : if the amount of resources or the ways in which they may be used are restricted, it may be impossible to perform each single activity or produce each single product in the most efficient way. This is allocation problem and operations research allocation techniques determine ways of allocating resources to activities or products so that some measure of overall efficiency is optimized. In operations research work, mathematical programming is the most powerful method of finding such solutions, and the most commonly used type of mathematical programming is linear programming.

**Keywords :** Linear programming, mathematical programming , optimization

Burada L.P.(Linear Programming) analitik-nümerik açıdan ele alınmış simpleks algoritması matris-vektör işlemleri ile elde edilmiştir. Uygulamada çok kullanılan bir yöneylem araştırması tahsis tekniği olarak lineer programlamanın ayrıntıları Tulunay, Gass , Walsh, Bazarra, Beale, Orchard-Hays, Taha, Hadley, Hillier and Lieberman da bulunabilir[8,5,9,2,1,4,7,3,6]. Burada kullanılan notasyonların bir kısmı Walsh 'da kullanılan notasyonlardır. Nümerik olarak analizi yapılan problem ise Hillier and Lieberman'ın Operations Research 2'nd Ed.' nin 17'inci sayfasından alınmış olup üzerine ekonomik yorum katılmaya çalışılmıştır. Okuyucunun konvekslik, temel uygun çözümler v.b.g. belirli bir bilgisinin olduğu varsayılmıştır.

Bir firma ürettiği  $x_1$  ve  $x_2$  tipindeki mamullerin üretimini programlamak istiyor. Mamullerin imalatında kullanılan 3 ayrı malzeme olup bunların stok seviyeleri ve her tip mamulün bir biriminde kullanılan miktarlar ve bunların sağlayacağı kârlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Buna göre maksimum kârı sağlayacak optimum imalat programını bulup ekonomik yorumunu yapınız?

| Malzeme      | Mamül Tipleri |       | Malzeme Stok Seviyesi |
|--------------|---------------|-------|-----------------------|
|              | $x_1$         | $x_2$ |                       |
| A            | 1             | 1     | 50                    |
| B            | 1             | 2     | 80                    |
| C            | 3             | 2     | 140                   |
| Birim Kârlar | 4             | 3     |                       |

\* Yrd. Doç. Dr. Trakya Ün. Müh-Mim. Fak. Bilg. Müh. Böl. Edirne

$$\begin{aligned}
Z = \text{Max } f(x) &= 4x_1 + 3x_2 \\
x_1 + x_2 &\leq 50 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 80 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 140 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Burada Problemimiz

$$\begin{aligned}
Z = \text{Max } f(x) &= \vec{C} \vec{x} \\
A \vec{x} &= \vec{P}_0 \\
\vec{x} &\geq \vec{0}
\end{aligned}$$

tipinde bir problem olup

$$\vec{C} = [4, 3] \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{P}_0 = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Burada Rank (A)=m olup A da m sayıda lineer bağımsız kolon vektörü bulunmaktadır. Bu lineer bağımsız kolon vektörlerinden bir **B** temeli oluşturalım. **B** temelindeki her kolonun indisi A daki orjinal indisini muhafaza etsin ve **B** deki sıraları önemli olmasın. Bu indislerin oluşturduğu seti

$$I = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m\}$$

ile gösterelim. O halde

$$B = (\vec{a}_{\rho_1}, \vec{a}_{\rho_2}, \dots, \vec{a}_{\rho_m}) = [\vec{a}_\rho]$$

dir. **B** temelini vektörlerine karşı gelen değişkenlere temel değişkenler  $\vec{X}_B = [\vec{x}_\rho]$ ,  $\rho \in I$  denir. A daki kolon vektörlerinin indisleri  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  setini meydana getirip  $I \subset N$  dir. Temel vektörlerin dışındaki  $(n-m)$  sayıdaki vektörler  $\vec{a}_j$ ,  $j \in J = N - I$  ve bu temel dışı vektörlerin oluşturduğu matrisi

**G** ile gösterelim. **G** matrisine karşılık gelen değişkenleri ise  $\vec{X}_G = [\vec{x}_j]$ ,  $j \in J$  ile gösterelim. Bu değişkenlere aynı zamanda ikincil değişkenler de denir. [2]

Gevşek değişkenler eklenmesiyle oluşacak temel ve temel olmayan matrisler şöyle olacaktır.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B^{-1}G = Y = (\vec{y}_j) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B \vec{x}_B + G \vec{x}_G = \vec{P}_0 \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix}$$

Her iki tarafı  $B^{-1}$  ile çarparsak

$$\vec{x}_B + B^{-1}G \vec{x}_G = B^{-1} \vec{P}_0 \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix}$$

$\vec{G}$  ye ait  $\vec{a}_j$  kolon vektörlerini  $B$  temelini oluşturan vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazarsak

$$\vec{a}_j = \sum_{\rho \in I} y_{\rho j} \vec{a}_{\rho} = B \vec{y}_j \quad (3)$$

$$1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olarak yazabiliriz.

(1) de  $B \vec{x}_B + G \vec{x}_G = \vec{P}_0$  de  $\vec{x}_G = \vec{0}$  alınırsa  $B \vec{x}_B = \vec{P}_0$  veya  $\vec{x}_B = B^{-1} \vec{P}_0$  temel çözüm olup (1) i

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \vec{x}_B = B^{-1} \vec{P}_0 \text{ 'ı } \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \text{ olarak da yazabiliriz.}$$

$$\vec{x}_B = B^{-1} \vec{P}_0 = \vec{\beta} \text{ olur ki } \vec{\beta} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \text{ olup } \vec{x}_B = \vec{\beta} \text{ başlangıç temel programıdır.}$$

$$\text{veya } \vec{x}_B + \sum_{j \in J} x_j \vec{y}_j = \vec{\beta} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \text{ olarak ifade edip}$$

$x_1 = x_2 = 0$  alırsak  $x_3 = 50$   $x_4 = 80$   $x_5 = 140$  olarak buluruz.

Aynı sonucu

$$x_{\rho} + \sum_{j \in J} x_j y_j = \beta_{\rho} \quad , \rho \in I \quad (5)$$

şeklinde formüle edersek

$$x_3 + 1x_1 + 1x_2 = 50$$

$$x_4 + 1x_1 + 2x_2 = 80$$

$$x_5 + 3x_1 + 2x_2 = 140$$

olup  $x_1 = x_2 = 0$  alırsak  $x_3 = 50$   $x_4 = 80$   $x_5 = 140$  olarak buluruz.

Başlangıç temel programı için optimize edilecek fonksiyonun değeri

$$\vec{Z} = \vec{C}_B \vec{x}_B = \vec{C}_B (B^{-1} \vec{P}_0) = \vec{C}_B \vec{\beta} \quad (6)$$

olup bütün ikincil değişkenlerin değeri sıfırdır. Ve

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} = 0$$

olarak bulunur.

$$\vec{C}_B \vec{y}_j = z_j \quad (7)$$

olup

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

olur.

Temele sokulacak vektör için yani  $\vec{a}_k$  vektörü için

$$|z_k - c_k| = \text{Max} \{ |z_j - c_j| \} \quad \forall j \text{ için} \quad (8)$$

şartı gerekli olup  $z_1 - c_1 = 0 - 4 = -4$  ve  $z_2 - c_2 = 0 - 3 = -3$

$$|z_k - c_k| = \text{Max} \{ |z_j - c_j| \} = |0 - 4| = 4$$

yani  $G$  nin 1 inci kolon vektörü temele sokulacaktır.

Çıkış kriterinin ise

$$\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \text{Min}_{\rho | y_{\rho k} > 0} \left( \frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}} \right) \quad (9)$$

ile belirlenmesi yaygındır [8]. Burada  $\beta_\rho$  lar 50,80,140 ve  $y_{\rho k}$  lar 1,3,3 olup  $\left( \frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}} \right)$  lar ise

$$\frac{50}{1}, \frac{80}{1}, \frac{140}{3} \text{ olup } \text{Min} \left( \frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}} \right) = \frac{140}{3} \text{ yani } B \text{ nin üçüncü kolon vektörü } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ temelden çıkacaktır.}$$

Bunu temelden çıkacak vektör için (10) ile

$$\vec{a}_l = \frac{1}{y_{lk}} \vec{a}_k - \sum_{\substack{\rho \in I \\ \rho \neq l}} \frac{y_{\rho k}}{y_{lk}} \vec{a}_\rho \quad (10)$$

ile de gösterebiliriz. Burada  $\vec{a}_l$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Burada  $B$  temelden 3 üncü kolon vektör çekilmekte ve  $G$  matrisinden 1 'nci kolon vektör  $B$  ye sokulmaktadır.

Böylece  $l=3$   $k=1$  dir.  $y_{lk}$  ise  $y_{lk} = y_{31} = 3$  dür.  $y_{\rho 11} = 1, y_{\rho 21} = 1, y_{\rho 31} = 3$  olup  $\rho \neq l$  olması gerektiğinden  $l=3$  olduğuna göre 1 'inci kolondaki 3 'üncü satır elemanı  $y_{\rho 31} = 1$  kullanılmaz.

$\vec{a}_k$  vektörünü temele sokup  $\vec{a}_l$  vektörünü çıkardığımız zaman da temel çözüm yine aynı kalacaktır. (11) ile

$$\sum_{\substack{\rho \in I \\ \rho \neq l}} (\beta_\rho - \beta_l \frac{y_{\rho k}}{y_{lk}}) \vec{a}_\rho + \frac{\beta_l}{y_{lk}} \vec{a}_k = \vec{P}_0 \quad (11)$$

$$\left\{ (50 - 140 \frac{1}{3}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (80 - 140 \frac{1}{3}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (140 - 140 \frac{3}{3}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} + \frac{140}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix}$$

olarak buluruz.

Temelden  $\vec{a}_l$  'yi çıkarıp  $\vec{a}_k$  'yı soktuğumuzda

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B^{-1}G = Y = (\vec{y}_j) = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 4/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

(3) ile  $G$  ye ait  $\vec{a}_j$  kolon vektörlerini  $B$  temelini oluşturan vektörlerin lineer kombinasyonu olarak

$$\vec{a}_j = \sum_{\rho \in I} y_{\rho j} \vec{a}_\rho = B \vec{y}_j \quad -1/3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1/3) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1/3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$1/3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4/3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2/3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{olarak yazabiliriz.}$$

$$(1) \text{ ile } B \vec{x}_B + G \vec{x}_G = \vec{P}_0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \begin{aligned} x_3 + x_1 + x_5 &= 50 \\ x_4 + x_1 + 2x_5 &= 80 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_5 &= 140 \end{aligned}$$

olup

$x_2$  ve  $x_5$  ikincil değişkenlerinin değeri sıfır alınırsa  $x_1 = 140/3$   $x_4 = 100/3$   $x_3 = 10/3$  olarak buluruz.

$$\vec{x}_B = B^{-1} \vec{P}_0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 100/3 \\ 140/3 \end{bmatrix} \quad \text{ve } x_3 = 10/3 \quad x_4 = 100/3 \quad \text{ve } x_1 = 140/3 \text{ olur.}$$

(6) ile yeni

$$\vec{Z}' = \vec{C}_B \vec{x}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10/3 \\ 100/3 \\ 140/3 \end{bmatrix} = \frac{560}{3}$$

olur.

$$\vec{z}_j = \vec{C}_B \vec{y}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 4/3 & -1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$(c_k - z_k)x_k = \bar{Z}' - \bar{Z} = (4 - 0)140/3 = 560/3 - 0$$

$$Z' = \bar{Z} + (c_k - z_k)\beta'_k \quad 560/3 = 0 + (4 - 0)140/3$$

olur ki  $\vec{a}_k$  vektörü

$$|z_k - c_k| = \text{Max}\{|z_j - c_j|\} (3 - 8/3) = -1/3$$

olup  $\mathbf{G}$  nin ikinci kolon vektörü temele girecektir.

$$\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \text{Min} \left( \frac{\beta_p}{y_{pk}} \right)_{p|y_{pk} > 0}$$

olup  $\beta_p$  ' lar 10/3, 100/3, 140/3 ve  $y_{pk}$  ' lar 1/3, 4/3, 2/3 olup

$$\text{Min} \left( \frac{\beta_p}{y_{pk}} \right) = \frac{10/3}{1/3} = 10$$

yani  $\mathbf{B}$  'nin 1 inci kolon vektörü olacaktır.

Burada  $\mathbf{B}$  temelinden 1 inci kolon vektör çekilmekte ve  $\mathbf{G}$  matrisinden 2 inci kolon vektör  $\mathbf{B}$  ye sokulmaktadır.

Böylece  $l=1$   $k=2$  dir.  $y_{lk}$  ise  $y_{lk} = y_{12} = 1/3$  dir.  $y_{p12} = 1, y_{p22} = 2, y_{p23} = 2$  olup  $p \neq l$  olması gerektiğinden  $l=1$  olduğuna göre 2 'inci kolondaki 1 'inci satır elemanı  $y_{p12} = 1$  kullanılmaz.

$$\vec{a}_l = \frac{1}{y_{lk}} \vec{a}_k - \sum_{\substack{p \in I \\ p \neq l}} \frac{y_{pk}}{y_{lk}} \vec{a}_p$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1/3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \left\{ \frac{4/3}{1/3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2/3}{1/3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$(11) \text{ ile } \left\{ \left( 100/3 - 10/3 \frac{4/3}{1/3} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left( 140/3 - 10/3 \frac{2/3}{1/3} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} + \frac{10/3}{1/3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix}$$

$\vec{a}_k$  vektörünü temele sokup  $\vec{a}_l$  vektörünü çıkardığımız zaman

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1}G = Y = (\vec{y}_j) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_j = \sum_{p \in I} y_{pj} \vec{a}_p = B \vec{y}_j$$

$$-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak yazabiliriz.

$$(1) \text{ ile } B \vec{x}_B + G \vec{x}_G = \vec{P}_0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix}$$

veya

$$x_2 + x_1 + x_5 = 50$$

$$2x_2 + x_4 + x_1 = 80 \quad \text{olur.}$$

$$2x_2 + 3x_1 + x_3 = 140$$

$$\vec{x}_B = B^{-1} \vec{P}_0 \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$z_j = \vec{C}_B \vec{y}_j = [3 \quad 0 \quad 4] \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = [1 \quad 1]$$

$(z_j - c_j)$  ler ise  $(1-0)$  ve  $(1-0)$  pozitif olduklarından optimum çözüm setine ulaşılmıştır.

$$\bar{Z} = \vec{C}_B \vec{x}_B = [3 \quad 0 \quad 4] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = [3 \quad 0 \quad 4] \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \right\} = [3 \quad 0 \quad 4] \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} = 190$$

olarak optimum çözüme ulaşılır.  $x_2 = 10$   $x_1 = 40$  birim tahsis edilmelidir.

#### **Ekonomik Yorum :**

İlk uygun temel çözümde  $x_3 = 50$   $x_4 = 80$  ve  $x_5 = 140$  buluruz ki bu firmada hiç bir mamül üretilmediğini gösterir. Onun için  $x_3, x_4, x_5$  çözüm değerleri A,B ve C malzemelerinin henüz kullanılmadığını gösterir.  $\vec{y}_j$  vektörleri  $j$  mamulünden belli bir miktar üretmek için lüzumlu kaynakların miktarını ,aynı zamanda kaynaklarda meydana gelecek azalmayı gösterir.

İlk çözümde  $\vec{y}_1$  vektörü  $x_1$  'in üretimini bir birim arttırmakla  $x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 3$  birim azalacağını gösterir. Benzer analiz  $\vec{y}_2$  için de yapılabilir.  $Max\{|Z_j - c_j|\} = |z_1 - c_1| = 4 > |z_2 - c_2|$  olduğu yani ekonomik açıdan sağladığı kazanç  $x_2$  'ninkinden daha yüksek olduğu için  $x_1$  'i üretim karışımına sokarak yani lineer programlama diliyle  $\vec{a}_1$  temele sokularak ilk çözüm düzeltilir.

$x_1$  'i temele sokulduktan sonra (9) ile hangi vektörü temelden çıkaracağımızı buluruz ki  $\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \min_{p|y_{pk}>0} \left( \frac{\beta_p}{y_{pk}} \right) = \frac{140}{3}$  olduğundan temeldeki 3'üncü kolon vektörüdür. Temeldeki  $x_1$  'in

çözüm değerinin niçin  $140/3$  olduğunu şöyle açıklayabiliriz. Bir birim  $x_1$  üretmek için 1 birim A 1 birim B ve 3 birim C gereklidir. A,B ve C nin kullanılmayan miktarları ise sırasıyla 50,80 ve 140 olup (9) ile verilen oranlar cümlesi içinde en küçük oran  $x_1$  in üretilebilecek maksimum miktarını gösterir. Eğer daha fazla  $x_1$  üretmeye kalkarsak C kaynağının buna yetmediğini görürüz.

**II uygun taban çözüm :** Burada çözüm değerleri  $x_3 = 10/3$   $x_4 = 100/3$  ve  $x_6 = 140/3$  olup bunu şöyle yorumlayabiliriz. Eğer sadece  $x_1$  üretilirse üretililecek maksimum miktar 140/3 birimdir. Bu durumda 10/3 birim A ve 100/3 birim B malzemesi kullanılmayacaktır. Çünkü eldeki 50 birim A malzemesinden sadece 140/3 birimi  $x_1$  üretimi için kullanıldı. Aynı şekilde 80 birim B malzemesinden sadece 140/3 birimi kullanıldı ve 100/3 birimi kaldı. Bu çözüm için amaç fonksiyonunun değeri 560/3 olup ilk çözüme göre 560/3 TL lik artış olmuştur.

Şimdi **II** çözümün optimum olup olmadığını inceleyelim. Burada  $y_2$   $x_2$  den bir birim üretmekle  $x_1$  'in 2/3  $x_3$  'ün 1/3  $x_4$  'ün 4/3 birim azalacağını gösterir. Halihazırda **II** çözüme göre C malzemesinin tamamı kullanılmış durumdadır.

Eğer bir birim  $x_2$  yi üretim karışımına sokarak yeni bir çözüm planlarsak o zaman hepsi  $x_1$  üretiminde kullanılan C malzemesinin bir kısmını serbest bırakmak için planlanan  $x_1$  üretiminde indirim yapılması gerekir. Üretim karışımına ilave ettiğimiz her  $x_2$  birimi için  $x_1$  mamulünü 2/3 birim azaltmamız gerekir. Çünkü  $x_1$  için 3 birim C lazım iken  $x_2$  için 2 birim C lazımdır.

Şimdi  $x_2$  nin bir birim artırılmasının planlandığını varsayalım. Bu  $x_1$  'in 2/3 birim azalacağını gösterir.  $x_1$  in 2/3 birim azalması aynı zamanda A ve B malzemelerini bırakacaktır. Bir birim  $x_2$  'nin 1 birim A ve 2 birim B malzemesine ihtiyacı olduğu bilinmektedir. Öte yandan halihazırda  $x_1$  'in azalmasıyla A ve B malzemelerinin bir kısmı bırakılmış durumdadır. O halde  $x_2$  'nin her birimi için

bu kaynaklardan lüzumlu miktarlar A için  $1-2/3=1/3$  B için  $2-2/3=4/3$  birimdir. Bu iki rakam  $y_2$  nin  $y_{p21}$  ve  $y_{p22}$  elemanlarına karşı gelir.

Yukarda  $c_1 y_{23} = 8/3$  TL  $x_2$  üretimini 2/3 birim düşürdüğümüz zaman firmanın kaybedeceği kazanç miktarını gösterir. Bir birim  $x_2$  için 1/3 birim A ve 4/3 birim B malzemesinden kullanılmış olmasına rağmen bunlar için  $c_1 y_{12}$  ile  $x_2$  'nin kârı olan  $c_2$  mukayese edilir ki burada  $c_1 > c_1 y_{12}$  dir. Buna göre  $x_2$  'nin üretime sokulması kârı daha da arttıracığı için biraz daha  $x_2$  birimi ihtiva eden bir çözüm düzenlenerek ikinci çözüm düzeltilir. (9) ile temelden çıkacak vektörü hesaplırsak  $(10/3)/(1/3)=10$  buluruz ki bu temeldeki 1'inci kolon vektörü olup yeni çözüm değerinin 10 birim olacağını gösterir. Çünkü  $x_2$  üretimi sıfırdan 10 birime çıktığı zaman A malzemesinin tamamı tükenektir. Böylece  $x_2$  maksimum 10 birimdir.

**III uygun taban çözüm :** Burada  $x_1 = 40$   $x_2 = 10$  ve  $x_3 = 20$  elde edilir.  $x_2$  üretiminin sıfırdan 10 birime çıkarılması sonucunda  $x_1$  in üretimi 140/3 birimden 40 birime düşer. Net düşüş 20/3 birim veya  $x_2$  'nin her ünitesi için 2/3 birimdir. Eğer  $x_2$  üretimi 10 dan 20 birime çıkarılırsa  $x_1$  üretimi de 40 dan 30 birime düşer, net düşüş 10 birimdir. Bunun sebebi  $x_2$  den 10 birim üretildiği zaman A malzemesinin tamamı kullanılmış olur, ilave bir birim  $x_2$  üretmek için lazım olan A malzemesini elde etmenin tek yolu  $x_1$  üretimini tam bir birim düşürmektir. Onun için teknik açıdan uygun olmasına rağmen  $x_1$  'in birim kârı  $x_2$  den yüksek olmasına rağmen  $x_1$  üretimini düşürerek yapılan 10 birimlik ilave  $x_2$  üretimi uygun görülmez. Simpleks kuralları bu tip hataları önleyici niteliktedir.

Şimdi  $y_3$   $x_3$  'ün 1 birim artırılması halinde  $x_1$  inde 2 birim artırılması  $x_2$  'nin 3 birim azaltılması ve  $x_4$  'ün 4 birim artırılması gerektiğini gösterir. Daha açık bir ifade ile  $x_3$  ve  $x_4$  A ve B nin kullanılmayan miktarlarını gösteriyordu. A kaynağından bir birimin kullanılmadan kalmasını istediğimizi varsayalım. Bu ancak  $x_2$  üretiminin 3 birim azalmasına B kaynağından da 4 birim kalmasına razı olursak gerçekleşebilir. Başka bir ifade ile  $x_2$  üretimini 3 birim azalttığımız zaman bu durumda üretim işleminde A, B ve C kaynaklarının sırasıyla 2, 6 ve 6 birimi kullanılacak , geriye kalan 1 birim A ve 4 birim B malzemesi kalacaktır.



Yukardaki amaç A malzemesinden 1 birimin kullanılmadan kalmasının sağlanıp sağlanamayacağı idi. Niçin  $x_1$  üretimini bir birim azaltmakla bu amaca ulaşmıyoruz. Şüphesiz Bu hareket ilave bir birim A malzemesini kullanılmadan bırakacaktır.

Diğer taraftan önceki analizde amaç A malzemesinin bir birimini kullanılmadan bırakmak için ne yapılmasının gerektiğini araştırmaktan bir dereceye kadar daha karmaşıktır. Yukarda yaptığımız işlemde asıl sebep üçüncü çözümün düzeltilip düzeltilmeyeceği idi. Onun için değerlendirilmek istenen herhangi yeni bir üretim planı temel olmayan  $x_5$  değişkeninin çözüm değerini değiştirmemelidir. Aksi halde yeni plan bir temel çözümü ifade etmeyecektir.  $x_1$  'i bir birim azaltırsak  $x_2$  'yi 1 birim arttırmalıyız ve bu durumda  $x_4$  ve  $x_5$  temele girecektir. Bunu problemin matematiksel formuna  $x_1 \leq 39$  şartını ilave ederek de gösterebiliriz ki çözülen başka bir problem olmuştur.

Son çözümün optimum olup olmadığını araştırmak için de temel olmayan  $x_3$  ve  $x_5$  değişkenlerine ait  $Z_j - c_j$  leri incelemeliyiz ki bunlar  $Z_3 - c_3 = 1$  ve  $Z_5 - c_5 = 1$  dir. Buna göre  $x_3$  'ü bir birim arttırsak net kâr 1 TL azalacaktır. Çünkü  $x_3$  'ü 1 birim arttırmak için birim kârı 4 TL olan  $x_1$  i 2 birim arttırmak ve aynı zamanda birim kârı 2 TL olan  $x_2$  'yi 3 birim azaltmak gerekecektir. . Aynı şekilde  $x_5$  eğer 1 birim arttırırsa net kâr 1TL azalacaktır. Neticede son çözüm optimumdur.

Simpleks çözüm tekniğini anlattıktan sonra hem maksimizasyon hem de minimizasyon için geçerli olabilecek şekilde simpleks algoritmasını şöyle özetleyebiliriz.

1-  $\vec{x}_B = B^{-1} \vec{P}_0 = \vec{\beta}$  *Başlangıç temel programını belirle*

2-  $B^{-1}G = Y' = (y'_j)$  ,  $j \in J$  *matrisini ve  $Z_j - c_j$   $j \in J$  miktarını hesapla*

3-  $Z_j - c_j$  ,  $j \in J$  *yi gözden geçir.*

*a-Maksimizasyon problemi için her  $j \in J$  için  $(Z_j - c_j) \geq 0$  ise problem çözülmüştür. Hesaplama durur.*

*b-Minimizasyon problemi için her  $j \in J$  için  $(Z_j - c_j) \leq 0$  ise problem çözülmüştür. Hesaplama durur.*

*Maksimizasyon problemi için  $Z_j - c_j < 0$*

*Minimizasyon problemi için  $Z_j - c_j > 0$*

*olan j indislerini  $J^*$  ile göster.*

4-  $y_j$  ,  $j \in J^*$  *gözden geçir.*

*Eğer  $j \in J^*$  için  $y_j \leq 0$  yani bütün  $y_{\rho j}$  ler pozitif değilse sonlu sayıda bir maksimum (minimum) program yoktur. Hesaplama durur.*

*Eğer değilse giriş kriteri*

$$|z_k - c_k| = \max_{j \in J^*} \{z_j - c_j\} \text{ den } k \text{ 'yı}$$

$$\text{ve çıkış kriteri } \frac{\beta_l}{y_{lk}} = \min_{\rho | y_{\rho k} > 0} \left( \frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}} \right) \text{ den } l' \text{ yi belirle}$$

5-  $\vec{a}_k$  yerine  $\vec{a}_1$  koymakla  $B$  den elde edilen  $B'$  temeli yardımıyla yeni  $\vec{x}'_B$  temel programı optimize edilecek fonksiyonun yeni  $\vec{Z}'$  değerini yeni  $Y'$  ve yeni  $(z'_j - c_j)$  'leri hesapla (3) üçüncü adıma git.

Bu yazdığımız algoritmaya göre simpleks tablo çözümü aşağıdaki gibidir.

| $\vec{C}_B$ | $\vec{x}_B$ | $c_j$         | 4     | 3     | 0     | 0     | 0     |
|-------------|-------------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|             |             | $\vec{\beta}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| 0           | $x_3$       | 50            | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     |
| 0           | $x_4$       | 80            | 1     | 2     | 0     | 1     | 0     |
| 0           | $x_5$       | 140           | 3     | 2     | 0     | 0     | 1     |
|             | $Z_j$       | 0             | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
|             | $Z_j - c_j$ | -             | -4    | -3    | 0     | 0     | 0     |

|   |             |       |   |      |   |   |      |
|---|-------------|-------|---|------|---|---|------|
| 0 | $x_3$       | 10/3  | 0 | 1/3  | 1 | 0 | -1/3 |
| 0 | $x_4$       | 100/3 | 0 | 4/3  | 0 | 1 | -1/3 |
| 4 | $x_1$       | 140/3 | 1 | 2/3  | 0 | 0 | 1/3  |
|   | $Z_j$       | 560/3 | 4 | 8/3  | 0 | 0 | 4/3  |
|   | $Z_j - c_j$ | -     | 0 | -1/3 | 0 | 0 | 4/3  |

|   |             |     |   |   |    |   |    |
|---|-------------|-----|---|---|----|---|----|
| 3 | $x_2$       | 10  | 0 | 1 | 3  | 0 | -1 |
| 0 | $x_4$       | 20  | 0 | 0 | -4 | 1 | 1  |
| 4 | $x_1$       | 40  | 1 | 0 | -2 | 0 | 1  |
|   | $Z_j$       | 190 | 4 | 3 | 1  | 0 | 1  |
|   | $Z_j - c_j$ | -   | 0 | 0 | 1  | 0 | 1  |

## KAYNAKLAR

- 1-Beale E.M.L Mathematical Programming in Practice, Pitman, 1968.
- 2-Bazarrar M. –Jarvis J. J.– Serali H. D. Linear programming And Network Flows, John Wiley & Sons 1990.
- 3-Hadley G. Linear Programming, Addison-Wesley, 1973.
- 4-Orchhard-Hays W. Advanced Linear Programming ,McGraw-Hill, 1968.
- 5-Gass S. I. Linear Programming Methods & Applications 4'th Ed., 1975 McGraw Hill-Kogakusha, Tokyo.
- 6-Hillier F. S. – Lieberman G. J. Operations Research 2'nd Ed., Holden-Day Inc., 1974, San Francisco.
- 7-Taha H. A. Operations Research An Introduction 6'th Ed., Prentice-Hall Inc. 1997, N.J.
- 8-Tulunay Y. Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları, İst. Ün. İşletme Fak Yay. No:108, İstanbul, 1980.

9-Walsh G.R. An Introduction to Linear Programming Holt, Rinehart and Winston, 1971.