

## MODÜLER ARİTMETİK KAVRAMI İLE İLGİLİ ÖĞRENME GÜÇLÜKLERİNİN BELİRLENMESİ\*

Onur COŞKUN\*\*  
Gürsel GÜLER\*\*\*  
Ramazan DİKİCİ\*\*\*\*

### ÖZET

Bu araştırmanın amacı 9. sınıf öğrencilerinin modüler aritmetik ve özellikleri konusundaki öğrenme güçlüklerini belirlemektir. Araştırmanın örneklemini Erzurum ilinde 2007–2008 eğitim-öğretim yılında farklı iki lisede öğrenim gören 164 dokuzuncu sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Araştırmada hem nicel hem de nitel yöntemler kullanılmıştır. Araştırmanın verileri, modüler aritmetik ve özellikleri teşhis testi ve öğrencilerle yapılan görüşmelerden elde edilmiştir. Sonuç olarak öğrencilerin çoğunlukla bölme algoritması ve denklik sınıfları ile ilgili öğrenme güçlüklerine sahip oldukları tespit edilmiştir.

*Anahtar sözcükler:* Matematik öğretimi, modüler aritmetik, öğrenme güçlüğü.

## DETERMINING DIFFICULTIES IN THE LEARNING OF THE CONCEPT OF MODULAR ARITHMETIC

### ABSTRACT

The aim of this study was to determine the difficulties in learning the subject of modular arithmetic and its properties by the 9th grade students. The sampling of the study consisted of a total of 164 9th grade students enrolled in two different High Schools in Erzurum province of Turkey in the academic year of 2007-2008. In this study both qualitative and quantitative methods were used. Data was collected by Modular Arithmetic and Its Properties Identification Test (MAPIT) and interviews conducted with the students. It was found that the students mostly had difficulty in learning division algorithm and equivalence classes.

*Keywords:* Mathematics teaching, modular arithmetic, difficulty in learning.

### GİRİŞ

Matematik, herkesin en azından zorunlu temel eğitime başladığında karşılaştığı, sevdiği ya da nefret ettiği, belki de korktuğu bir ders, bir bilim dalıdır. Matematiği sevmek, anlamak ve öğrenmek onu doğru tanımakla

\* Bu çalışma ilk yazarın yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

\*\* Öğretmen, Ticaret Meslek Lisesi, Başakşehir, onurcoskun@gmail.com

\*\*\* Araş.Gör., Atatürk Üniversitesi, K.K.Eğitim Fakültesi, gguler@atauni.edu.tr

\*\*\*\*<sup>1</sup> Prof. Dr. Atatürk Üniversitesi, K.K.Eğitim Fakültesi, rdikici@atauni.edu.tr

başlar. Eğer matematik yaşamımızı kolaylaştıran, günlük yaşantımızda her an karşımıza çıkan problemlerle baş edebilmek için, mantıklı, akılcı düşünmenin yollarını açan, olayları daha tutarlı, daha yansız değerlendirmemizi sağlayan, yaşantımızı renkli, eğlenceli kılan bir destek ise onu anlamaya çalışmak tercihten öte sorumluluk halini almaktadır (Umay, 2002).

Günümüzde, okullardaki matematik öğretiminin gerçek hayat ile uyumsuz olması, öğrencilerin okulda alınan bilgi ve becerileri gerçek hayatta kullanmada, problemleri çözmede yetersiz kalmaları problemler üzerinde düşünmek ve çözüm stratejileri üretmek yerine, işlemlerle çabucak sonuca ulaşma çabaları bu konudaki alan araştırmalarının yoğunlaşmasına yol açmıştır (Altun, 2007). Matematik öğretimi alanında Türkiye’de yapılan araştırmalar (Baki, 2008; Dikici & İşleyen, 2003; Durmuş, 2004; Tatar, 2006; Şandır vd., 2007) birçok öğrenci ve öğretmen adayının matematiksel kavram ve süreçleri anlamlandırmada sorun yaşadıklarını ve bunun bir sonucu olarak matematik dersleri ile ilgili düşüncelerinin genellikle olumsuz olduğunu ortaya koymaktadır.

Matematik öğretiminin her aşamasında sorunlar yaşandığı bir gerçektir. Son yıllarda bu sorunların saptanması ve giderilmelerine yönelik çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmaların bir bölümü de öğrencilerin kavram yanlışlarını ve matematikteki öğrenme güçlüklerini belirlemek ve çözüm önerileri sunmaya yöneliktir (Ersoy & Erbaş, 2005; Poon & Leung, 2010; Durmuş, 2004; Tall, 1993; Dikici & İşleyen, 2003; Yosuf & Rahman, 2001; Weber, 2001). Matematiğin birikimli bir bilim dalı oluşu, başka bir deyişle, daha önceden edinilmiş bilgilerin yeni bilgiler edinmede kullanılması, matematik eğitiminin başarıyla yürütülmesi için kavram yanlışlarının saptanması ve giderilmesi gereğini doğurmaktadır (Moralı, vd., 2004). Matematik öğretiminde karşılaşılan güçlüklerin belirlenmesi ve giderilmesi, öğrenme sürecinde öğrenciye yardımcı olunması ve rehberlik edilmesi, çağdaş eğitimin gereklerinden olduğu kadar öğretmenin de görevlerindedir (Ersoy & Ardahan 2003). Çünkü matematikteki öğrenmeler, birbirine çok sıkı şekilde bağlıdır, diğer bir deyişle, matematik ön-şart oluş ilişkilerinin güçlü olduğu bir alandır. Bu bakımdan bir davranış grubuyla ilgili öğrenme ve öğretme etkinliklerine başlamadan önce, bunlarla ilgili önceki öğrenmelerle kazanılmış olması gereken davranışların öğrencilerde var olup olmadığına bakılmalıdır. Bir öğrencide bazı davranışların henüz bulunmadığı anlaşılırsa, yeni konuyla ilgili öğretim etkinliklerine başlanılmadan önce, bu öğrencilerin gözlenmeyen davranışlarla ilgili tamamlama etkinliklerinde bulunulmalıdır (Baykul, 2005).

Çağdaş eğitim anlayışı, öğretmenleri, öğrenmeyi maksimum düzeyde gerçekleştirecek öğretim yaklaşımlarını seçme ve uygulama zorunluluğu ve sorumluluğu ile karşı karşıya bırakmıştır (Yılmaz 2001). Bütün branşlarda öğreticilerin anlattığı konu ile ilgili öğrencilerin ne tür öğrenme güçlüklerine sahip olduğunu bilmesi, bu öğretim yaklaşımlarını seçmede fayda sağlayacaktır (Tatar & Dikici, 2008). Literatürde öğrencilerin; kesir (Simon, 2006; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Zembat, 2007), üslü ve köklü sayılar (Cengiz, 2006; Orhun, 1998; Şenay, 2002), grafik okuma (Adıgüzel & Akpınar, 2004), fonksiyon (Dubinsky & Harel, 1992; Akkoç, 2005; Bayazit & Gray, 2004; Baki, 1998; Dikici & İşleyen, 2003; Bakar & Tall, 1992), olasılık (Çelik & Güneş, 2007; Watson & Moritz, 2002), ikili İşlem (Tatar, 2006; Zaslavsky & Peled, 1996), limit (Akbulut & Işık, 2005; Williams, 1991; Tall, 1990), süreklilik (Hitt, 1998), türev ve diferansiyel (Ubuz, 2001; Artigue vd., 1990; Rasmussen, 1998), tümevarım (Baker, 1996; Baştürk & Zeybek, 2007), integral (Yosuf & Rahman, 2001; Rasslan & Tall, 2002) kavramları ile ilgili kavram yanlışlarını ve öğrenme güçlüklerini belirlemek ve çözüm önerileri getirmek için yapılmış çalışmalar bulunmaktadır.

Gerçek yaşam durumlarıyla ilişkilendirilebilen matematik konularının öğrencilere daha anlamlı geldiği (Altun, 2007) düşünüldüğünde; takvim problemleri, şifreleme yapma, barkod şifreleri oluşturma, vb., alanlarının öğrenilmesinde temel oluşturduğu düşünüldüğünde modüler aritmetik konusundaki öğrenme güçlüklerinin tespiti önem arz etmektedir.

Bu araştırmanın amacı 9. sınıf öğrencilerinin modüler aritmetik ve özellikleri konusundaki öğrenme güçlüklerini tespit etmektir. Elde edilecek verilerin, konunun hedef-davranışlar düzeyinde kavratılması sırasında oluşan sorunların giderilmesinde eğitimcilerle kaynak olacağı düşünülmektedir. 9.sınıf matematik dersi müfredatında yer alan ve (MEB, 2005) tavsiyesi ile 6 ders saati süre ayrılan modüler aritmetik konusundaki öğrenme güçlükleri üzerine henüz bir araştırma yapılmamış olması ve modüler aritmetik konusunun günlük yaşam durumlarıyla olan yakın ilişkisi göz önüne alındığında araştırma bu alandaki eksikliği giderebilecektir.

## YÖNTEM

Bu çalışmada nicel ve nitel araştırma yöntemleri birlikte kullanılmıştır. Araştırmanın nicel bölümünde dokuzuncu sınıf öğrencilerine Modüler Aritmetik ve Özellikleri Teşhis Testi (MAÖTT) uygulanmıştır. MAÖTT puanlarına göre belirlenen 21 dokuzuncu sınıf öğrencisi ile yarı-yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Araştırmanın hacim olarak çok yer

tutmaması açısından, araştırmaya en çok katkı sağlayacağı düşünülen 3 görüşmeye bulgular bölümünde yer verilmiştir.

### 2.1. Örneklem

Araştırmanın örneklemini 2007–2008 eğitim-öğretim yılında Erzurum ilinde bulunan iki ortaöğretim kurumunda amaçlı örneklem yöntemlerinden tipik durum örnekleme yöntemine göre belirlenen 164 dokuzuncu sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Amaçlı örnekleme; çalışmada cevabı aranan problemleri aydınlatmak açısından zengin bilgi elde edilebilecek durumların seçimidir şeklinde tanımlanmaktadır (Patton, 2002). Başka bir deyişle amaçlı örnekleme, evrenin soruna en uygun bir kesimini gözlem konusu yapmak demektir (Sencer, 1989).

### 2.2. Veri Toplama Araçları

Araştırmada kullanılan Modüler Aritmetik ve Özellikleri Teşhis Testi (MAÖTT) Milli Eğitim Bakanlığının Orta Öğretim matematik dersi öğretim programındaki kazanımlara uygun olarak hazırlanmıştır. Modüler aritmetik konusundaki öğrenme güçlüklerini belirlemek amacıyla Bloom Taksonomisinin bilgi, kavrama ve uygulama düzeyinde sırasıyla 7, 6, 7 adet açık uçlu sorudan oluşan MAÖTT öğrencilere yöneltilmiştir. Bilgi basamağında örnek bir soru,

$$619 \equiv x \pmod{6} \text{ ve } -345 \equiv y \pmod{11} \text{ ise } x + y \text{ yi bulunuz?}$$

Kavrama basamağında örnek bir soru,

$a$  tamsayısı 7 ile bölündüğünde kalan 3,  $b$  tamsayısı 7 ile bölündüğünde kalan 2 ise  $a^3b^2$  sayısı 7 ile bölündüğünde kalan ne olur?

Ve uygulama basamağında örnek bir soru

Bugün günlerden pazartesi ise 150 gün önce doğan bir çocuk hangi gün doğmuştur?

şekindedir. MAÖTT nin 1., 7., 8. ve 12. soruları modüler aritmetiğin tanımsal bilgileri, 4., 5., 13., 18. ve 19. soruları modüler aritmetiğin işlemsel bilgileri, 9. ve 10. soruları modüler aritmetiğin özellikleri, 2., 3., 11. ve 20. soruları modüler aritmetikte denklemlerin çözümü, 6., 15. ve 17. soruları modüler aritmetik ile bağıntı ve fonksiyon konularının örtüştüğü, 14. ve 16. soruları modüler aritmetiği takvim problemlerine uygulayabilme ile ilgili öğrenme güçlüklerini ölçmek amacıyla hazırlanmıştır.

MAÖTT nin güvenilirlik çalışması için yapılan pilot çalışmada, test farklı iki ortaöğretim kurumunda öğrenim gören toplam 150 dokuzuncu sınıf

öğrencisine uygulanmıştır. Elde edilen veriler SPSS paket programına aktarılmış ve Cronbach Alpha( $\alpha$ ) güvenilirlik katsayısı 0,79 olarak hesaplanmıştır. MAÖTT nin geçerliliği için bu alandaki uzmanların görüşleri alınmış ve konu ile ilgili kazanımları ölçebilecek düzeyde olduğu onaylanmıştır.

**Tablo 1:** Öğrencilerin Modüler Aritmetik ve Özellikleri Teşhis Testi Cevaplarına Karşılık Gelen Puan Değerleri

Cevap Kategorisi	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Boş
Puanlar	2	1	0	0

Öğrencilerin modüler aritmetik ve özellikleri konusundaki öğrenme güçlüklerini ayrıntılı olarak belirlemek amacıyla MAÖTT puanlarına göre belirlenen 21 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmış ve bunlardan 3 tanesine bulgular bölümünde yer verilmiştir. Görüşmelerin başlangıcında her bir öğrenciye araştırmanın amacı açıklanmış ve analiz edilmek için sesli olarak kaydedilmiştir. Öğrencilerin sahip oldukları güçlüklerin nedenleri anlaşılmaya çalışılmıştır.

### 2.3. Verilerin Analizi

Araştırmadan elde edilen verilerin analizinde betimsel istatistik yöntemleri kullanılmıştır. Öğrencilerin öğrenme güçlüğüne sahip olduğu düşünülen cevaplarının bir bölümü ile görüşmelerden çalışmaya katkı sağlayacağı düşünülenler bulgular bölümünde verilmiştir. Ayrıca modüler aritmetik ve özellikleri teşhis testi sorularına verilen cevaplar tablo 1 deki gibi kodlanarak SPSS paket programında değerlendirilmiş ve her biri için yüzde-frekans hesaplamaları yapılmıştır.

## BULGULAR

### 3.1. Modüler Aritmetiğin Tanımsal Bilgilerine Ait Bulgular

9.sınıf öğrencilerine modüler aritmetik konusunda tanımsal öğrenme güçlüklerini belirlemek amacıyla 1, 7, 8 ve 12 numaralı sorular yöneltilmiştir.

**Tablo 2:** Öğrencilerin Tanımsal Bilgilerle İlgili Sorulara Verdikleri Cevapların Frekans ve Yüzde Dağılımı

Soru	Doğru f (%)	Kısmen Doğru f (%)	Yanlış f (%)	Boş f (%)
Soru1	47(28,7)	107(65,2)	9(5,5)	1(0,6)
Soru7	77(47,6)	11(6,7)	37(22,6)	39(23,8)
Soru8	34(20,7)	2(1,2)	32(19,5)	96(58,5)
Soru12	18(11)	102(62,2)	6(3,7)	38(23,2)

Öğrencilere modüler aritmetik konusunun temelini oluşturan bölme işleminde kalan bulma konusundaki öğrenme güçlüklerini belirlemek amacıyla 1. soru yöneltilmiştir. Öğrencilerin %28,7'si hem pozitif hem de negatif bir tamsayının bölme işleminden kalanı doğru bulmuşlardır. Öğrencilerin %93,3'ü sorunun birinci kısmını doğru cevaplarken %29,3'ü sorunun ikinci kısmını doğru cevaplamıştır. Öğrencilerin yaklaşık %6'sı negatif bir tam sayının pozitif bir tam sayıya bölümünden kalanı bulamamıştır. Bir öğrencinin bu soruya verdiği cevap Şekil.1 de verilmiştir.

**SORU 1.**  $619 \equiv x \pmod{6}$  ve  $-345 \equiv y \pmod{11}$  ise  $x + y$ 'yi bulunuz.

$619 \div 6 = 103$  (kalan 1)  $619 \equiv 1 \pmod{6}$

$-345 \div 11 = 31$  (kalan 4)  $-345 \equiv -4 \pmod{11}$

$1 - 4 = -3$   
 $x + y \rightarrow$

Şekil 1. Bir Öğrencinin 1. Soru İçin Verdiği Cevap

Negatif bir tamsayının pozitif bir tamsayıya bölümünden kalanı bulma işleminde başarı oldukça düşüktür. Tablodan, öğrencilerin %58,5'inin 8. soruyu boş bıraktıkları ve yalnız %11'inin 12. soruya doğru cevap verdikleri görülmektedir.

### 3.2. Modüler Aritmetiğin İşlemsel Bilgilerine Ait Bulgular

9. sınıf öğrencilerine modüler aritmetik konusunda işlemsel öğrenme güçlüklerini belirlemek amacıyla 4, 5, 13, 18 ve 19 numaralı sorular yöneltilmiştir.

**Tablo 3:** Öğrencilerin İşlemsel Bilgilerle İlgili Sorulara Verdikleri Cevapların Frekans ve Yüzde Dağılımı

Soru	Doğru f (%)	Kısmen Doğru f (%)	Yanlış f (%)	Boş f (%)
Soru 4	82 (50)	9(5,5)	25(15,2)	48(29,3)
Soru 5	44(26,8)	44(26,8)	28(17,1)	48(29,3)
Soru 13	48(29,3)	7(4,3)	34(20,7)	75(45,7)
Soru 18	82(50)	45(27,4)	9(5,5)	28(17,1)
Soru 19	32(19,5)	6(3,7)	49(29,9)	77(47)

Öğrencilere işlemsel bilgilerini ölçmek amacıyla verilen bir modüle göre bir tamsayının tersini bulma ile ilgili 19. soru yöneltilmiştir. Öğrencilerin %29,9 u bu soruyu yanlış cevaplamış, %47 si boş bırakmış ve yalnız %19,5 i doğru cevaplamıştır. Bu soruya verilen cevaplar arasında şekil.2 de belirtilmiş olanı oldukça dikkat çekicidir.

$$3 \cdot 3 \equiv x \pmod{5} \quad x=3$$

$$2 \cdot 32 \equiv 1 \pmod{5} \quad x=2$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

**Şekil 2.** 19. Soru İçin Öğrencilerin Ağırlıklı Olarak Verdiği Cevap (f=30)

Öğrenciler orunun  $Z/5$  kümesinde çözülmesi gerektiğinin farkında olmamış,  $\mathbb{R}$  reel sayılarda çalışıldığını düşünerek soruyu cevaplamış ve yine kapalılık özelliğini göz ardı etmişlerdir (f=30, %18,3). Bu şekilde cevap veren bir öğrenci ile yapılan görüşme aşağıdadır.

*Görüşmeci:* Soruyu nasıl çözdüğünü anlatır mısınız?

*Öğrenci:* 373'ü  $Z/5$  kümesinde 3 buldum, sonra 232'yi de  $Z/5$  kümesinde 2 buldum. Sonra 3'ün tersini  $1/3$ , 2'nin tersini de  $1/2$  aldım, ikisini topladım  $5/6$  buldum.

*Görüşmeci:*  $Z/5$  kümesinin elemanlarını yazar mısınız?

*Öğrenci:* 4, 3, 2, 1 ve 0.

*Görüşmeci:*  $1/3$  sayısı  $Z/5$ 'in elemanı mıdır?

*Öğrenci:* Değildir(düşünüyör)... Ama -1 demiş( kuvvetin -1 olduğunu belirtiyor).

*Görüşmeci:* Bir elemanın tersi nasıl bulunur?

*Öğrenci:* Birim elemanı buluyoruz, o hizada gidip yukarı çıkıyoruz.

Tablodan faydalanıyoruz.

Görüşme sırasında öğrenci cevabının doğru olduğunu ısrarla savunduğundan bir kavram yanlışlığına sahip olduğu düşünüldüğünden tanım kümesinin değişmesi durumunda bir elemanın tersinin değişebileceği kendisine anlatılmıştır. İşlem konusu anlatılırken yalnız tablo kullanılarak soru çözülmesi ya da bu tür soruların çözümüne ağırlık verilmesi, işlem özelliklerinin öğrenciler tarafından tam olarak anlaşılmadan soru çözümlerine geçilmesi öğrencilerde öğrenme güçlüklerine sebep olmaktadır.

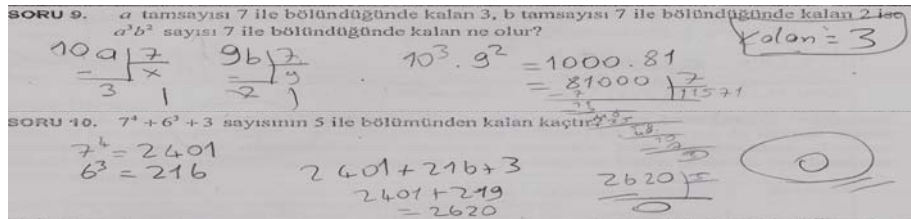
### 3.3. Modüler Aritmetiğin Özelliklerine Ait Bulgular

9. sınıf öğrencilerine modüler aritmetiğin özellikleri konusundaki öğrenme güçlüklerini belirlemek amacıyla 9 ve 10 numaralı sorular yöneltilmiştir.

**Tablo 4:** Öğrencilerin Modüler Aritmetiğin Özellikleri İle İlgili Sorulara Verdikleri Cevapların Frekans ve Yüzde Dağılımı

Soru	Doğru f (%)	Kısmen Doğru f (%)	Yanlış f (%)	Boş f (%)
Soru 9	80(48,8)	28(17,1)	36(22)	20(12,2)
Soru 10	91(55,5)	37(22,6)	17(10,4)	19(11,6)

Öğrenciler, 9 ve 10 numaralı sorulara sırasıyla %48,8 ve %55,5 oranında doğru cevap vermekle birlikte yanlış cevap verme oranı sırasıyla %22 ve %10,4 olmuştur. Bu sorulara verilen cevaplardan bir örnek Şekil.3 de verilmiştir.



**Şekil 3.** Bir Öğrencinin 9. ve 10. Sorular İçin Verdiği Cevaplar

Şekil.3 deki öğrencinin örneğinde olduğu gibi öğrenciler genel olarak bölme işleminde kalan bulma dışında hiçbir modüler aritmetik özelliğini kullanmamışlardır. 9. soruyu 101 öğrenci (%61,6) değer vererek çözmüştür. 10. soruda ise 31 öğrenci (%18,9) verilen toplamı hesaplamış ve 5 ile bölümünden kalanı bulmuştur. 9. soruyu değer vererek çözen öğrencilerden



51 i  $a = 10$ ,  $b = 9$  ve 46 sı  $a = 3$ ,  $b = 2$  çiftini kullanmıştır. 4 öğrenci ise daha büyük sayı çiftini kullanmayı tercih etmiştir. Öğrencilerin harfli ifadeleri kullanmaktan kaçındıkları ve sayısal değerler vererek soruları çözmeyi tercih ettikleri görülmektedir. Ayrıca,  $Z/5$  te çözüm istenen 10. soru da 17 öğrencinin kapalılık özeliğine dikkat etmedikleri görülmüştür.

### 3.4. Modüler Aritmetikte Denklem Çözümlerine Ait Bulgular

9. sınıf öğrencilerine modüler aritmetikte denklem çözümü konusundaki öğrenme güçlüklerini belirlemek amacıyla 2, 3, 11 ve 20 numaralı sorular yöneltilmiştir.

**Tablo 5:** Öğrencilerin Modüler Aritmetikte Denklem Çözümü İle İlgili Sorulara Verdikleri Cevapların Frekans ve Yüzde Dağılımı

Soru	Doğru f (%)	Kısmen Doğru f (%)	Yanlış f (%)	Boş f (%)
Soru 2	99(60,4)	7(4,3)	30(18,3)	28(17,1)
Soru 3	112(68,3)	8(4,9)	28(17,1)	16(9,8)
Soru 11	29(17,7)	68(41,5)	29(17,7)	38(23,2)
Soru 20	105(64)	14(8,5)	26(15,9)	19(11,6)

Tablodan anlaşılacağı gibi 2, 3 ve 20. sorulara öğrenciler sırasıyla %60,4, %68,3, %64 oranında doğru cevap vermişlerdir. En düşük doğru cevabın verildiği 11. soruda bu oran %17,7 ve boş bırakılma oranı ise %23,2 olmuştur. Doğru cevap verme oranının oldukça yüksek olduğu 2. ve 3. sorularda öğrencilerin hiçbir modüler aritmetik işlemi yapmaksızın değer vererek sonuca ulaştıkları görülmüştür. Yine 2 ve 3. sorularda  $x$  in alabileceği en küçük doğal sayı istendiği halde  $x = -3$ ,  $x = 1/3$ ,  $x = -1/3$ ,  $x = 6/5$ ,  $x = 5/6$ ,  $x = -5$  gibi cevaplar verilmiştir. Öğrenciler 11. soruya ağırlıklı olarak Şekil 4 deki gibi cevap vermişlerdir.

$$x^2 + 4 + 1 = 3 + 1$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2$$

**Şekil 4.** 11. Soru İçin Öğrencilerin Ağırlıklı Olarak Verdiği Cevap (f=47)

Çözüm kümesinin kapalılık özelliğine dikkat edilmeden yazıldığı, denklik sınıfı ve modül kavramının bazı öğrenciler tarafından karıştırıldığı görülmektedir. 3 öğrenci bir tamsayının karesinin -1 olamayacağı düşüncesiyle çözüm kümesini boş bırakmıştır. Çözüm kümesinin elemanlarını tam olarak bulamayan öğrencilerden biri ile yapılan görüşme aşağıda verilmiştir.

*Görüşmeci:* 11.sorunun çözümünü anlatır mısın?

*Öğrenci:*  $Z/5$  kümesinde çalışıyoruz,  $x$  i yalnız bırakabilmek için her iki tarafa 1 eklemek zorundayız.  $x^2 = \bar{4}$  oldu, buradan da  $x = \bar{2}$  oldu.

*Görüşmeci:* Hangi sayıların karesi 4 tür?

*Öğrenci:* 2 ve -2 nin.

*Görüşmeci:* Hangi sayı kümesinde çalışıyoruz?

*Öğrenci:*  $Z/5$  de olduğuna göre 2 dir.

*Görüşmeci:*  $Z/5$  de -2 olabilir mi?

*Öğrenci:* Olamaz, çünkü 0,1,2,3 ve 4 ten oluşur.

*Görüşmeci:* Hangi sayıların karesini 5 e böldüğümüzde 4 kalanını verir?  $Z/5$  deki sayıların karesini alır mısın?

*Öğrenci:* 1, 4, 9 ve 16

*Görüşmeci:*  $Z/5$  de 9 diye bir sayı var mı?

*Öğrenci:* Yoktur..demek ki elemanı değildir.

Öğrenci denklik sınıfları ile tamsayıları birbirine karıştırmakta, kapalılık özelliğine dikkat etmeye çalışarak sadece pozitif çözümü kabul etmekte, bulduğu negatif tamsayı değerini  $Z/5$  kümesinde yorumlayamamaktadır. Öğrenciler modüler aritmetikte denklem çözme konusunda ciddi öğrenme güçlüklerine sahiptirler.

### 3.5. Modüler Aritmetiğin Bağntı ve Fonksiyon ile ilişkilerine Ait Bulgular

9. sınıf öğrencilerine modüler aritmetiğin bağntı ve fonksiyon ile ilişkileri konusundaki öğrenme güçlüklerini belirlemek amacıyla 6, 15 ve 17 numaralı sorular yöneltilmiştir.

**Tablo 6:** Öğrencilerin Modüler Aritmetiğin Bağını Ve Fonksiyon İle İlişkileri İle İlgili Sorulara Verdikleri Cevapların Frekans ve Yüzde Dağılımı.

Soru	Doğru f (%)	Kısmen Doğru f (%)	Yanlış f (%)	Boş f (%)
Soru 6	61(37,2)	60(36,6)	1(0,6)	42(25,6)
Soru 15	61(37,2)	35(21,3)	34(20,7)	34(20,7)
Soru 17	32(19,5)	7(4,3)	82(50)	43(26,2)

Tablodan anlaşıldığı gibi öğrenciler 6. ve 15. sorulara %37,2 oranında doğru cevap vermişlerdir. 15. soruya öğrencilerin %20,7 si yanlış cevap vermişken, 6. soruya yalnız 1 öğrenci yanlış cevap vermiştir. 17. soruya öğrencilerin doğru cevap verme oranı %19,5 olurken, yanlış cevap verenlerin yüzdesi şaşırtıcı bir şekilde %50 olmuş ve bu soruyu boş bırakanların oranı %26,2 olmuştur. 69 öğrencinin 17. soruya verdiği cevap şekil 5 te verilmiştir.

$$f(x) = 5x + 4 \quad f^{-1}(x) = \frac{x-4}{5}$$

**Şekil 5.** 17. Soru İçin Öğrencilerin Ağırlıklı Olarak Verdiği Cevap (f=69)

Öğrencilerin yaklaşık olarak %50'si fonksiyonun tersini fonksiyonun tanım kümesini göz önüne almayarak  $\mathbb{Z}/7$  kümesi yerine,  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesinde bulmuşlardır.

### 3.6. Modüler Aritmetiğin Takvim Problemlerine Uygulanmasına Ait Bulgular

9. sınıf öğrencilerine modüler aritmetiğin takvim problemlerine uygulanması konusundaki öğrenme güçlüklerini belirlemek amacıyla 14 ve 16 numaralı sorular yöneltilmiştir.

**Tablo 7:** Öğrencilerin Modüler Aritmetiğin Takvim Problemlerine Uygulanması İle İlgili Sorulara Verdikleri Cevapların Frekans ve Yüzde Dağılımı.

Soru	Doğru f (%)	Kısmen Doğru f (%)	Yanlış f (%)	Boş f (%)
Soru 14	111(67,7)	33(20,1)	13(7,9)	7(4,3)
Soru 16	60(36,6)	40(24,4)	43(26,2)	21(12,8)

Tablodan, öğrencilerin %67,7 sinin 14. soruya doğru cevap verdiği %7,9 unun ise yanlış cevap verdiği görülmektedir. Yine öğrencilerin %36,6 sı 16. soruya doğru cevap verirken bu soruya yanlış cevap verenlerin oranı %26,2 olmuştur.

Öğrencilere, modüler aritmetiğin takvim problemine uygulanması konusundaki öğrenme güçlüklerini belirlemek amacıyla “Bugün günlerden pazartesi ise 150 gün önce doğan bir çocuk hangi gün doğmuştur?” sorusu yöneltilmiştir. Öğrenciler 14. soruyu ağırlıklı olarak Şekil 6 daki gibi cevaplandırmışlardır.

**Şekil 6.** 14. Soru İçin Öğrencilerin Ağırlıklı Olarak Verdiği Cevap (f=34)

Şekil6. dan görüldüğü gibi 34 öğrenci(%20,7) 14. sorudaki önceyi, sonra olduğu yanlış düşüncesiyle cevaplamıştır. Ayrıca öğrencilerin kalan bulduktan sonra soruda verilen güne kalan olarak 0 yerine 1 rakamını atadıkları görülmüştür. Bu şekilde cevap üreten bir öğrenci ile yapılan görüşme aşağıda verilmiştir.

*Görüşmeci:* Yaptığın işlemleri anlatır mısın?

*Öğrenci:* Burada 150 gün demiş, bir hafta 7 gün olduğundan 150’yi 7’ye böldüm, bölüm 21 ve kalan 3. Hangi gün doğduğu sorulmaktadır. Pazartesiden kalan üçü çıkardım cumartesiyi buldum.

*Görüşmeci:* Pazartesiden üç gün çıkarılırsa hangi gün bulunur?

*Öğrenci:* 3 gün geri geldim

*Görüşmeci:* Hangi günleri sayarak geri geliyorsun?

*Öğrenci:* Pazartesi, pazar, cumartesi. 3.gün cumartesi olur.

### TARTIŞMA ve SONUÇ

Öğrencilerin modüler aritmetik konusunun temelini oluşturan bölme algoritması kavramı ile ilgili öğrenme güçlüklerinin olduğu görülmektedir. Özellikle bölme algoritmasının simgesel gösteriminin modüler aritmetik notasyonu ile yazılmasının istendiği 8. soruda öğrenciler %50 oranında sorunun çözümünü boş bırakmışlardır. Soru hakkında öğrencilerin sadece %21,9 u yorum yapmıştır. Ayrıca bölme algoritması ve negatif tamsayı kavramlarının birlikte kullanıldığı 1. ve 6. sorularda başarı pozitif tamsayılarla ilgili olanlara göre oldukça düşmüştür.

Öğrenciler denklik sınıflarını yazarken ciddi güçlükler yaşamışlardır. Denklik sınıfları ile ilgili 7. soruda kümenin elemanlarını bulduktan sonra bunların negatif işaretlilerinin de kümeye ait olacağını düşünmüşlerdir. Ayrıca öğrenciler denklik sınıfı ile modül kavramını birbirine karıştırmışlardır.

Kapalılık özelliğinin birçok soruda öğrenciler tarafından önemsenmediği, soruların çözümünde bu hususun göz ardı edildiği görülmektedir. MAÖTT deki birçok sorunun çözümünde öğrenciler reel sayılar ya da rasyonel sayılar kümesinde işlem yapmışlardır. Yine modüler aritmetiğin özelliklerini kullanmanın kolaylıklarından maalesef faydalanmamış üslü sayıları hesaplamış ve sıklıkla dört işlem hataları yapmışlardır.

Öğrenciler, herhangi bir modüle göre denklem çözme sorularında deneme yanılma yoluyla çözüme ulaşmayı tercih etmişler ve bu tür sorularda bir bölme işleminde kalanı bulma haricinde hiçbir modüler aritmetik özelliğini kullanmamışlardır.

9. sınıf öğrencilerine problem çözmenin kısa yolu olarak öğretilenler gerçekte öğrenme güçlüklerine sebep olmaktadır. Bir negatif tamsayının herhangi bir modüle göre kalanını bulma sorusunda, öğrencilerin yaklaşık dörtte biri kalanın pozitif bir tamsayı olması gerektiğini bildiği halde negatif bir tamsayı bulmuşlardır. Ayrıca  $\mathbb{Z} / 7$  de bir fonksiyonun tersinin bulunması ile ilgili soruda, öğrencilerin %42 si reel sayılar kümesinde  $ax + b$  şeklindeki bir fonksiyonun tersini bulmuşlardır. Öğrenciler 14. soruya büyük ölçüde doğru cevap vermişler fakat bu tür problemlerde bazı öğrenciler kalan olarak 0 yerine 1 almışlardır.

Modüler aritmetik konusu anlatılmadan önce öğrencilerin, tamsayılarda bölme işlemi, bir işlemde kapalılık ve ters eleman özelliği, üslü sayılar, bir fonksiyonun tanım kümesi gibi gerekli ön-şart oluş ilişkilerindeki eksiklikler giderilmelidir. Öğrencilerin ciddi sorun yaşadıkları modüler aritmetik konusunda negatif tamsayılarla işlem yapabilme becerilerini geliştirmeye yönelik etkinlikler yapılmalıdır.

Gerçek hayat problemlerinde öğrenci başarısı artmaktadır (Altun, 2007). Modüler aritmetik konusu diğer alanlarla karşılaştırıldığında gerçek hayat problemlerine daha yatkındır. Bu nedenle ders kitapları hazırlama komisyonları ve öğretmenlerin bu durumu göz önünde bulundurmaları öğrencilerin konuyu öğrenmeye olan isteklerini artırabilir.

Bilgi teknolojisinin sunduğu olanaklardan yararlanılması, konuların farklı yöntem ve tekniklerle anlatılması kaçınılmazdır. Öğrenmeyi kolaylaştırıcı öğretim stratejileri geliştirerek öğrencilerin derse aktif katılımı sağlanmalı, düşüncelerini ifade edebilmeleri için fırsatlar tanınmalı ve iletişim güçleri artırılmalıdır.

#### KAYNAKLAR

- Adıgüzel, T., & Akpınar, Y. (2004). Improving School Children's Mathematical Word Problem Solving Skills Through Computer-Based Multiple Representations. *Proceedings of AECT 2004 Conference*, pp. 1-10.
- Akbulut, K., & Işık, A. (2005). Limit Kavramının Anlaşılmasında Etkileşimli Öğretim Stratejisinin Etkinliğinin İncelenmesi ve Bu Süreçte Karşılaşılan Kavram Yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 13, s. 497-512.
- Akkoç, H. (2005). Fonksiyon Kavramının Anlaşılması: Çoğul Temsiller Ve Tanımsal Özellikler. *Eurasian Journal of Educational Research*, Yıl 5, Sayı 20.
- Altun, M. (2007). *Orta Öğretimde Matematik Öğretimi*. 1.Baskı, Aktüel Alfa Akademi Bas.Yay.Dağ., Bursa.
- Artigue, M., Menigaux, J. & Viennot, L. (1990). Some Aspects Of Students' Conceptions And Difficulties About Differentials. *European Journal Physics*, 11, 262–267.
- Bakar, M. N., & Tall, D. O. (1992). Students' Mental Prototypes For Functions And Graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 23(1), pp. 39-50.
- Baker, J. D. (1996). Students' Difficulties With Proof By Mathematical Induction, *The Annual Meeting Of American Educational Research Association*, New York.
- Baki, A. (1998). Cebirle İlgili İşlem Yanılgılarının Değerlendirilmesi. III. *Ulusal Fen Bilimleri Eğitimi Sempozyumu Bildiriler Kitabı*, 46–49, KTÜ, Trabzon.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi*. Harf Eğitim Yayıncılık, Ankara.
- Baştürk, S., & Zeybek, N. (2007). 11. Sınıf Öğrencileri Seviyesindeki Dizi Kavramının Öğretiminin Öğretmenler Bağlamında İncelenmesi. *Türk Dünyası Matematik Sempozyumu*, s 1-14.
- Bayazit, İ., & Gray, E. (2004). Understanding Inverse Functions: The Relationship Between Teaching Practice And Student Learning. *Proceedings Of The 28th Conference Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education*, Vol 2 pp 103–110. Norway: Bergen University.
- Baykul, Y. (2005). *İlköğretimde Matematik Öğretimi*. 8.baskı, Pegem A Yayıncılık, Ankara.

- Cengiz, Ö. M. (2006). *Reel Sayıların Öğretiminde Bir Kısım Ortaöğretim Öğrencilerinin Yanılgıları ve Yanılgıları Üzerine Bir Çalışma*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Çelik, D., & Güneş, G. (2007). 7, 8 ve 9. Sınıf Öğrencilerinin Olasılık İle İlgili Anlama ve Kavram Yanılgılarının İncelenmesi. *Milli Eğitim Dergisi*, 173, 361-375.
- Dikici, R., & İşleyen, T. (2003). Bağını ve fonksiyon konusundaki öğrenme güçlüklerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12(1), 105–116.
- Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). Forward. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept Of Function: Aspects Of Epistemology And Pedagogy*, MAA Notes, Number 25 (pp. vii-ix). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Durmuş, S. (2004). Matematikte Öğrenme Güçlüklerinin Saptanması Üzerine Bir Çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12(1), 125–128.
- Ersoy, Y., & Ardahan, H. (2003). İlköğretim Okullarında Kesirlerin Öğretimi-II:Taniya Yönelik Etkinlikler Düzenleme. Matematikçiler Derneği, *Matematik Köşesi Makaleleri* www.matder.org.tr (25.01.2009).
- Ersoy, Y., & Erbaş, A. K. (2005). Kassel Projesi Cebir Testinde Bir Grup Türk Öğrencinin Genel Başarısı Ve Öğrenme Güçlükleri. *İlköğretim Online*, 4(1), 18–39.
- Hitt, F. (1998). Difficulties In The Articulation Of Different Representations Linked To The Concept Of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123-134.
- MEB, (2005). Ortaöğretim (9–12). Sınıflar Programları Tanıtım El Kitabı. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. *Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi*, Ankara.
- Moralı, S., Koroğlu, H. & Çelik, A. (2004). Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmen Adaylarının Soyut Matematik Dersine Yönelik Tutumları Ve Rastlanan Kavram Yanılgıları. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(1), s.161–175.
- Orhun, N. (1998). Cebir Öğretiminde Aritmetik İşlemlerdeki Üslü ve Köklü Çokluklardaki Yanılgıların Tespiti. *Atatürk Üniversitesi 40. Yıldönümü Matematik Sempozyumu*, 20-22 Mayıs. Erzurum.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative Research & Evaluation Methods*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Poon, Kin-Keung., & Leung, Chi-Keung. (2010). Pilot Study On Algebra Learning Among Junior Secondarystudents, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(1), 49 – 62.
- Rasmussen, C. L. (1998). Reform in Differential Equations: A Case Study of Students' Understandings and Difficulties. *The Annual Meeting of American Educational Research Association*, San Diego, CA.
- Rasslan, S., & Tall, D. (2002). Definitions And Images For The Definite Integral Concept. In Cockburn A.; Nardi, E. (eds.) *Proceedings of the 26th PME*, 4, 89-96.
- Sencer, M. (1989). Toplumbilimlerinde yöntem. *Beta Basım*, İstanbul.
- Simon, M. A. (2006). Key Developmental Understandings In Mathematics: A Direction For Investigating And Establishing Learning Goals. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), 359-371.
- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The Development Of Students' Understanding Of The Numerical Value Of Fractions. *Conceptual Change in Mathematics Learning and Teaching*, Special Issue of Learning and Instruction, 14, pp.503-518.

- Şandır, H., Ubuz, B., & Argün, Z. (2007). 9.Sınıf Öğrencilerinin Aritmetik İşlemler, Sıralama, Denklem Ve Eşitsizlik Çözümlerindeki Hataları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 32, 274–281.
- Şenay, Ş. C. (2002). *Üslü ve Köklü Sayıların Öğretiminde Öğrencilerin Yaptıkları Hatalar ve Yanılgıları Üzerine Bir Araştırma*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Tall, D. O. (1990). Inconsistencies In The Learning Of Calculus And Analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12 (3&4), 49–63.
- Tall, D. O. (1993). Students' Difficulties In Calculus, *Proceedings Of Working Group 3 On Students' Difficulties In Calculus. ICME-7*, Quebec, Canada, 13– 28.
- Tatar, E. (2006). *İkili İşlem Kavramı İle İlgili Öğrenme Güçlüklerinin Belirlenmesi Ve 4MAT Yönteminin Başarıya Etkisi*. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Tatar, E., & Dikici, R. (2008). Matematik Eğitiminde Öğrenme Güçlükleri. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 5(9), 183–193.
- Ubuz, B. (2001). First Year Engineering Students' Learning Of Point Of Tangency, Numerical Calculation Of Gradients And The Approximate Value Of A Function At A Point Through Computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 20, p.111-135.
- Umay, A. (2002). Öteki Matematik. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23, 275–281.
- Yılmaz, A. (2001). İşbirliğine Dayalı Öğrenme, Etkili Ancak İhmal Edilen Ya da Yanlış Kullanılan Bir Metot. *Milli Eğitim Dergisi*, 150.
- Yusof, Y. M. & Rahman, R. A. (2001). Students' Difficulties With Multiple İntegration: A Preliminary Study. *3rd Southern Hemisphere Symposium*, South Africa.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2002). School Students' Reasoning About Conjunction And Conditional Events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33, 59-84.
- Weber, K. (2001). Student Difficulty İn Constructing Proofs: The Need For Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101–119.
- Williams, S. (1991). Models Of Limit Held By College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 219-236.
- Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting Factors İn Generating Examples By Mathematics Teachers And Student Teachers: The Case Of Binary Operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 67–78.
- Zembat, İ. Ö. (2007). Sorun Aynı- Kavramlar; Kitle Aynı - Öğretmen Adayları. *İlköğretim Online*, 6(2), 305-312.



### Extended Abstract

The aim of this study was to determine the difficulties in learning the modular arithmetic and its properties by 9th grade students. It is thought that the data obtained from this study will serve as a resource for the educators in eliminating the problems that arise in enabling student understanding the subject at the level of target-behaviors. Modular arithmetic is included in the 9th grade mathematics curriculum; on the recommendation of Ministry of National education (2005) a total of 6 hours is allocated to the topic. The significance of the study is that there is no available literature on the difficulties in learning modular arithmetic.

In this study both qualitative and quantitative methods were used. The sampling of the study consisted of a total of 164 9th grade students enrolled in two different High Schools in the Erzurum province of Turkey in the academic year of 2007-2008. The Modular Arithmetic and Its Properties Identification Test (MAPIT) developed by the researchers and semi-structured interviews were used in the data collection. The MAPIT contained 7 open-ended questions at knowledge level; 6 open-ended questions at comprehension level and 7 open-ended questions at the application level of Bloom's Taxonomy. The reliability coefficient of the test was calculated to be 0.79.

It was observed that the students had difficulty in learning the concept of the division algorithm which is the basis of the modular arithmetic topic. The students experienced serious problems while writing the equivalence classes. It was understood that the closure property in many questions was overlooked by the students and that this property was also ignored while solving the questions. While solving many questions in MAPIT, the students undertook operations in either real number or rational number clusters. Unfortunately, the students did not make use of the convenience of the properties of modular arithmetic; they calculated the exponential numbers and frequently made mistakes in 4 basic operations. The students preferred to reach a solution by trial and error in the equation solving questions and they used no modular arithmetic property except for finding the difference in a division operation.

Before receiving instruction in modular arithmetic, it should be ensured that the students possess the appropriate skills in the pre-requisite principles including; division operation in whole numbers, closure in an operation and inverse element property, exponential numbers and domain of a function. In modular arithmetic if the students have serious problems,

activities should be presented to improve their skills in making operations with negative whole numbers.

Students' achievements are increasing with the real-life problems (Altun, 2007). The subject of modular arithmetic can be considered as more advantageous than other mathematic topics. Therefore, if the course book preparation committees and the teachers consider these issues, the willingness of the students towards learning this topic can be increased.

The advantages of information technologies should be made use of and topics should be presented with different methods and techniques. By developing teaching strategies that facilitate learning, the students should be able to actively participate in the courses; they should be given the opportunity to express their views and thus, their communication capabilities should be enhanced.

In conclusion, it was found that the students mostly had difficulty in learning division algorithm and equivalence classes. Therefore, it would be beneficial to analyze the reasons for this difficulty in order to assist teachers in overcoming this problem with modular arithmetic.