Yönetim, Yıl: 18, Sayı: 56, Şubat 2007

PORTFÖY SEÇİMİNDE MARKOWITZ MODELİ İÇİN YENİ BİR GENETİK ALGORİTMA YAKLAŞIMI

Arş. Grv. Timur KESKİNTÜRK
İstanbul Üniversitesi - İşletme Fakültesi
Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı

Modern finansın en önemli araştırma alanlarından biri olarak kabul edilen portföy seçimi, belirli beklenti ve kısıtlar altında, menkul kıymetler havuzundan en uygun olan kümenin oluşturulması kararıdır. Verilerin çokluğu ve karmaşıklığı, karar vericinin kısıtları gibi nedenlerle çözümü zor bir problemdir. Geleneksel ve modern portföy yönetimi modelleri, farklı kısıtlar ve çözüm teknikleri kullanılarak çözülmeye çalışılmıştır. Modern portföy yönetiminin kurucusu sayılan Markowitz' in kendi adıyla anılan yöntemi, portföy seçimine yeni bir boyut kazandırmıştır. Risk, getiri gibi sayısal anlam kazanmış ve ölçülebilir olmuştur. Markowitz ortalama-varyans metodu olarak da tanımlanabilecek model hakkında bir çok çalışma yapılmıştır.Modele eklentiler yapılmış ve çözüm süreci farklı algoritmalarla iyileştirilmeye çalışılmıştır. Bu makalede, portföy seçiminde Markowitz modeli için yeni bir genetik algoritma yaklaşımı denenmiş ve sonuçlar tartışılmıştır. Ayrıca modelin geliştirildiği Matlab 7.0 programındaki kodlara da yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Portföy seçimi, Markowitz, Genetik Algoritma.

A NEW GENETIC ALGORITHM APPROCH FOR MARKOWITZ MODEL OF PORTFOLIO SELECTION

Portfolio selection assumed as one of the most important research areas in modern finance, is the decision of forming the optimum portfolio from a list of securities under certain expectations and constraints. Solution of this kind of problem is difficult on account of large number of complex data and constraints of decision making. Conventional and modern portfolio management models were tried to be solved with various solution techniques and under different constraints. The method mentioned with the name of Markowitz who is the founder of modern portfolio management, provided a new dimension to portfolio selection. Risk, like return, gained a quantitative meaning and became measurable. Several studies were made on the model which can also be defined as Markowitz mean-variance method. Additions are made to the model and the solution process is tried to be improved by different algortihms. In this article, a new genetic algorithm approach for Markowitz model of portfolio selection is attempted and the solutions are discussed. Furthermore, the codes of Matlab 7.0 programme where the model is evolved are also mentioned.

Key Words: Portfolio selection, Markowitz, Genetic Algorithm.

GİRİŞ

Portföy yönetimi, yatırımcıların elindeki fonların mevcut menkul kıymetler arasında minimum risk ve maksimum karlılığı sağlayacak şekilde dağıtılmasıdır. Portföy yönetimi, yatırımcının sahip olduğu toplam menkul kıymetlerin seçimi ve her birinden ne miktarda portföye dahil edileceği konusundaki belirli yöntem ve teknikleri kapsamaktadır. Portföy yönetiminin amacı, yatırımcıların ihtiyaçlarına göre portföye çeşitli menkul kıymetleri almak ve yatırım amaçlarına uygun olarak portföyü yönetmektir (Ceylan ve Korkmaz , 2004, s.423).

Portföy seçimi modelleri içerisinde Markowitz ortalama-varyans modeli, bilinen en iyi finansal modellerdendir. Temel yapı, beklenen getiri seviyesinde, en düşük riskli portföy kompozisyonunun oluşturulmasıdır (Markowitz, 1952). Amaç belirli bir getiri seviyesinde en düşük riskli portföyü oluşturmak olabileceği gibi, belirli bir risk seviyesinde en yüksek getiriyi veren portföyü oluşturmak da olabilir. Markowitz, riski getirinin varyansı olarak tanımlamış böylece onun matematiksel bir olgu olarak ele alınmasına olanak sağlamıştır. Ayrıca geleneksel portföy yönetimindeki menkul kıymet sayısının arttırılmasıyla riskin azaltılabileceği teorisi de Markowitz' in ortalama-varyans modeliyle birlikte değişmiştir. Markowitz' in teorisine göre, menkul değer sayısının arttırılmasıyla birlikte, portföy içerisindeki menkul kıymetler arasındaki korelasyonun yön ve derecesi de riskin düşürülmesinde etkilidir.

Yatırımcıların katlanabileceği risk seviyeleri farklı olacağından Markowitz her getiri oranı için minimum risk düzeylerini veren bir küme oluşturmuştur. Belirli bir getiri düzeyi için, bu "etkin küme" içinde bulunan bir portföy aynı getiriye sahip diğer bütün portföylerden daha az riskli olacaktır. Bazen bu etkin portföylerin geometrik yerinin oluşturduğu etkin kümeye mümkün portföyler kümesinin sınırında olmasından dolayı "etkin sınır" da denilmektedir (Özdemir, 1983, s.167).

Markowitz modeli, geliştirildiğinden bu yana bir çok çalışmaya konu olmuş, yapılan birtakım eklentilerle etkinliği arttırılmaya çalışılmıştır. Çalışmanın ikinci bölümünde kısıtlanmamış ve kısıtlanmış Markowitz ortalama-varyans modelleri anlatılacaktır. Modellerin matematiksel modellerin gösterimi ve literatürde bu modellere yönelik geliştirilmiş olan çözüm önerilerine de değinilecektir.

Üçüncü bölümde ilk olarak genetik algoritma (GA) nın çalışma prensiplerinden ve işleyiş sürecinden, sonra Markowitz ortalama-varyans modelinin çözümünde genetik algoritmanın kullanımından bahsedilecektir.

Son bölümde, geliştirilen GA modelinin etkinliğini araştırmaya yönelik uygulamalara yer verilecektir.

1.MARKOWITZ ORTALAMA-VARYANS MODELİ

1.1 Kısıtlanmamış Modeller

Modeldeki iki temel faktör risk (varyans) ve getiridir. Markowitz' in temel ortalama-varyans modelinde belirli bir getiri seviyesinde portföy riski minimize edilmeye çalışılmaktadır. Farklı getiri beklentilerine yönelik olarak, risk seviyesi de değişmektedir. Amaç bunun minimum düzeyde tutulmasıdır. Buna göre kısıtsız optimizasyon problemi

N **Menkul kıymet sayısı,**

μ_i ***i* menkul kıymetinin beklenen getirisi (*i*=1,…, N),**

σ_{ij} ***i* ve *j* menkul kıymetleri arasındaki kovaryans (*i*=1,…, N; *j*=1,…, N),**

R^* **Portföyün beklenen getirisi,**

w_i ***i* menkul kıymetinin portföy içindeki oranı (*i*=1,…, N) olmak üzere;**

Minimum $$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \qquad (1)$$

kısıtlar;

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i = R^* \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \qquad (3)$$

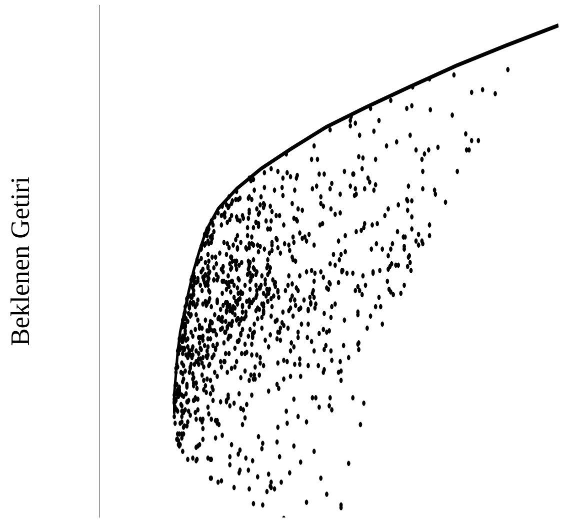
$$0 \le w_i \le 1, \quad i = 1, \ldots, N \qquad (4)$$

Denklem (1)' de minimize edilmek istenen portföyün toplam varyansı (risk), Denklem (2)' de portföyün beklenen getirisi ve Denklem (3)' te menkul kıymetlerin oranları toplamı (1) hesaplanmaktadır.

Menkul kıymetler arasındaki kovaryans değerleri (σ_{ij}), i ve j menkul kıymetleri arasındaki korelasyon değerleri p_{ij} ($-1 \leq p_{ij} \leq +1$) ve menkul kıymetlerin standart sapmaları s_i, s_j yardımıyla hesaplanmaktadır: $\sigma_{ij} = p_{ij} s_i s_j$.

Denklem (2) deki portföyün beklenen getiri değerleri ve bu değerlere karşılık bulunan minimum varyanslı noktalar ile etkin sınır çizilebilir (Şekil 1).

Şekil 1 Etkin sınır örneği



Kısıtlanmamış modellerin ikincisi, amaç fonksiyonunda hem riskin hem de getirinin, toplamı "1" olan katsayılarla çarpılmasıyla oluşturulmaktadır. Modeldeki iki temel faktör risk (varyans) ve getiridir. Yatırımcının, riski seven (aggressive) veya riskten kaçan (conservative) olmasına göre bu iki temel faktörün model içerisindeki önem dereceleri değişmekte, buna bağlı olarak oluşan portföyler de farklı kombinasyonlardan oluşmaktadır. Bu iki faktörün amaç fonksiyonunda bulunma ağırlıkları λ ($-1 \leq \lambda \leq +1$) değeri ile belirlenmektedir. Uygun λ değerinin belirlenmesi konusunda Özdemir ve Giresunlu' nun çalışmasına bakılabilir (2004). Buna göre kısıtsız optimizasyon problemi,

$$\text{Minim.} \quad \lambda\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}\right] - (1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i\right] \qquad (5)$$

kısıtlar;

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \qquad (6)$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \quad i = 1,\ldots,N \qquad (7)$$

Denklem (5)' te ağırlıkları nispetinde risk-getiri farkının minimize edilmesi, Denklem (6)' da menkul kıymetlerin oranları toplamı (1) yer almaktadır. $\lambda = 0$ ise risk unsuru hiç dikkate alınmadan getirinin maksimum kılınması amaçlanmaktadır. Bu durumda portföy en yüksek getiriye sahip menkul kıymetten oluşacaktır. $\lambda = 1$ olması durumunda ise durum tam tersine dönmekte, sadece riskin minimum kılınması amaçlanmakta, getiri dikkate alınmamaktadır. $0<\lambda<1$ durumlarında ise risk ve getiri ağırlıkları nispetinde dikkate alınarak risk – getiri farkı minimize edilmektedir (Chang ve diğerleri, 2000, s.1274).

1.2 Kısıtlanmış Modeller

Kısıtlanmış modellerde, portföye girecek menkul değer sayısı karar verici tarafından belirlenebilir ve portföy içerisindeki menkul kıymetlerin ağırlıkları belirli sınırlar içerisinde tutulabilir. Bu kısıtlar modele dahil edilerek kısıtlanmış model oluşturulur.

K : Portföy içerisinde bulunması istenen menkul kıymet sayısı,

ε : i menkul kıymetinin portföy içerisindeki minimum oranı (i=1,…, N), portföye dahilse,

δ : i menkul kıymetinin portföy içerisindeki maksimum oranı (i=1,…, N), portföye dahilse,

Minimum ve maksimum oran kısıtları, $0 \leq \varepsilon_i \leq \delta_i \leq 1$ (i=1,…, N) şeklinde değişebilmektedir. z_i 0-1 karar değişkenleri ise ilgili menkul kıymetin portföye girip girmeyeceğini belirlemektedirler. i menkul kıymeti portföye dahil ise z_i' nin değeri "1", aksi durumda "0" olmaktadır. Buna göre model

$$\text{minimum} \quad \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \tag{8}$$

kısıtlar;

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i = R^* \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{N} z_i = K \tag{11}$$

$$\varepsilon_i z_i \le w_i \le \delta_i z_i, \quad i = 1,...,N \tag{12}$$

$$z_i \in [0,1] \quad i = 1,...,N \tag{13}$$

Denklem (8)' de minimize edilmek istenen portföyün toplam varyansı (risk), Denklem (9)' da portföyün beklenen getirisi, Denklem (10)' da menkul kıymetlerin oranları toplamı (1), Denklem (11)' de portföye dahil olan toplam menkul kıymet sayısı (K), Denklem (12)' de menkul kıymetlerin portföy içerisindeki minimum ve maksimum ağırlık kısıtları yer almaktadır.

Kısıtlanmış modelde, karar vericinin tercihlerine göre değişiklikler yapmak mümkündür. Portföyü oluşturan menkul değer sayısı (K) belirli bir aralık olarak belirlenebilir. Bu durumda $\sum_{i=1}^{N} z_i$ değeri, $K_l \le \sum_{i=1}^{N} z_i \le K_u$ aralığında yer alacaktır. Bunun dışında modele dahil edilebilecek bir çok kısıttan farklı çalışmalarda bahsedilmiştir. Bunlara örnek olarak, belirli sektörlerden belirli sayıda hisse senedi alınması şeklinde tanımlanabilecek sektör kısıtı, portföyün içerisinde mutlaka bulunmasını istediğimiz hisse senetlerini tanımlayan portföy içindeki menkul değerler kısıtları verilebilir (Chang ve diğerleri, 2000). Markowitz tarafından geliştirildiği 1950' li yıllardan bu yana, yapılan bir çok çalışmada modele farklı eklentiler yapılarak etkinliği arttırılmaya çalışılmıştır.

Markowitz modelinin çözümünde doğrusal ve doğrusal olmayan programlama, kuadratik programlama gibi matematiksel modeller kullanılmıştır. Ayrıca Chang ve diğerleri (2000) ile Xia ve diğerleri (2000) GA, Crama ve Schyns (2003) ile Chang ve diğerleri (2000) benzetilmiş tavlama, Fernandez ve Gome (Baskıda) yapay sinir ağları gibi sezgisel modeller kullanılmıştır.

Bu çalışmada, Markowitz ortalama-varyans modelinin çözümünde geliştirilen GA modelinin yapısı ve modele yönelik geliştirilen mutasyon operatörü ayrıntılarıyla anlatılmıştır.

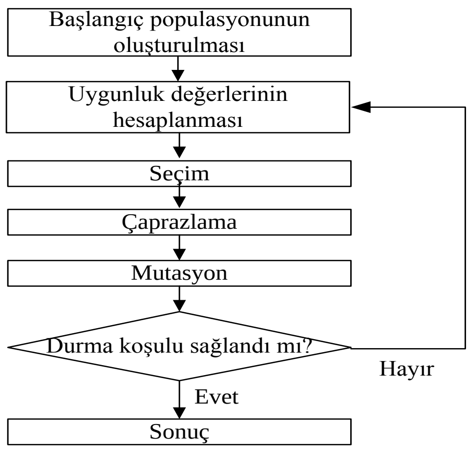
2. GENETİK ALGORİTMA

Genetik algoritma, 1960'lı ve 1970' li yıllarda Michigan Üniversitesinde Holland ve çalışma arkadaşları tarafından geliştirilen sezgisel araştırma ve optimizasyon tekniğidir (Reeves, 1995). Ancak teoriye asıl ilgi Holland' ın öğrencisi olarak doktorasını veren David E.Goldberg adlı inşaat mühendisinin 1989 da çıkardığı kitapla birlikte başlamıştır (1989). Günümüze kadar GA konusunda çok farklı alanlarda birçok çalışma yapılmıştır.

GA sadece amaç fonksiyonuna ihtiyaç duyan bir optimizasyon tekniğidir. Amaç fonksiyonuna ait değişkenlerin oluşturduğu çözüm setleri iterasyonlar boyunca genetik operatörler yardımıyla değiştirilmekte ve bu şekilde optimum çözüm aranmaktadır. Çözüm uzayından tesadüfi olarak seçilen noktalar üzerinden operatörler yardımıyla daha iyi noktalara ulaşmak amaçtır. Çözüm uzayı çok büyük problemlerde, iyi sonuç vermeyecek alanlarda gereksiz arama yapılmaması hızlı bir şekilde optimum çözüme yaklaşmayı sağlamaktadır. Bahsedilen sürecin adımları Şekil 3' te görülmektedir.

GA modelimizde ilk olarak Markowitz' in Denklem (5)' teki amaç fonksiyonu kullanılmıştır.

Şekil 2: GA' nın adımları (Keskintürk ve Akçay, 2005, s.1137)



2.1 Kodlama

Değişkenler kromozom adı verilen yapıda genlerle temsil edilmektedir. Kodlama denen bu işlemde genellikle ikili sayı sistemi (0–1) tercih edilmekle beraber problemin yapısına özgün olarak farklı kodlama biçimleri de kullanılmaktadır. Modelimizde, oluşturulacak kromozomun her bir geni bir menkul kıymeti temsil edecektir. Bu temsil hem menkul değerin portföy içerisinde yer alıp almadığını hem de eğer portföye dahil olacaksa ağırlığının ne olacağını kapsamaktadır. Böylelikle ikili kodlama ve gerçek değerlerle kodlama yerine ikisini birden temsil eden bir kodlama kullanılmış, gen sayısı da yarı yarıya azaltılarak süreç hızlandırılmıştır.

Şekil 3' teki örnek kromozom 16 menkul kıymetten oluşan bir yatırım havuzundan nasıl bir portföy oluşturulduğunu göstermektedir. 1, 4, 6, 9 ve 12. menkul değerler portföye dahil edilmiş ve bunların ağırlıkları ilgili gendeki oran kadar olmuştur. Bu oranların toplamı "1" dir. Bu tip bir kromozom yapısı klasik GA operatörlerinde de bazı değişikliklerin yapılmasını gerekli kılacaktır.

2.2 Uygunluk Fonksiyonu

Her bir kromozom bir çözüm alternatifini oluşturmaktadır ve her bir kromozomun problemin amaç fonksiyonuyla hesaplanan bir uygunluk değeri vardır. Modelimiz, maksimizasyona yönelik geliştirildiğinden uygunluk değeri portföyün gelir-risk farkı şeklinde tanımlanacaktır. x_i (i=1,…, N) kromozomdaki i değişkeni (menkul değer) olmak üzere uygunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$(1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i\right] - \lambda\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}\right] \tag{14}$$

Portföye dahil edilmeyen i. menkul değere ait genin (x_i) değeri "0" olacağından uygunluk fonksiyonunu etkilemeyecektir. Ağırlıklar, GA tarafından 1 ile 50 arasında belirlenen rasgele değerlerin, değerler toplamına bölünmesiyle belirleneceğinden oranlar toplamı her zaman "1" olacaktır. Bu da kısıtın baştan sağlanmasını sağlayacak, ceza fonksiyonu kullanılması gerekliliğini ortadan kaldıracaktır. Uygunluk fonksiyonunun algoritma içerisinde hesaplanışına ait Matlab kodu Şekil 4' te verilmiştir.

Şekil 3: Bir Portföyü temsil eden örnek GA kromozomu

Kromozom:	0,25	0	0	0,03	0	0,9	0	0	0,12	0	0	0,51	0

Şekil 4: Uygunluk fonksiyonu

```
function fitnessportfoy(population,cov,getiri,w);
%w:riskin ağırlığı
[satir,sutun]=size(population);
for i=1:satir
    ksm=population(i,:)/sum(population(i,:));
    ksm=nonzeros(ksm);    %ksm:katsayılar matrisi (ağırlıklar).
    shh=find(population(i,:));  %seçilen hisse senetleri.
    k=size(shh,1);   %k:seçilen hisse senedi sayısı.
    risk=0; get=0;
    for j=1:k-1
        for t=j:k
        risk=risk+ksm(j)*ksm(t)*cov(shh(j),shh(t));
        end
        get=get+ksm(j)*getiri(shh(j));
    end
    %portföy risk ve getirisinin hesaplanması
    fitnessportfoy(i)= (1-w)*get-w*risk;
    %belirlenen ağırlıklara göre uygunluk değeri
end
```

2.3 Başlangıç Populasyonu

Tek bir noktadan çözüme ulaşmak yerine bir çok çözüm alternatifiyle (populasyon) iterasyonlar boyunca arama yapılmaktadır. Çözüm uzayında, belirlenen populasyon büyüklüğü adedince tesadüfi noktadan arama başlatılır. Populasyon büyüklüğü problemin yapısına, zorluğuna ve algoritmanın çalıştırılacağı bilgisayarın performansına bağlı olarak belirlenebilmekle birlikte genellikle 20-100 arası kullanılmaktadır.

Her bir noktanın (kromozom) uygunluk değeri hesaplandıktan sonra operatörler yardımıyla problem değişkenlerinde belirli değişiklikler yapılır. Bu değişiklikler genetik operatörler (seçim, çaprazlama ve mutasyon) yardımıyla gerçekleştirilir. Böylelikle daha iyi çözüm değerlerine ulaşılır. Bu işlem tamamlanma kriteri sağlanana kadar devam eder.

2.4 Seçim

Seçim operatörü, kromozomların uygunluklarına bağlı olarak bir sonraki jenerasyonda yer alıp almayacaklarını belirleyen operatördür. Bu operatör yeni topluluk içerisinde, uygunluğu yüksek bireylerin bulunmasını sağlamaktadır (Goldberg, 1989: 11). Bu bireyler yeni jenerasyonda birden çok bulunabileceği (kopyalanabileceği) gibi, uygunluğu daha düşük bireyler ise hiç bulunmayabilir.

Farklı birçok seçim operatörü geliştirilmiştir. Seçim yöntemlerine rulet tekerleği seçimi, turnuva seçimi, genel stokastik örnekleme ve sıralı seçim örnek olarak verilebilir(Obitko, 1998). Çalışmamızda bu yöntemlerden rulet tekerleği yöntemi kullanılacaktır. Modelimizde kullanılan rulet tekerliği seçim operatörünün Matlab kodu Şekil 5’ te görülmektedir.

2.5 Çaprazlama

Çaprazlama operatörü, iterasyonlar boyunca çözümün iyileşmesinde çok önemli bir rol oynamaktadır. Çaprazlama, iki ebeveyn kromozomun belirlenen kesimlerinin karşılıklı değişimleri sonucu ebeveynlerinin özelliklerini taşıyan benzer yavru kromozomların oluşturulması işlemidir (Michalewicz, Z., 1992: 17). Böylelikle yeni oluşturulan kromozomlar meydana geldikleri her iki kromozomdan da belirli özellikler taşımaktadırlar. İterasyonlar boyunca binlerce kez yapılan bu işlem sonucu oldukça iyi kromozomlar elde edilebilmektedir. Çaprazlama süreci, aşağıda belirtilen basit dört adımla özetlenebilir (Sarker, 2002, s.195):

1. Populasyon içinden tesadüfi olarak iki kromozom (ebeveynler) seçilir;
2. Çaprazlama olasılığı değerlendirilir: Çaprazlama yapılsın mı? Evet ya da hayır,
3. Eğer cevap ‘evet’ ise yine tesadüfi olarak çaprazlama noktası belirlenir,
4. Her bir kromozom, çaprazlama noktasından kesilir ve sağ taraflarının karşılıklı değiştirilip yapıştırılmasıyla yavrular meydana getirilir.

Şekil 5: Seçim operatörü

```
function secim(dizi,uygunluk);
[satir,sutun]=size(dizi);
dizi=[dizi uygunluk']; dizi=sortrows(dizi,[sutun+1]);
uygunluk=dizi(:,sutun+1);
wheel = cumsum(uygunluk) / sum(uygunluk);
for i = 1:satir
    r = rand;
    for j = 1:satir
        if(r < wheel(j))
            secim(i,:) = dizi(j,1:sutun);
            break;
        end
    end
end
```

Şekil 6: Tek nokta çaprazlama

Ebeveyn 1:	0,25	0	0	0,03	0	0,9	0	0	0,12	0	0	0,51	0
Ebeveyn 2:	0	0,54	0	0	0	0	0	0	0	0,24	0	0,22	0
Yavru 1:	0,25	0	0	0,03	0	0,9	0	0	0	0,24	0	0,22	0
Yavru 2:	0	0,54	0	0	0	0	0	0	0,12	0	0	0,51	0

Modelimizde çaprazlama yapılırken 2. ve 3. aşama uygulanmamaktadır (Şekil 6). Farklı olarak tesadüfi olarak seçilen kromozomlardan populasyon sayısınca yeni kromozomlar elde edilir. Daha sonra tüm eski ve yeni kromozomlar uygunluklarına göre sıralanarak, populasyon sayısınca en iyi kromozom yeni populasyon olarak belirlenir.

Çaprazlama operatörü, kodlama biçimine göre farklılıklar göstermektedir. Tek nokta çaprazlama, iki nokta çaprazlama, çok nokta çaprazlama, düzenli çaprazlama, karışım çaprazlama ikili kodlama ve benzer yapıdaki kodlama biçimlerinde kullanılabilecek çaprazlama çeşitleridir. Seçilen operatör tipinin GA performansı üzerinde önemli etkileri söz konusudur (Nearchou, 2003).Tek nokta çaprazlama operatörü uygulanırken, tesadüfi olarak bir çaprazlama noktası belirlenir. Bu noktaya kadar olan kısım birinci ebeveynden (kromozom) alınır kalan kısım ikinci ebeveynden alınır. Şekil 6' da modelimize uygun iki kromozom ile gerçekleştirilen tek nokta çaprazlama işlemi görülmektedir.

Mevcut çözüm üzerinde en önemli değişiklikleri gerçekleştiren operatör olan çaprazlamanın Matlab kodu Şekil 7' de görülmektedir.

2.6 Mutasyon

GA operatörleri içerisinde çaprazlamadan sonra ikinci derece önemli rol oynamaktadır. Mutasyon operatörü, yapay genetik sistemlerde, bir daha ulaşılması mümkün olmayan çözümlerin kaybına karşı koruma sağlamaktadır (Goldberg, 1989: p.14). Düşük bir olasılıkla herhangi bir gen üzerinde yapılan tesadüfi değişikliklerdir. Normalde tek veya iki noktada (gen) rakamın 1 ise 0' a, 0 ise 1' e dönüştürülmesi şeklinde gerçekleştirilen operatör, modelimizde kromozomların yapısından dolayı farklı bir şekilde kullanılmıştır.

Modelimizde kullanılan mutasyon operatörü (Şekil 8) temel olarak iki değişikliği amaçlamaktadır. Öncelikle çok düşük bir olasılıkla (0.05) portföyden bir hisse senedinin çıkarılması. Bu işlemin yapılabilmesi için seçilen genin 0' dan büyük bir değere sahip olması gerekir. Çünkü "0" değerli bir genin temsil ettiği hisse senedi zaten portföye dahil değildir. Seçilen gen bu şartı sağlıyorsa değeri 0' a dönüştürülür. Aksi takdirde bir işlem yapılmaz.

Şekil 7: Çaprazlama operatörü

```
function caprazlamaportfoy(dizi,cov,getiri,w,fitnesspop);
%fitnesspop:dizideki kromozomların uygunlukları
parents=[dizi fitnesspop']; %kromozomlar ve uygunlukları tek matris
[satir,sutun]=size(dizi);
for i=1:satir;
       anne=randint(1,1,[1,satir]);
       baba=randint(1,1,[1,satir]);
       while(anne == baba)
            anne=randint(1,1,[1,satir]);
            baba=randint(1,1,[1,satir]);
       end
       capnoktasi=randint(1,1,[2,sutun-1]);
       dizi1(i,1:capnoktasi)=dizi(anne,1:capnoktasi);
       dizi1(i,capnoktasi+1:sutun)=dizi(baba,capnoktasi+1:sutun);
end
s=fitnessportfoy(dizi1,cov,ss,getiri,w);
caprazlamaportfoy=[parents;dizi1 s'];
caprazlamaportfoy=sortrows(caprazlamaportfoy,[sutun+1]);
%Yeni ve eski kromozomlar uygunluklarına göre sıralanıyor
caprazlamaportfoy=caprazlamaportfoy(satir+1:satir*2,1:sutun);
%En iyi uygunluğa sahip populasyon sayısı adedince birey seçiliyor.
```

Şekil 8: Mutasyon operatörü

```
function mutasyonportfoy (dizi,olasilik);
[satir,sutun]=size(dizi);
for i=1:satir;
    if rand<0.05
       dizi(i,randint(1,1,[1,sutun]))=0;
    end
    if rand<olasilik;
        mutnoktasi=randint(1,1,[1,sutun]);
        mutnoktasi1=randint(1,1,[1,sutun]);
        while(mutnoktasi == mutnoktasi1)
        mutnoktasi=randint(1,1,[1,sutun]);
        mutnoktasi1=randint(1,1,[1,sutun]);
        end
        if dizi(i,mutnoktasi)>0;
           if  dizi(i,mutnoktasi1)>0;
                if rand<=0.5
                dizi(i,mutnoktasi)= dizi(i,mutnoktasi)-1;
                dizi(i,mutnoktasi1)= dizi(i,mutnoktasi1)+1;
                else
                dizi(i,mutnoktasi)= dizi(i,mutnoktasi)+1;
                dizi(i,mutnoktasi1)= dizi(i,mutnoktasi1)-1;
                end
           else
                dizi(i,mutnoktasi)= dizi(i,mutnoktasi)-1;
                dizi(i,mutnoktasi1)= dizi(i,mutnoktasi1)+1;
           end
       else
            if  dizi(i,mutnoktasi1)>0;
                dizi(i,mutnoktasi)= dizi(i,mutnoktasi)+1;
                dizi(i,mutnoktasi1)= dizi(i,mutnoktasi1)-1;
            end
       end
end
mutasyonportfoy=dizi;
```

İkinci değişiklik ise portföye dahil olan hisse senetlerinin portföy içerisinde oranlarının değiştirilmesi. Bu yapılırken seçilen iki genden "1" değeri alınır seçilen diğer gene aktarılır. Böylelikle diğer hisse senetlerinin oranları korunurken bu iki hisse senedinin ağırlıklarında küçük bir değişme gerçekleştirilmiş olmaktadır (±1).

2.7 Algoritmanın durdurulması ve sonuç

Tamamlanma kriteri genellikle belirlenen iterasyon sayısıdır (Bazı durumlarda hedeflenen bir değerin bulunması tamamlanma kriteri olarak belirtilebilir). İterasyon sayısı adedince döngü çalıştırılır ve durdurulur. Son populasyon içerisinde en iyi uygunluğa sahip kromozom çözüm seti ve bu kromozoma ait uygunluk değeri ise çözüm değeri olarak alınır.

3. UYGULAMA

İkinci bölümde adımları ve kullanılan operatörleri anlatılan Markowitz ortalama-varyans GA modelinin akış diyagramına ait Matlab kodu Şekil 9' da verilmiştir.

Şekil 9: Markowitz ortalama-varyans GA modeli

```
function gaportfoy(cov,getiri,w,iteration,popsize,mut_rate);
randpop=[randint(popsize,size(cov,2),[0,50])];
%Başlangıç populasyonunun belirlenmesi
bestval=-9999;
for i=1:iteration
    fitnesspop=fitnessportfoy(randpop,cov,getiri,w);
    %Uygunlukların belirlenmesi
    if max(fitnesspop)>bestval
       bestval=max(fitnesspop);
       %En iyi çözüm değerinin belirlenmesi
       bestloc=randpop(find(fitnesspop==bestval),:);
       %En iyi çözüm değerini veren kromozom
    end
randpop=secim(randpop,fitnesspop);
%Seçim operatörünün uygulanması
randpop=caprazlamaportfoy(randpop,cov,getiri,w,bestloc,fitnesspop);
%Çaprazlama operatörünün uygulanması
randpop=mutasyonportfoy(randpop,mut_rate);
%Mutasyon operatörünün uygulanması
randpop(randint(1,1,[1,popsize]),:)=bestloc;
%En iyi kromozom bir sonraki populasyona aktarılır
end
getiri_risk_uygunluk_fitness=[get risk bestval]
%Sonuç olarak getiri ve risk oranı ile uygunluk değeri yazılır.
```

Bir menkul değer havuzundaki kıymetlere ait getiri ortalamaları (**getiri**), kovaryans matrisi (**cov**) ayrıca model parametreleri olarak amaç fonksiyonu risk ve getiri ağırlıkları (**w**), döngü sayısı (**iteration**), populasyon büyüklüğü (**popsize**) ve mutasyon oranı (**mut_rate**) programın girdileridir. Getiriler (%) ve standart sapmalar satır vektörü olarak girilmektedir.

Geliştirilen model, Markowitz' in yayınlamış olduğu kitaptan (1952) alınan problem üzerinde denenmiştir. 9 hisse senedine (HS) ait 18 dönemlik getiri oranları Tablo 2' de ve ortalama getiri oranları, standart sapma, varyans değerleri Tablo 3' te verilmiştir.

Modele ait GA parametreleri Tablo 1' de görülmektedir. Mutasyon oranı normalde kullanılandan çok daha büyüktür. Yapılan denemeler sonucu oranın arttırılmasıyla çözüm sürecinin hızlandığı görülmüştür. Bu nedenle yüksek mutasyon oranı kullanılmıştır.

Tablo 1: GA Parametreleri

Populasyon büyüklüğü	50
İterasyon sayısı	1000
Çaprazlama oranı	%100
Mutasyon oranı	%50

Anlatılan modelde amaç, daha önce de belirtildiği gibi (1- λ)*get- λ* risk değerinin maksimize etmektir. İlk olarak λ = 0, 0.2, 0.5, 0.8 ve 1 değerleri için algoritma çalıştırılmış ve sonuçlar Tablo 4' te verilmiştir. Daha sonra test problemi için etkin sınır üzerinde belirlenen 10 farklı beklenen getiri (R^*) değeri için model çalıştırılmış ve elde edilen portföyün toplam risk değerleri ($\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i$) optimum değerlerle karşılaştırılmış ve yüzde sapmalar Tablo 5' te verilmiştir. Model, karşılaştırmanın yapılabilmesi için değiştirilmiş, amaç fonksiyonu Denklem 8' deki gibi $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$ oluşturulmuştur. R^* değerleri kısıt sabiti olarak kabul edilmiştir (Denklem 9). Ayrıca R^* değerinin sağlanmasına yönelik olarak amaç fonksiyonunun içersine belirli bir ceza katsayısına sahip sapmanın mutlak değeri eklenmiştir. Böylelikle istenen getiri düzeyi korunmuş olmaktadır.

Tüm veriler elde edildikten sonra GA, her bir problem için 1000 iterasyon çalıştırılmıştır. Tablo 4' te farklı λ değerleri için elde edilmiş olan portföyler ve bu portföylere ait getiri ve risk oranları görülmektedir.

Tablo 2: Markowitz: Dokuz hisse senedine ait getiri değerleri

Dönem	1 Am.T	2 A.T.&T.	3 U.S.S.	4 G.M.	5 A.T.&S.	6 C.C	7 Bdn.	8 Frstn.	9 S.S.
1	-0,305	-0,173	-0,318	-0,477	-0,457	-0,065	-0,319	-0,4	-0,435
2	0,513	0,098	0,285	0,714	0,107	0,238	0,076	0,336	0,238
3	0,055	0,2	-0,047	0,165	-0,424	-0,078	0,381	-0,093	-0,295
4	-0,126	0,03	0,104	-0,043	-0,189	-0,077	-0,051	-0,09	-0,036
5	-0,28	-0,183	-0,171	-0,277	0,637	-0,187	-0,087	-0,194	-0,24
6	-0,003	0,067	-0,039	0,476	0,865	0,156	0,262	1,113	0,126
7	0,428	0,3	0,149	0,225	0,313	0,351	0,341	0,58	0,639
8	0,192	0,103	0,26	0,29	0,637	0,233	0,227	0,473	0,282
9	0,446	0,216	0,419	0,216	0,373	0,349	0,352	0,229	0,578
10	-0,088	-0,046	-0,078	-0,272	-0,037	-0,209	0,153	-0,126	0,289
11	-0,127	-0,071	0,169	0,144	0,026	0,355	-0,099	0,009	0,184
12	-0,015	0,056	-0,035	0,107	0,153	-0,231	0,038	0	0,114
13	0,305	0,038	0,133	0,321	0,067	0,246	0,273	0,223	-0,222
14	-0,096	0,089	0,732	0,305	0,579	-0,248	0,091	0,65	0,327
15	0,016	0,09	0,021	0,195	0,04	-0,064	0,054	-0,131	0,133
16	0,128	0,083	0,131	0,39	0,434	0,079	0,109	0,175	0,062
17	-0,01	0,035	0,006	-0,072	-0,027	0,067	0,21	-0,084	-0,048
18	0,154	0,176	0,908	0,715	0,469	0,077	0,112	0,756	0,185

Tablo 3: Markowitz' in problemine ait değerler

HS	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Aritmetik ortalama	0,06594	0,06156	0,14606	0,17344	0,19811	0,05511	0,11794	0,19033	0,10450
Standart sapma	0,23106	0,12118	0,2924	0,30897	0,35762	0,20312	0,17666	0,38305	0,27665
Varyans	0,05339	0,01468	0,0855	0,09546	0,12789	0,04126	0,03121	0,14673	0,07654

Tablo 4: Farklı λ değerlerine bağlı oluşan portföyler

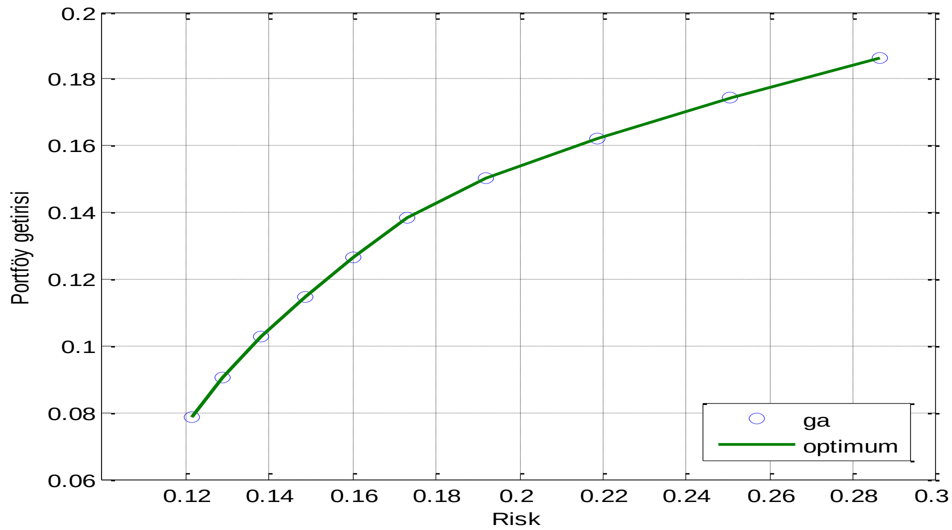
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Portföy getirisi	Portföy riski
λ=0.0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	**0,19811**	**0,127890**
λ=0.2	0	0	0	0,2236	0,7764	0	0	0	0	**0,19260**	**0,099757**
λ=0.5	0	0	0,0370	0,2305	0,3458	0	0,3865	0	0	**0,15951**	**0,044900**
λ=0.8	0	0,1405	0,1761	0	0,1111	0,0953	0,4766	0	0	**0,11789**	**0,023434**

λ=1.0	0	0,8369	0	0	0,0434	0,1195	0	0	0	**0,06675**	**0,013843**

Tablo 5: 10 adet R^* değeri için GA sonuçları

		Risk değerleri (standart sapma)		
	R^*	Optimum	GA	% Sapma
1	0,078696	0,12127	0,12136	0,000742
2	0,090638	0,12880	0,12881	0,000078
3	0,10258	0,13812	0,13814	0,000145
4	0,11452	0,14869	0,14875	0,000404
5	0,12646	0,16027	0,16032	0,000312
6	0,1384	0,17293	0,17294	0,000058
7	0,15035	0,19207	0,19208	0,000052
8	0,16229	0,2186	0,21877	0,000778
9	0,17423	0,25041	0,25074	0,001318
10	0,18617	0,28636	0,28636	0
Toplam				**0,003887**
Ortalama				**0,000389**

Şekil: 10 Etkin sınır ve GA sonuçları



Risk katsayısı (λ) "0" iken portföy riski dikkate almadan en yüksek getiriye sahip tek bir hisse senedinden oluşur. Değer arttıkça portföye farklı hisse senetleri de eklenir. İkinci aşamada etkin sınırdaki 10 noktaya ait getiri düzeylerinde risk minimize edilmeye çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlar sapma değerleri olarak Tablo 5' te, grafik olarak ise Şekil 10' da verilmiştir. R^* ve optimum risk değerleri Matlab' de *[PortRisk, PortReturn, PortWts] = frontcon(ExpReturn,ExpCovariance, NumPorts)* fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir.

Tablo 5' te de görüldüğü gibi GA sonuçları optimum sonuçlara çok küçük sapmalarla yaklaşmıştır. İterasyon sayısının 1000 olduğu düşünülürse algoritmanın hızlı çalıştığı söylenebilir. Bunda, çaprazlama ve mutasyon operatörlerinde yapılan, problemin yapısına özgün değişikliklerin etkisi olduğu düşünülmektedir. Çözüm aşamasında parametrelerin farklı kombinasyonları denenmiş ve sonuçta çözüm süreci üzerinde en olumlu etkiye sahip parametreler seçilmiştir.

SONUÇ

Çalışmada Markowitz' in ortalama-varyans modeli GA yaklaşımıyla çözülmeye çalışılmıştır. Verilerin çokluğu ve karmaşıklığı, karar vericinin kısıtları gibi nedenlerle çözümü zor bir problem olan portföy seçimi bugüne kadar birçok çalışmaya konu olmuştur. Bu çalışmaların bir kısmında sezgisel yöntemler kullanılmıştır. GA da kullanılan bu sezgisel yöntemlerden biridir. Bu çalışmada farklı olarak çaprazlama ve mutasyon operatörlerinde modele yönelik değişiklikler yapılmıştır. Öncelikle kromozomlar ikili olarak değil, hisse senetlerinin portföy içerisindeki ağırlıklarını temsil edecek şekilde reel sayılardan oluşturulmuştur. Yeni yapıya bağlı olarak klasik mutasyon operatörü değiştirilerek, hisse senetlerinin rasgele portföye girmelerine ya da çıkmalarına, ayrıca portföy içerisindeki oranlarının yine rasgele değişmelerine imkan tanıyacak hale dönüştürülmüştür. Mutasyon olasılığının farklı düzeyleri denenmiş ve yüksek oranda mutasyon yapılmasının çözüm üzerinde iyileştirici etkiye sahip olduğu gözlenmiştir. Çaprazlamada da belirli bir oran kullanılmamış, populasyon sayısınca birey elde edilip, tüm bireyler içerisinden en iyileri yeni populasyonu oluşturmuştur. Tüm bu işlemlere ait GA kodları çalışma içerisinde verilmiştir.

Sonuçlar incelendiğinde GA ile bulunan sonuçların, önemsenmeyecek kadar küçük sapmalarla optimuma yaklaştığı görülmüştür. Belirlenen getiri düzeylerinde minimize edilmek istenen risk değerleri etkin sınır üzerinde yer almıştır (Şekil 10). Modelin hassasiyetinin yüksek olması, mutasyonda yapılan değişikliklerin küçük değerlerle sınırlandırılmasıyla sağlanmıştır. GA yaklaşımının avantajlarından biri de esnek yapısı sayesinde farklı kısıtların rahatlıkla eklenmesidir. Herhangi bir kısıtı modele eklemek için, kısıttan mutlak sapmanın belirli bir ceza katsayısıyla amaç fonksiyonuna eklemek yeterli olacaktır.

Bu alanda yapılan çalışmalarda çok farklı kısıtlar üzerinde durulmaktadır. Model bu kısıtların eklenmesiyle geliştirilebilir. Kullanıma yönelik olması açısından sürekliliği olan bir modele dönüştürülmesi faydalı olabilir. Ayrıca verilerin sürekli olarak güncellendiği böyle bir model için en hızlı şekilde sonuç verecek parametre değerlerinin belirlenmesi gerekecektir. Katsayıların belirlenmesiyle yetinilmeyip, sonuç değeri olarak yatırımcının hangi yatırım aracına ne kadar yatırım yapması gerektiği ve elde edilen bulgulara göre ne kadarlık bir getiriyi ne kadarlık bir risk seviyesinde elde edebileceği rapor olarak sunulabilir.

KAYNAKÇA

1. NEARCHOU, Andreas C., 2003, "*The effect of various operators on the genetic search for large scheduling problems*", **Production Economics**, Vol: 88, No:2, s:191-203.
2. CEYLAN, A., KORKMAZ, T., 2004, **Sermaye Piyasası ve Menkul Değer Analizi**, İstanbul, Ekin Kitabevi.
3. CHANG, T.J., MEADE, N., BEASLEY, J.E., SHARAIHA, Y.M., 2000, "*Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation*", **Computers&Operations Research** Vol: 27, s:1271-1302.
4. CRAMA, Y., SCHYNS, M., 2003, "*Simulated annealing for complex portfolio selection problems*", **European Journal of Operational Research** Vol: 150, s:546–571
5. FERNÁNDEZ, A., GÓMEZ, S., Baskıda, "*Portfolio selection using neural networks*", **Computers & Operations Research**.
6. GOLDBERG, D.E., 1989, **Genetic algorithms in search optimization and machine learning**, Addison Wesley Publishing Company, USA
7. KESKİNTÜRK, T.,AKÇAY, Ö., 2005, "*An order encoding genetic algorithm for lot-sizing problem with multiple suppliers*", **Proceedings of the 2005 International Conference on Computers and Industrial Engineering**, s. 1135-1140.
8. MARKOWITZ, H.M., 1952, "*Portfolio selection"*, **Journal of Finance**, Vol: 7, s:77-91.
9. MARKOWITZ, H.M., 1959, **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**, New York, Wiley.
10. MICHALEWICZ, Z., 1992, **Genetic algorithms + Data structure = Evolution programs**, Berlin, Springer-Verlag.
11. OBITKO, M., 1998, **Genetic Algorithms**, (Çevrimiçi), http://cs.felk.cvut.cz/~xobitko/ga/ Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden (FD).
12. ÖZDEMİR, E., 1983, **Nonlineer Programlama Çözüm Yöntemleri ve Portföy Seçimi Problemine Uygulanması**, Doktora Tezi, İstanbul.
13. ÖZDEMİR, E., GİRESUNLU, İ.M., 2004, "*The selection of risky stock portfolios based on the risk aversion constant*", Azerbaycan Respublikası Tahsil Cemiyeti Bilgi Dergisi, No:2 (18), s:61-66.
14. REEVES, C.R., 1995, **Modern heuristic techniques for combinatorial problems**, McGraw-Hill Book Company Inc., Europe.
15. SARKER, R., NEWTON, C., 2002, "A genetic algorithm for solving economic lot size scheduling problem", **Computer & Industrial Engineering**, Vol: 12, No:5, s:195-196.

16. XIA, Y., LIU, B., WANG, S., LAI, K., 2000, "*A model for portfolio selection with order of expected returns*" **Computers & Operations Research**, Vol: 27, s:409–422.