

KAOTİK MARKOV ZİNCİRLERİ

***Orcan ALPAR
Ahmet Aylin ÖZTÜRK
Özge EREN***

*İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü
İşletme Anabilimdalı, Sayısal Yöntemler Bilimdalı*

ÖZET

Kaotik sistemlerin iterasyonlu yapısı ile Markov zincirlerindeki bir durumdan diğer duruma geçiş hali arasında matematiksel açıdan benzerlikler bulunmaktadır. Bu benzerlik, Markov zincirlerinin kaotik davranış sergileyebileceği belirli durumların var olabileceğini göstermektedir. Kaos için gereken koşullardan en önemlisi doğrusal olmayan bir fonksiyonun var olmasıdır, fakat markov zincirlerindeki geçiş matrisinde yer alan doğrusallık kaosa imkan vermemektedir.

Bu makalede, iki boyutlu bir kaotik harita, Markov zinciri koşullarını sağlayacak şekilde uyarlanmış ve hala kaotik davranış gösterip göstermediği incelenmiştir. Kaotik yapılar için çizilen bifurkasyon diyagramı Markov zincirlerine uyarlanan yeni harita için çizilmiş ve benzer kaotik davranışın saptanmıştır. Ayrıca başlangıç değerlerince çok küçük oynamalar yapılarak, iterasyonlar ilerledikçe bu önemsiz oynamaların ileride nasıl büyük hatalara yol açabileceği görülmüştür.

Anahtar sözcükler: Markov zincirleri, Kaos teorisi, Hénon haritası

CHAOTIC MARKOV CHAINS

ABSTRACT

The iterative structure of chaotic systems and transitive states of Markov chains has mathematical similarity. This similarity shows that under particular circumstances, Markov chains can display chaotic behavior. The most important condition that is required for chaos is existence of a nonlinear function, whereas the linearity situated in the transition matrix of the Markov chains makes chaos impossible.

In this paper, a two dimensional chaotic map is modified to satisfy the initial conditions of Markov chain, and investigated for survival of chaotic behavior. The bifurcation diagram, which is used for displaying chaotic structures, is illustrated for the new map and same chaotic behavior is determined. Additionally, by making negligible changes on initial conditions, it is seen that bigger errors are appeared after iterations.

Keywords: Markov chains, Chaos theory, Hénon Map

GİRİŞ

Kaos kavramı karmaşıklık ve düzensizliği çağrışırsa da bilimsel olarak sadece bu kavramlardan oluşmamaktadır. Kaos, sistemlerde zamanla meydana gelen beklenmeyen değişimleri açıklama konusunda önemli bir yer teşkil eder. Bu sistemlere hava durumu, borsa endeksi, yiyecek fiyatları, hayvan populasyonları gibi zamana bağlı değişimler içeren, kronolojik sıralı eleman grupları örnek gösterilebilir. Buradan da anlaşılacağı gibi Kaos teorisinin temel konuları değişim, zaman ve düzensizliktir (Williams, 1997).

Kaos teorisinde değişkenler zaman açısından iterasyonlarla birbirlerine bağımlıdır. Diğer bir deyişle, bir değişken ardından gelen değişkenleri etkilemektedir. Modern olasılık teorisinde bu bağımlılık Markov Zincirleri ile açıklanmaktadır (Durrett, 1996). Markov zincirleri bir durumdan diğer durumlara geçiş ve aynı durumda kalış olasılıklarını göstermektedir. Bu yöntem sayesinde istenen zaman için mevcut durumların olasılıkları hesaplanabilmekte ve belirli bir zaman aralığında durumların beklenen değerleri bulunabilmektedir (Meyn ve Tweedie, 2005).

Kaos teorisi ve Markov zinciri kavramları zaman ve değişim açılarından kesişmektedir ve “*Kaotik Markov Zinciri*” kavramı ortaya çıkmaktadır. T.D. Frank makalelerinde kaotik markov zincirlerini teorik olarak tanımlamış (2008) ve Lojistik Haritası ile Markov zincirlerini birleştirmiştir (2009). Ayrıca MacKernan ve Basios, düşük boyutlu kaotik markov zincirleri hakkında teorik çalışmalar yapmışlardır (2009). Bu çalışmada ise kaotik olduğu bilinen Hénon haritasının Markov Zincirleri koşullarında geçerli olabileceği ortaya konulmaya çalışılmıştır. T.D. Frank (2008, 2009) Langevin denklemi ile lineer olmayan fokker-planck denklemleri aracılığıyla markov süreçlerinin kaotik olup olmadığını göstermeye çalışmıştır. MacKernan ve Basios(2009) ise kullandığı teknikler aracılığıyla herhangi bir markov haritası için matris representasyonu ortaya koymuştur. Söz konusu çalışmalarda markov zincirlerinden hareketle kaotik durum oluşup oluşmadığını incelemiştir. Bu çalışmada ise kaotik bir fonksiyondan hareketle markov zincirlerinin kaotik olduğu ortaya konulmaya çalışılmıştır.

Bu makaleye konu olan çalışma iki boyutlu bir kaotik harita ile Markov zincirlerinin birleştirilmesinde teorik altyapıyı kurmak amaçlanmaktadır.

1. MARKOV ZİNCİRLERİ

Markov zinciri yöntemi 1907 yılında A.A.Markov tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntemde bütün olabilecek olaylar, durumlarla ifade edilmektedir. Olası durumlar bir durum kümesinde toplanmıştır $S = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ ve süreç bir durumdan başlayarak ardarda diğer durumlara geçer (Grinstead, 1998).

Eğer zincir s_i durumunda ise s_j durumuna geçmesi p_{ij} olasılığı ile gösterilir. Kendi durumunda kalması ise p_{ii} olasılığı ile muhtemeldir. Bütün bu geçiş durumları bir matris ile özetlenebilir ve bu matrise *geçiş olasılıkları matrisi* ya da kısaca *geçiş matrisi* adı verilmektedir.

$$A = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{r1} & p_{r2} & \dots & p_{rr} \end{bmatrix} \quad (1)$$

p_{ij} olasılıkları genellikle geçmiş deneyimlerle belirlenmektedir. Markov zinciri yönetiminin 4 adet varsayımı vardır (Timor, 2001). Bu varsayımlar;

1. Durumlar sonludur.
2. Durum sayısı sabittir.
3. Gelecekteki durum değişimi zaman içinde sabittir.
4. Gelecekteki durumların olasılığı, önceki duruma bağlıdır.

Bir geçiş matrisinin elemanları, matrisin herhangi bir derecesi için her zaman pozitif değerlere sahipse *düzenli Markov zinciri* olarak adlandırılır (Grinstead, 1998). Buradan hareketle denilebilir ki bir n pozitif tamsayısı için A^n matrisinin tüm elemanları 0'dan büyük olacak ve nihayetinde A matrisi düzenli markov zinciri olarak adlandırılabilir. Düzenli markov zincirlerinde denge koşulundan söz edilebilir.

Eğer A düzenli ise A^n bir Q matrisine yaklaşır.

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \dots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \dots & q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_r & q_r & \dots & q_r \end{bmatrix} \quad (2)$$

Bu noktada

$$q_1 + q_2 + \dots + q_r = 1 \quad (3)$$

olmaktadır. Bu denge koşulunda $n+1$ nolu denemede matris değişmemekte ve denge durumunda kalmaktadır. Herhangi bir olasılık vektörü v ile A^n matrisinin çarpımı q denge durumu vektörüne yakınsamaktadır.

$$vA^n \rightarrow q = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_r] \quad (4)$$

Bu durum;

$$qA^n = q \quad (5)$$

olarak gösterilebilir. A geçiş matrisinin özvektörü q vektörü ve A matrisinin özdeğeri 1 olmaktadır (Philippe, Saad ve Stewart, 1992). Denge durumundan, belirli bir deneme süresince durumların beklenen değerlerine ulaşılabilir. Markov analizinde kullanılacak olan geçiş matrisi ve başlangıç vektörünün değerlerinin sağlanması gereken önkoşullar vardır;

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{r1} & p_{r2} & \dots & p_{rr} \end{bmatrix} \quad (6)$$

A_{ij} geçiş matrisi her durum için bir satır ve bir sütun taşıyacağından kare olmalıdır (Tamara, Tapia ve Papakonstantinou, 2000). A_{ij} geçiş matrisinde bütün i 'ler için

$$0 \leq \sum_{j=1}^r p_{ij} \leq 1 \quad (7)$$

olmalıdır. Bir satırın olasılık toplamları 0'dan küçük olamaz ve 1'i geçemez. Ayrıca bütün i ve j ler için

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad (8)$$

zorunluluğu vardır. Bir durumdan başka bir duruma geçme olasılığı 0'dan küçük 1'den büyük olamaz. Başlangıç vektörü v^0 için de aynı koşullar sağlanmalıdır.

$$v^0 = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_r] \quad (9)$$

$$\text{Bütün } i \text{'ler için } 0 \leq \sum_{i=1}^r v_i^0 \leq 1 \quad (10)$$

$$\text{ve, } 0 \leq v_i^0 \leq 1 \quad (11)$$

Bu çalışmada kullanılan homojen düzenli iki-durumlu Markov zinciri analizinde ise geçiş ihtimallerinin ve başlangıç vektörünün elemanlarının toplamı 1'dir (Norris, 1997)

$$\text{Bütün } i \text{'ler için } \sum_{j=1}^r p_{ij} = 1 \quad (12)$$

$$\text{ve, } \sum_{i=1}^r v_i^0 = 1 \quad (13)$$

2. KAOS TEORİSİ

Kaos ismi Britanika Ansiklopedisi'ne göre Yunanca bir kelime olan “ $\chi\alpha\omicron\sigma$ ” kelimesinden türemiştir ve “*herşeyden önce varolan sonsuz boşluk*” anlamına gelmektedir. E.N.Lorenz birinci dereceden 3 bilinmeyenli doğrusal olmayan bir denklem kümesinin garip davranışlar sergilediğini keşfetmiştir (1963). Lorenz haritası diye literatürde yer alan denklemlerle kaosu “*ilk koşullara hassas bağlılık fenomeni*” olarak tanımlamıştır. Diğer bir yaklaşım ise Kellert'in spesifik kaos tanımıdır (1993). Kellert kaosu, “*iki başlangıç koşulu çok yakın olan fakat önemli derecede farklı sonuçlar alınan, ilk koşullara hassas olarak bağlı bir dinamik sistem*” olarak tanımlamıştır. Günümüzde ise kaos, düzensiz ve karmaşıklığı anlatmakta kullanılmaktadır (Schuster ve Just, 2005).

Kaosu en iyi ve basit anlatan denklem lojistik haritasıdır. Robert May doğrusal olmayan herhangi basit bir denklemin bile çok karmaşık dinamikleri olabileceğini vurgulayan bir makale yazmıştır (1976). May bu savını lojistik haritası ile kanıtlamıştır.

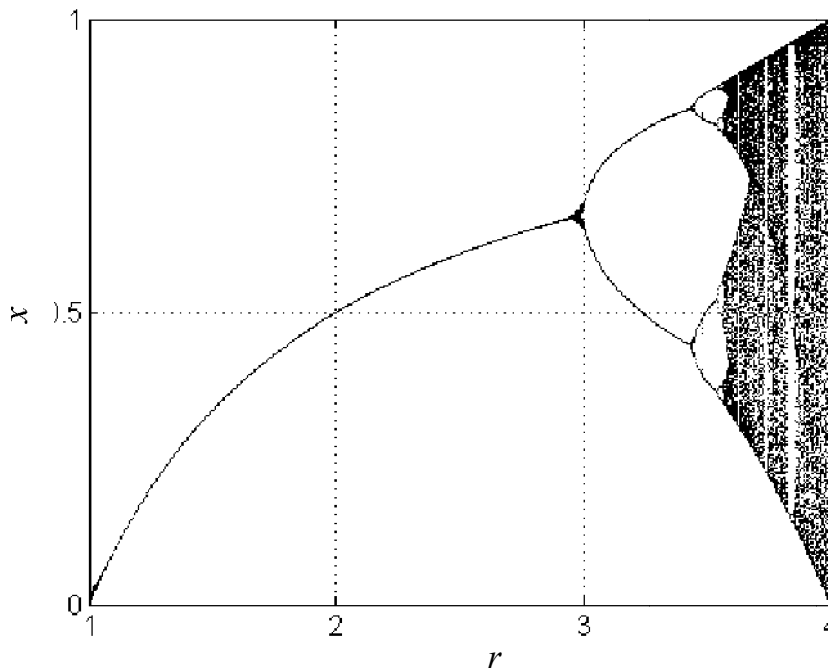
$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \quad (14)$$

Populasyon artışı ile ilgili olan bu haritada r parametresine bağlı değişik durumlar gözlemlenmektedir (Strogatz, 1994);

- r , 0 ile 1 arasında ise, populasyon ölmektedir.
- r , 1 ile 2 arasında ise, başlangıç populasyon değeri olan x_0 dan bağımsız olarak populasyon $\frac{r-1}{r}$ değerinde sabitlenmektedir.
- r , 2 ile 3 arasında ise, başlangıç populasyon değeri olan x_0 dan bağımsız olarak populasyon $\frac{r-1}{r}$ değerinde yine sabitlenmektedir. Fakat bu değer etrafında salınım yapmaktadır.
- r , 3 ile yaklaşık 3,45 arasında ise populasyon ikiye ayrılmaktadır.
- r , yaklaşık 3,45 ile yaklaşık 3,54 arasında ise populasyon dörde ayrılmaktadır.
- r 'nin, yaklaşık 3,57 değerinden sonra populasyon değeri kaotik davranmaya başlamaktadır.
- r 'nin, 4 değerinden sonra populasyon değeri 0 ve 1 aralığından çıkmaktadır.

Lojistik haritasının r 'ye bağlı davranışını en açık bir biçimde bifurkasyon diyagramı (bifurcation diagram) gösterir. Bifurkasyon diyagramı kaos teorisinde kullanılan haritalardan bir tanesidir. Kaos teorisinde göz ardı edilebilir hataların belli bir iterasyondan sonra oluşturdukları hareketlerin grafik ifadesi harita olarak adlandırılır. Bahsi geçen bu haritanın r ye bağlı diyagramı Şekil 1'de gösterilmiştir.

Şekil 1: Lojistik Bifurkasyon Diyagramı



Bifurkasyon diyagramı denklemin kaotik yapısını göstermektedir. Başlangıç koşullarına hassas bağıllık fenomeni ise yapılan bir deneyle ortaya çıkmaktadır. Bu deneyde $r=3,7$ alınıp başlangıç populasyon değeri olan x_0 değeri 0,7 alınmıştır. Lojistik haritanın grafik olarak ifade edilmesi gerekirse Şekil 2'de x_0 ile x_0' 'da olan çok küçük bir oynamanın iterasyonlarla nasıl büyük bir hataya yol açtığı görülebilmektedir. x_0' değeri 0,7000000001 alınıp, onuncu basamaktaki bir birimlik oynamanın $x_0 - x_0'$ hata diyagramındaki etkisi görülmektedir. Hesaplamaların özeti aşağıdaki gibidir;

x_n için formül aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$x_0 = 3,7 * 0,7000000000 * (1 - 0,7000000000) = 0,777000000$$

Bu şekilde başlayan hesaplama iterasyonun değişik adımlarında değişik değerler alırken bizim örneğimizde 400. iterasyona gelindiğinde hesaplama ve aldığı değer aşağıdaki gibi olmaktadır;

$$x_{400} = 3,7 * 0,68237032 * (1 - 0,68237032) = 0,80194194$$

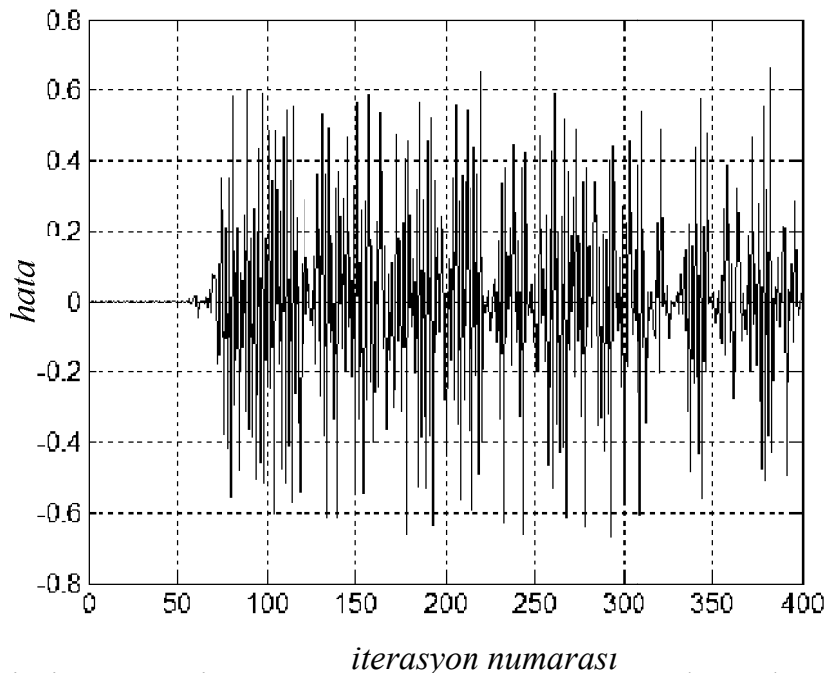
x_n' için ise hesaplamalar neticesinde 0. iterasyon ve 400. iterasyon için aşağıdaki sonuçlar elde edilmektedir.

$$x_0' = 3,7 * 0,7000000001 * (1 - 0,7000000001) = 0,777000000$$

$$x_{400}' = 3,7 * 0,45256952 * (1 - 0,45256952) = 0,91667630$$

Bu iki hesaplamada görüleceği üzere son iterasyona gelindiğinde iki hesaplama arasında bariz bir fark gözlenmektedir. Bu farka kaos teorisinde hata adı verilmektedir. Aynı şekilde iterasyonlar boyunca devam edildiğinde aşağıdaki hata diyagramı elde edilmektedir.

Şekil 2: Lojistik Hata Diyagramı



Görüldüğü gibi sistem 57. iterasyonda kaotik davranış göstermektedir, bu noktadan sonra hatalar önemli derecelere yükselmeye başlamaktadır. Lojistik haritası tek boyutlu bir haritadır. Bu çalışmada 2 boyutlu olan Hénon haritası kullanılmıştır.

2.1 Hénon Haritası

Michel Hénon iki boyutlu bir haritanın kaotik olabileceğini göstermiştir (1976). Hénon haritası iki boyutlu bir düzlemde (x_n, y_n) noktalarını doğrusal olmayan iki fonksiyon ile yeni bir noktaya taşır;

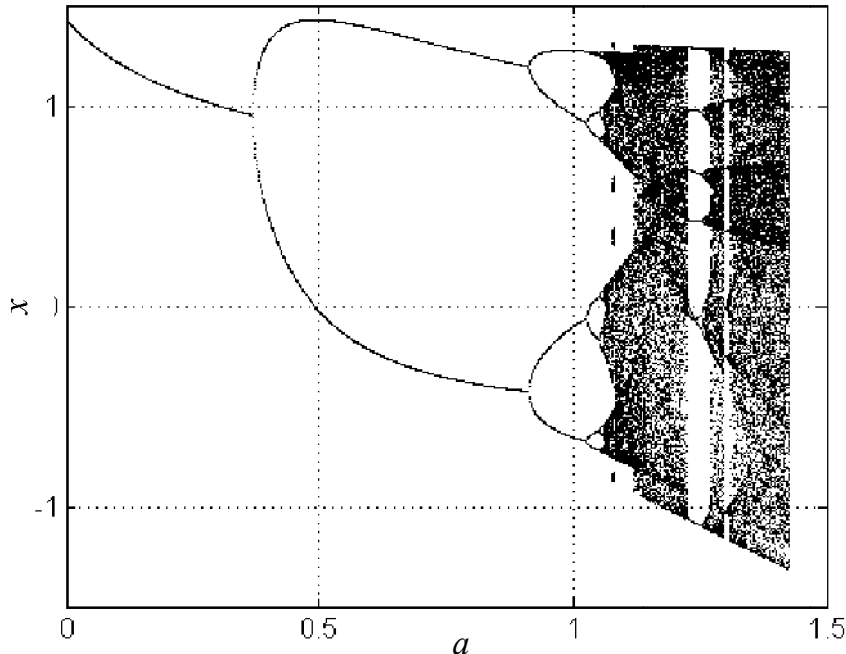
$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \quad (15)$$

$$y_{n+1} = bx_n \quad (16)$$

Lojistik haritasındaki gibi Hénon haritasında da kaotik olan ve olmayan bölgeler vardır. Sistemin parametreleri olan a ve b 'nin bazı değerleri için sistem kaotik yapı göstermektedir. Hénon (1976) makalesinde, $a=1,4$ ve $b=0,3$ noktalarının kararsız olduğunu vurgulamıştır.

$b=0,3$ için a parametresi 0'dan 1,5'a kadar değiştirilmiştir. Hénon haritasındaki x değişkeninin aldığı değerler şekil 3'te gösterilmektedir. 4000 iterasyon yapılmış, 3900 ve 4000 arası değerler diyagrama işlenmiştir. Hénon haritası için bu örneğimizde 3900 ile 4000 iterasyon sayısı kaotik durumu ifade etmeye yeterli olduğu için iterasyonlarda daha ileri gidilmeye gerek duyulmamıştır.

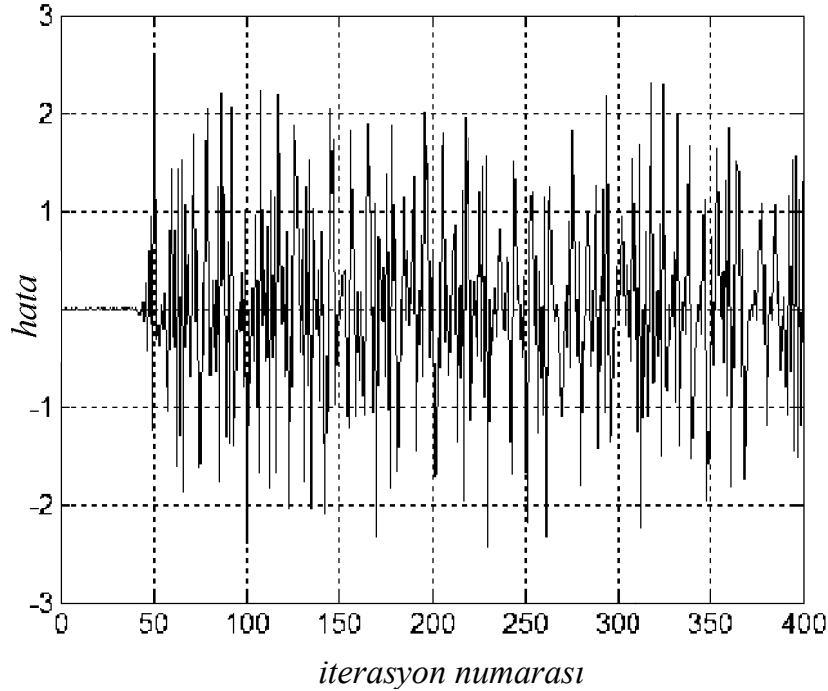
Şekil 3: Hénon Bifurkasyon Diyagramı



Hénon bifurkasyon diyagramında *yarıncı* $a=0,37$ değeri için ikiye ayrılma görülmektedir. Bu değere kadar 4000 iterasyon sonucunda x 'in alacağı değerlerin yaklaşacağı rakamlar belirlidir. $a=0,37$ noktasından sonra x ya üst kırılıma ya da alt kırılıma yakınsayacaktır. Kararsız olarak bilinen $b=0,3$ ve $a=1,4$ değerlerinde x 'in 4000 iterasyon sonrasında alabileceği değerler kaotiktir.

Bu noktalardaki kararsız durum, lojistik haritasında yapılan deneyin aynısının bu haritada da yapılmasıyla gösterilebilir. Bu deneyde $a=1,4$, $b=0,3$, $x_0=1$ ve $y_0=0$ alınmıştır. x_0' değeri yine onuncu ondalık basamakta bir birimlik hata yapılarak 1,0000000001 kabul edilmiştir. $x_0 - x_0'$ hata diyagramı şekil 4'te görülmektedir.

Şekil 4: Hénon Hata Diyagramı



Hénon haritasındaki iterasyonlar 48'e gelene kadar hata 0 olmakta, 48'den sonra ise kaotik davranış gösterip büyük değerler almaya başlamaktadır.

3. KAOTİK MARKOV

Hénon haritası geçişli yapısı ile Markov zincirine benzemektedir. 2 boyutlu harita yapısı Markov zincirine 2x2 matris olarak aşağıdaki gibi dönüştürülmüştür.

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \quad (17)$$

formülü

$$x_{n+1} = y_n + x_n \left(\frac{1}{x_n} - ax_n \right) \quad (18)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Buradan hareketle

$$x_{n+1} = [x_n \quad y_n] \begin{bmatrix} \frac{1}{x_n} - ax_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

şeklinde de gösterilebilir.

$$y_{n+1} = bx_n \quad (20)$$

olan ikinci formül ise bir düzenleme ile

$$y_{n+1} = bx_n + 0y_n \quad (21)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Buradan hareketle

$$y_{n+1} = [x_n \quad y_n] \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

şeklinde de gösterilebilir.

Bu durumu matris notasyonu ile göstermemiz gerekirse aşağıdaki sonuç elde edilecektir.

$$[y_{n+1} + x_{n+1}] = [x_n \quad y_n] \begin{bmatrix} \frac{1}{x_n} - ax_n & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Buradan da görüleceği üzere denklemin sağ tarafında kalan matris Markov Zincirleri'ne benzerlik göstermektedir. Bu benzerliği A geçiş matrisi olarak adlandırdığımızda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_n} - ax_n & b \\ x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

A geçiş matrisi $v = [x_n \ y_n]$ değerleri ile çarpıldığı zaman Hénon haritasını vermesine rağmen, Hénon haritası olduğu gibi Markov'a uyarlanamamaktadır. Markov'un temel olasılık prensipleri Hénon haritasına eklenerek Markov zincirinin başlangıç koşullarına uyulması sağlanmış ve Markov zincirinde kullanılacak yeni bir kaotik harita elde edilmiştir. Daha önceki çalışmalar incelendiğinde Markov Zincirleri ile Hénon haritası arasında bu şekilde bir ilişki tespit edildiği gözlenmemiştir.

$b=0,3$ değerinin kaotik olduğu bilindiğinden ve $0 \leq p_{ij} \leq 1$ kısıtını sağladığından b değeri değiştirilmemiştir. $b=0,3$ için p_{11} başlangıç değeri aşağıdaki gibi olmaktadır (12).

$$p_{11} = \frac{1}{x_0} - ax_0 = 1 - b = 0,7 \quad (25)$$

Fakat $a=0$ ve $x_0=1$ başlangıç değeri için bu eşitlik sağlanamaktadır. Eşitliğin sağlanıp Markov zinciri oluşturabilmek için geçiş matrisinin p_{11} değerine bir c parametresinin eklenmesi önerilmektedir. Bu parametre p_{11} değerini $0,7$ değerine eşitleyecektir. Eklenen bu c parametresinin eklenme sebebi Markov Zincirleri'ndeki olasılık toplamının sağlanmasıdır.

$$\frac{1}{x_0} - ax_0 + c = 0,7 \quad (26)$$

$$c = 0,7 - \frac{1}{x_0} + ax_0 \quad (27)$$

Bu sayede p_{11} değeri $0,7$ 'e eşitlenmiş olacaktır. c parametresi a ve x_0 değerlerine bağlıdır. $a=0$ ve $x_0=1$ başlangıç değerleri için $c=-0,3$ olacaktır. Markov zinciri artık aşağıdaki yapıyı almıştır.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_n} - ax_n + c & b \\ x_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Yeni harita ise,

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 + cx_n \quad (29)$$

$$y_{n+1} = bx_n \quad (30)$$

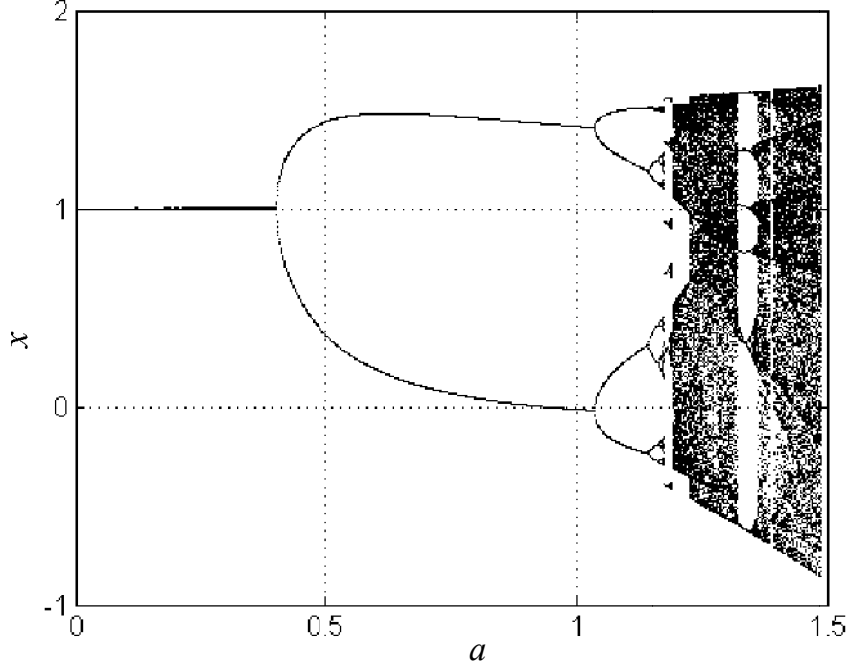
şeklini almıştır.

a parametresini 0 dan $1,5$ değerine kadar değiştirerek, $a-x$ bifurkasyon diyagramı çizilmiştir. c parametresi kaotik yapıyı bozmamış, Markov başlangıç kısıtlarına uyan (13) $x_0=1$, $y_0=0$ başlangıç değerleri ve $b=0,3$ için Hénon haritasındaki bifurkasyon diyagramına benzer bir diyagram şekil 5'te elde edilmiştir. Bu diyagramda da 4000 iterasyon yapılmış, 3900 ile 4000 arası değerler grafiğe işlenmiştir.

Yapılan hesaplamalar neticesinde bu haritayı diğer Hénon haritasından farklı kılan $a=0,4$ noktasına kadar bütün a değerleri için x 'in 1 değerine yakınsamasıdır. Diğer bir deyişle $a=$

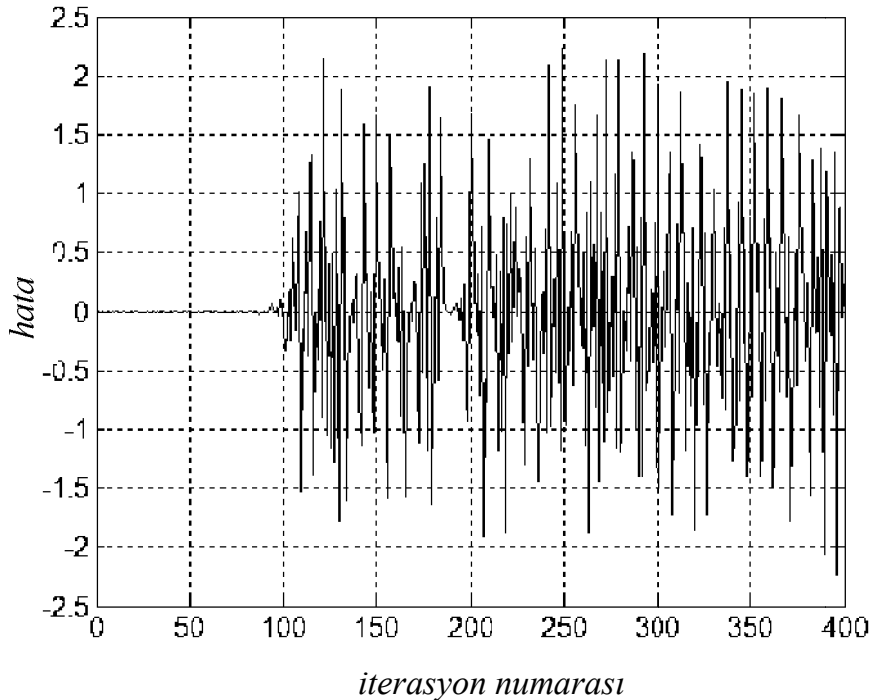
0,4 noktasında gelene kadar 4000 iterasyon sonra x 'in 1 olacağı . $a=0,4$ noktasından sonra Hénon haritasındaki gibi ikiye ayrılma, yaklaşık $a=1,03$ değerinden sonra da 4'e ayrılma görülmektedir. a parametresi 1,5 değerine yaklaşmaya başladığında, x değerinin yakınsama değeri bilinmemektedir.

Şekil 5: Kaotik Markov Bifurkasyon Diyagramı



$a=1,4$, $b=0$, parametreleri ile $x_0=1$ ve $y_0=0$ başlangıç değerleri için hata deneyi yapılmıştır. x_0' başlangıç değerinde onuncu ondalık basamakta 1 birim hata yapıp başlangıç değeri $x_0' = 0,9999999999$ seçilmiştir. Yapılan deney sonucunda şekil 6'daki $x_0 - x_0'$ hata diyagramı elde edilmiştir.

Şekil 6: Kaotik Markov Hata Diyagramı



Yeni haritada yapılan deneyde 96. iterasyona kadar $x_0 - x'_0$ hata değeri 0'a yakın olmakla beraber, 96. iterasyondan sonra dalgalanma başlamış ve hatalar büyük rakamlara ulaşmıştır.

Bu ekleme işlemi neticesinde kaotik harita üzerinde sonuç değerlerinin kayması dışında bir değişiklik gözlenmemektedir. Bu değişiklik ise yapının kaotik durumundan çıkması için bir gerekçe oluşturmamaktadır.

SONUÇ

Markov zincirleri ile bir sürecin veya sistemin gelecekteki durumuna ilişkin tahminler yapılabilmektedir. İşletmelerde karşılaşılan bazı sorunlar bu özelliği taşımaktadır ve Markov zincirleri ile modellenmektedir. Örneğin, riskli alacaklar takibi, döviz paritelerinin ve borsa değerlerinin tahmini, ödemeler dengesi gibi işletme ile ilgili konular bu gruba girmektedir. İşletmelerde karşılaşılan bu gibi sorunlar içinde kaotik davranış sergileyen veri setlerinin varlığının tespiti halinde Markov zincirinin yetersiz kalma ihtimali vardır. Burada bahsedilen “kaotik davranış” kavramı, işletmelerde karşılaşılan stokastik süreçlerin gelecekteki durumlarının belirsizliğini ve bilinemezliğini göstermemekte, belirsizliğinin bilinebileceğini göstermektedir. Diğer bir deyişle, bu makalede amaç, işletmelerde Markov zinciri ile tahmin edilmek istenen kaotik zaman serisinin bir değerinin belirsiz olduğunu kanıtlamak değil, kaotik sistemler için uygulanabilecek bir kaotik markov zinciri modeli ile belirsiz olduğu bilinen veri seti için çözüm sunmaktır.

Özetle, bu çalışmada kaotik bir Markov zincirinin varlığı araştırılmış, bir model geliştirilmesi amaçlanmıştır. Elde edilen bulgular ile aşağıdaki yorumlara ulaşılmıştır:

- Hènon benzeri bir haritanın markov koşullarına uyabileceği ve bu markov zincirinin kaotik davranış gösterebileceği gözlenmiştir.
- Markov zincirlerinin kaotik bir yapı gösterebileceği tespit edilmiştir.
- Varolan haritaların Markov zincirlerinin prensiplerine uydurulduğu takdirde yeni haritalar ortaya çıkabileceği saptanmıştır.
- Markov zincirlerinin yetersiz kaldığı, beklenen uzun dönem denge koşullarına ulaşılmadığı görüldüğü takdirde, sistemin kaotik özellik gösterip göstermediğine bakılmasının yarar sağlayabileceği ortaya çıkmıştır.

Bu bilgiler ışığında Markov zincirleri ile Kaos teorisinin beraber kullanılabilmesi gözlemlenmiştir. Diğer kaotik haritaların Markov zincirine uyarlanması çalışmalarını yapılması, teorik olan bu projelerin işletmelerde uygulama alanlarının bulunması ve örneklendirilmesi önerilmektedir.

KAYNAKÇA

DURRETT, R., 1996, **Probability Theory and Examples, 2nd Ed.**, California A.B.D., Duxbury Press.

FRANK T.D., 2009, “*Chaos from nonlinear Markov processes: Why the whole is different from the sum of its parts*”, **Physica A, Elsevier**, Vol. 388, S: 4241-4247

FRANK T.D., 2008, “*Nonlinear Markov processes*” **Physics Letters A, Elsevier**, Vol. 372, S: 4553-4555

GRINSTEAD, C.M., SNELL, J.L., 1998, **Introduction to Probability**, A.B.D., American Mathematical Society.

HÉNON. M., 1976, “*A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor*”, **Communications in Mathematical Physics, Springer-Verlag**, Vol. 50, S: 69-77.

KELLERT, S., 1993, **In the Wake of Chaos**, Chicago U.S.A, University of Chicago Press.

LORENZ, E.N., 1963, “*Deterministic Nonperiodic Flow*”, **Journal of Atmospheric Sciences**, Vol. 20, S: 130-141

MACKERNAN, D., BASIOS, V., 2009 “*Local and global statistical dynamical properties of chaotic Markov analytic maps and repellers: A coarse grained and spectral perspective*”, **Chaos, Solitons and Fractals, Elsevier**, Vol. 42, sa. 291-302

MAY, R.M., 1976, “*Simple mathematical models with very complicated dynamics.*” **Nature**, Vol. 261, S: 459-465.

MEYN, S.P., TWEEDIE, R.L., 2005, **Markov Chains and Stochastic Stability**, New York A.B.D., Springer-Verlag.

NORRIS, J.R., 1997, **Markov Chains**, Cambridge A.B.D., University of Cambridge Press

PHILIPPE, B., SAAD, Y., STEWART, W.J., 1992, “*Numerical Methods in Markov Chain Modeling*”, **Operations Research, Informis**, Vol.40, No.6, S: 1156-1179

SCHUSTER, H.G., JUST, W., 2005, **Deterministic Chaos, An Introduction 4th Ed**, Weinheim, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KgaA.

STROGATZ, S.H., 1994, **Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering**, Massachusetts A.B.D., Perseus Books.

TAMARA, A.C., TAPIA, R.A., PAPAKONSTANTINO, A., 2000, **Linear Algebra – An Introduction to Linear Algebra for Pre-Calculus Students**, A.B.D., Rice

TİMOR M., 2001, **Yöneylem Araştırması ve İşletmecilik Uygulamaları**, İstanbul, İ.Ü. Yayınevi.

WILLIAMS, G.P., 1997, **Chaos Theory Tamed**, Washington D.C. A.B.D., Joseph Henry Press.