**Turkish Studies**
*International Periodical for the Languages, Literature and History of Turkish or Turkic*
*Volume 12/14, p. 19-40*
*DOI Number: http://dx.doi.org/10.7827/TurkishStudies.11589*
*ISSN: 1308-2140, ANKARA-TURKEY*

***Article Info/Makale Bilgisi***
**Referees/Hakemler:** Doç. Dr. Cemalettin IŞIK – Doç. Dr. Erol KARAKIRIK

*This article was checked by iThenticate.*

# İSPAT'IN ÖNEMİ VE İSPAT KONUSUNDAKİ ÖĞRETMEN YETERLİKLERİNİN İNCELENMESİ

*İbrahim BAYAZIT*[*]

## ÖZET

İspatlar formel mantığın ve akıl yürütmenin etkili kullanıldığı uygulamalardır. Bu nedenle, verilen bir teoremin doğruluğunu kanıtlamanın ötesinde öğrenme-öğretme süreçlerini etkin kılma adına çok sayıda işlevinden bahsetmek mümkündür. En temelde ispatların eleştirel ve yaratıcı düşüncenin gelişimini desteklediği bilinmektedir. Bilgiler arası ilişkilerin açığa çıkarılmasındaki rolü nedeniyle öğrencilerin kavramsal bilgi edinmelerine imkân tanıdığı da bir gerçektir. İspat sürecinde geçmiş bilgiler sentezlenerek kullanılır ve yapılan çıkarsamalarla yeni bilgilere ulaşılır ki bu özelliğinden ötürü öğrencilere matematiksel bilgileri kendilerinin keşfetmeleri için uygun ortamlar sunduğu söylenebilir. Ayrıca, matematiksel dil ve terminolojinin aktif olarak kullanıldığı ispat süreçleri bireyler arasında kavram temelli tartışmaların ve fikir alış-verişlerinin yapılması için ortamlar sunar. Ancak, yapılan çalışmalar öğretmen adaylarının ve matematik öğretmenlerinin ispat bilgilerinin sınırlı olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda kaydedilen en temel sıkıntı özel örnekler ve uygulama etkinlikleri üzerinden yapılan izahları ispat olarak kabul ettikleri hususudur. Ayrıca, ispat konusunda yaşanan sorunların farklı ispat yöntemlerinin mantıksal temelleriyle alakalı olduğu ve sayılar teorisi, cebir ve geometri gibi farklı alanları kapsadığı söylenebilir. Literatür taramasından oluşan bu yazıda genel olarak *matematik öğretiminde ispatın rolü ve önemi* konusu işlenmektedir. Bu çerçevede, ispatın matematiksel manasının yanı sıra okul matematiği kapsamında kullanılan farklı ispat yöntemlerinin mantıksal temelleri örnekler üzerinden açıklanmaktadır. Ayrıca, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat algılarını ve bu alandaki bilgilerini inceleyen çalışmaların geniş bir özeti sunulmaktadır. Bu çalışmaların ortaya koyduğu bulgular tartışılmakta, ortaya çıkan sonuçlar ışığında öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat konusundaki yeterliklerini artırmak için getirilen önerilerle yazı sonlandırılmaktadır.

[*] Doç. Dr. Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi/ Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, El-mek: ibayazit@erciyes.edu.tr

**Anahtar Kelimeler:** İspat, ispat türleri, ispat bilgisi, öğretmen adayları, matematik öğretmenleri.

# THE IMPORTANCE OF PROOF AND THE ANALYSIS OF TEACHERS' PROFICIENCIES IN THIS DOMAIN

## ABSTRACT

Proof is an effective way of doing mathematics and, it comprises high quality of reasoning. In addition to its major role in validating a mathematical argument proof supports the teaching-learning processes in many different ways. Above all, proof promotes critical and creative thinking. It serves as a means to explore relationships between mathematical notions and, thus, fosters the development of students' conceptual understanding. Proof creates environments in which students synthesise their prior knowledge and use them through deductive chains of reasoning to discover a new one. However, previous studies indicated that both pre-service and in-service teachers posses a limited understanding of this notion. In this respect, most commonly cited limitation is that many teachers tend to accept specific examples and empirically-based arguments as a valid proof. The purpose of this paper is to review the literature on proof and proving. We illustrate logical principles of mathematical proof and explain salient aspects of proof techniques, such as proof by mathematical induction. Then, we provide a comprehensive review concerning the teachers' conceptions as to the role of proof and their subject-matter understanding of this notion. The paper concludes with a brief summary that brings recommendations to improve teachers' understanding of proof and proving.

## STRUCTURED ABSTRACT

**Introduction:** The concept of proof and its role in school mathematics

Proof is an objective validation of an argument. From a traditional view, proof can be defined as "a formal and logical line of reasoning that begins with a set of axioms and moves through logical steps to a conclusion" (Griffiths, 2000; p. 2). It is an argument "consisting of logically rigorous deductions of conclusions from hypotheses" (p. 55). A mathematical proof comprises a logical argument with carefully stated assumptions and connected sequence of assertions that use precise languages, definitions and reasoning to reach at a valid conclusion. Proof is used to illustrate the logical structures of ideas and to make deductive chains of reasoning explicit (Coe & Ruthven, 1994). It is a means of systematising results into a deductive system of axioms, theorems and concepts. Certainly, proof does not depend on personal persuasion, but it relies upon the logical arguments alone.

According to Bell (1976) proof is an essentially public activity (a social process) that might be conducted internally but should follow the reaching of conviction against an imaginary doubter. It results through

interactions amongst the members of teaching-learning community and eventually facilitates communication of mathematical knowledge and understanding (Alibert & Thomas, 1991). Communication through proof has two aspects: ascertaining and persuading (Harel & Sowder, 2007). The first is concerned with the arguments by which an individual convinces himself/herself whilst the latter refers to arguments by which he/she convinces others. Considering its application in school mathematics Stylianides (2007) underlines three aspects of a mathematical proof. First, proof uses a set of statements (definitions, axioms, theorems, etc.) that are true, available to and accepted by the students without further justifications. Second, it employs forms of reasoning (construction of counterexample, etc.) that are logically valid and within the conceptual reach of the classroom community. The third aspect is concerned with the presentation of logically valid arguments in ways that might include oral or written illustrations, pictorial depictions and tabular or symbolic systems. A proof process that has aforementioned characteristics is deemed to be best proof (Hanna, 1995) assuming that it is likely to foster not only an understanding of correctness of a statement but also a comprehension of why it is true.

There has been a growing appreciation of the idea that proof should become central to students' mathematical experiences at all levels (Schoenfeld, 1994; Hanna, 1995; NCTM, 2000; Yackel & Hanna, 2003). The Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) suggests that proof activities in the classroom should give students opportunities to recognise reasoning, investigate mathematical conjectures, develop and evaluate mathematical arguments and select and use different proof methods. The prominent role of proof in the study of mathematics has been articulated as such 'the essence of mathematics lies in proofs' (Ross, 1998). This emphasis is warranted not only because proof is considered at the heart of mathematical practices but also because it is deemed to be a vital tool for promoting reasoning. In school mathematics proof is appreciated for bringing out the mathematical relationships rather than merely demonstrating the correctness of a statement. In fact, proof provides basis for meaningful learning and essential for constructing, establishing and illustrating mathematical notions (Hanna, 1990). It is a vehicle to enhance students' conceptual understanding and promote their mathematical proficiency and reasoning. Proof is an essential component of doing, communicating and recording mathematics (Schoenfeld, 1994). It is a means of intellectual challenge and fostering students' metacognitive skills. The role proof and proving in mathematics also includes "explanation, systematization, discovery, communication, construction of empirical theory, exploration of definition and of the consequences of assumptions, and incorporation of a well-known fact into a new framework" (Yackel & Hanna, 2003; p. 228). Thus, the notion of proof should be seen as a driving force within the entire mathematics curriculum and classroom practices.

**Teachers' conceptions of proof**

Teachers' conceptions of proof are likely to shape their classroom practices and, consequently, influence their students' learning. It is for this reason there has been growing interest in examining teachers' conceptions of proof (Jones, 1997; Martin & Harel, 1989; Knuth, 1999, 2002a; Morris, 2002; Stylianides, Stylianides & Philippou, 2004, 2007; Varghese, 2007; Dickerson, 2008). In order to provide a comprehensive review of available literature we consider teachers' conceptions under two categories: a) Teachers' conception as to the role of proof in school mathematics and b) Their subject-matter understanding of proof and proving.

Researchers indicated that teachers possess a very limited conception as to the role of proof; and this is largely restricted to the idea that proof serves as a means of verifying a proposition. In the study of Goetting (1995) the majority of pre-service elementary school teachers believed that proof supports arguments while most secondary mathematics majors expressed that proof serves as a means of explanation. Mingus and Grassl (1999) reported that the majority of 51 pre-service teachers' (30 elementary and 21 high school teachers) displayed only a conception that proofs facilitates explanation of mathematical concepts used in arguments. Knuth (2002a) explored secondary school mathematics teachers' conceptions. Sixteen teachers participated in this study and their teaching experiences varied from 3 to 20 years. Data were collected through interviews during which teachers' conceptions were probed through questions such that: "What does it mean to prove something?", "What purpose does proof serve in mathematics" (p. 383). In this study, all the teachers articulated that the main role of proof in mathematics is to establish validity of a proposition. Only three teachers articulated the idea that proof could explain why a mathematical statement is true. None of the teachers pointed out explanatory role of a mathematical proof. Twelve teachers conceived proof as a means of communicating mathematical notions and eight teachers pointed out the role of proof in creating mathematical knowledge.

Teachers should possess strong subject-matter understanding in order to be effective in teaching proof. Yet, a number studies indicated that most of them have great difficulties with proof and proving. Most teachers tend to accept empirically-based arguments as sufficient justification for demonstrating validity of a mathematical statement (Martin & Harel, 1989; Goetting, 1995; Healy & Hoyles, 2000; Knuth, 2002b). Researchers have also documented through evaluation and construction tasks that teachers display lack of understanding of logical principles embedded in different proof methods including contraposition and mathematical induction. The logic of contraposition embraces the idea that in order to prove a proposition stated as p□q it is essential and sufficient to complete direct proof of □q□□p. Riley (2003) explored 23 prospective secondary school teachers' abilities to write a proof for the proposition: If x3 is even then x is even, where x is an integer. Although the participants had completed basic mathematics courses including an introductory proof class only 9 of them provided a valid proof. The rest of them displayed lack of reasoning or presented specific examples as the justification of given statement. Similar findings have been reported by other researchers as well (Stylianides et al., 2004; Knuth, 2002a).

In Movshovitz-Hadar (1993) the majority of 24 in-service high school teachers expressed their confidence in identifying a correct proof by mathematical induction; however, only two participants displayed complete understanding of the premise of this method. Knuth (1999), reported that the majority of 18 in-service secondary school teachers were successful in identifying validity of an argument for the proposition that 'the sum of the first n positive is equal to n(n+1)/2'; nevertheless, many of them displayed lack of conception or felt unconvinced by the underlying logic of proof by mathematical induction. Teachers' difficulties with the proof by induction results from their deficiencies in understanding: the essence of the base step, the meaning associated with the implication of inductive steps (P(k)□P(k+1), and in understanding properties of the domain the given statement.

Review of available literature indicates also that teachers' difficulties with the notion of proof and proving persist within the domain of Number Theory (Martin & Harel, 1989; Barkai, Tsamir, Tirosh & Dreyfus, 2002; Gholomazad, Liljedahl & Zazkis, 2004). In the study of Martin and Harel (1989; p. 44) 101 prospective elementary school teachers were given inductive and deductive arguments and, then, they were asked to identify which of them constituted a valid proof for the proposition: "If the sum of the digits of a whole number is divisible by 3, then the number is divisible by 3". Inductive arguments included some sort of empirical evidences and claims through specific examples while the deductive arguments included formal proof logic. The results indicated that more than half of the participants (65 students) accepted inductive arguments as valid proof for the given situation. The inductive arguments included that: "The sum of the digits of 48 is 12, which is divisible by 3. The number itself divisible by 3 (p. 44)". Barkai et al (2002) investigated 27 in-service elementary school teachers' understanding of proof in the context of divisibility within the set of integers. In this research, although they all correctly stated that the proposition 'the sum of any five consecutive integers is divisible by five' is true less than half of them (41%) accompanied their claims with correct justifications. Most incorrect justifications (52%) consisted of providing a couple of examples; and more interestingly these justifications were perceived as formal proofs by 33% of the teachers. In the study of Gholomazad, Liljedahl and Zazkis (2004) most of 75 prospective elementary school teachers displayed tendencies towards empirical verifications and specific examples in their evaluation of arguments related to the concept of set closure. The participants' written responses indicated that although they had conceptual understanding of the idea of set closure and its defining properties they were unable to use it in evaluating given arguments or in developing their own proofs.

Teachers' inclination to accept empirically-based arguments as a formal mathematical proof was evident in their evaluation and construction of proofs in Geometry domain. Varghese (2007) asked 17 Canadian pre-service teachers with mathematics majors to write a mathematical proof for the statement that 'Prove that the sum of the exterior angles of a polygon is 360°'. Only two participants established a correct proof in verbal or diagrammatic form. The rest of the participants produced incorrect proofs that included little information and reflected partially correct understanding of the task given. Knuth (2002a) reported that 5 in-service teachers out of 16 accepted an empirically-based argument as a valid proof for the proposition: 'the sum of the measures of the interior angles of any triangle is equal to 180o' (p. 392). Related argument was: "I tore up the angles of the obtuse triangle and put them together (as shown below) (p. 392)".

Dickerson (2008) reported that 16 in-service high school teachers out of 17 displayed lack of understanding when evaluating a visually


presented proof due to unusual format of the figures or insufficient detail presented in the argument.

**Summary and conclusion**

Proof plays a variety of roles in teaching and learning mathematics. It serves as a means of explaining concepts, establishing connections between mathematical notions, creating environments in which students could construct and systematise their knowledge of mathematics. It can be used for the purpose of promoting students' reasoning, fostering their creativity, enhancing their problem solving skills and enabling them to evaluate validity of an argument. Nevertheless, there seems to be a long distance between these roles of proof and their implications in classroom teaching. NCTM (2000) points out such discrepancy and calls for efforts for making proof and proving inseparable part mathematics education at all school levels. This call is manifested in recently prepared Turkish High School Mathematics Curriculum as well (High School Mathematics Curriculum: Grades 9-12 [TTKB], 2013b).

Previous studies indicates that most pre-service and in-service teachers display limited understanding of the concept of proof. Their conception of proof is largely restricted to the idea that proof acts as a means of verifying a mathematical proposition. Most of them disregard vital roles that proofs play in establishing relationships between mathematical concepts, in fostering conceptual understanding, in promoting creative and critical thinking and in supporting discovery-oriented learning. Teachers' limited subject-matter understanding seems to be related to the very premise of the idea of proof and associated with the underlying logic of different proof methods. Also, limitation in teachers' subject-matter understanding of proof is reflected in major strands of mathematics including number theory and geometry. It is conjectured that teachers' understanding of proof are mainly affected by the content of mathematics courses that they take during their undergraduate education. Thus, it can be suggested that in order to improve teachers' understanding of proof they should be engaged in proof construction activities during their undergraduate education as much as needed. Proof should be treated as a soul of mathematics courses in teacher training programs. Certainly proof is not a specific topic that can be taught and learned in isolation; therefore, it should be used as a means to promote students' conceptual understanding of mathematical notions and to support their intellectual growth.

**Keywords:** Proof, proof techniques, proof conception, pre-service teachers, in-service teachers.

Matematik eğitiminin nihai amacı aklı etkili kullanabilen, sorgulayabilen, sentez ve analiz yapabilen, eleştirel ve yaratıcı düşünceyi işe koşarak sıra dışı problemlere özgün çözümler üretebilen, eldeki durumları sebep-sonuç ilişkisi çerçevesinde irdeleyerek çıkarımlarda bulunabilen ve bu sayede yeni bilgilere ulaşabilen bireyler yetiştirmektir. Bu amaçlara ulaşılabilmesi öğrencilerdeki düşünce gelişimini önceleyen, kavramlar arası ilişkilerin kurulmasına özen gösteren ve eldeki problemler üzerinde kolektif düşünmeye imkân tanıyan yansıtıcı (tefekkür içerikli) öğrenme-öğretme etkinlikleri (reflective teaching-learning activities) ile mümkün olabilir. Uluslararası sınav sonuçları Türkiye'deki öğrencilerin genelde matematik, özelde ise akıl yürütme gerektiren problem çözme türü konulardaki başarılarının akranlarına kıyasla oldukça düşük olduğunu göstermektedir (Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı [PISA], 2016). Bunun sebeplerinin sistem bazında bütüncül bir yaklaşımla ele alınıp incelenmesi önem arz etmektedir. Ancak, sınıf içi öğretimlerin, yeni matematik ders programlarında (Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı [TTKB], 2013a,b) ortaya konulan paradigma çerçevesinde ve belirlenen hedefler doğrultusunda yürütülemeyişi bu alandaki başarısızlığın temel sebebi olarak gözükmektedir.

Matematiksel bilgileri diğerlerinden ayıran temel özellik sadece akılla anlaşılabilen soyut yapılar olmasıdır. Büyük çoğunluğu itibariyle matematiksel bilgiler tarihi süreç içerisinde akıl yürütmeyle kanıtlanarak üretilmiştir. Matematiksel bir bilginin anlaşılması, bu bilgiye kaynaklık eden ön bilgilerin kavranmasına ve aralarındaki bağın sebep-sonuç ilişkisi çerçevesinde ve bir tür ispat mantığıyla irdelenip anlaşılmasına bağlıdır. Matematiksel kavramların ve ilgili kuralların öğrencilere hazır olarak sunulduğu, sonrasında ise bunların akılda kalıcılığını sağlamak için işlem temelli uygulamaların yaptırıldığı öğretimlerin düşünce gelişimine katkı yapmayacağı açıktır. Bu nedenle öğrencilerin düşünce gelişimlerini desteklemek ve kavramsal bilgi edinmelerini kolaylaştırmak için bilişsel seviyelerine uygun ispat uygulamaları ve etkinlikleri üzerinde çalıştırılmaları önem arz etmektedir.

Matematiksel ispatlar, sonuç değil süreç eksenli uygulamalardır. İspat sürecinde işe koşulan mantık ve sergilenen yaklaşımlar, matematiksel problemlerin çözümünde yürütülen mantık ve yaklaşımlarla genel manada paralellik arz etmektedir. Esasen, ispat süreci, kendi içinde bir problem çözme süreci gibi işlemektedir. Bu süreçte, bireyler bir iddianın (teoremin) doğruluğunu kanıtlamak için ilk olarak o iddianın ne olduğunu anlamaya çalışırlar. Bu çerçevede, eldeki iddiayla alakalı tüm bilgileri bir araya getirerek değerlendirirler. İkinci olarak, iddianın nasıl kanıtlanacağına ilişkin bir yol arayışına girerler; kullanacakları yöntem ve teknikleri belirlerler. Dikkat edilecek olursa bu ikinci aşama Polya'nın (1973) dört aşamalı problem çözme modelindeki *plan yapma* aşamasına karşılık gelmektedir. Üçüncü olarak ise bir önceki aşamada belirledikleri yol ve yaklaşımları takip ederek ve ilgili yöntem ve teknikleri işe koşarak ispat yaparlar ki bu aşama da Polya'nın problem çözme modelindeki *uygulama aşamasına* tekabül etmektedir. İspat sürecinde, *değerlendirme aşamasının* işin başından itibaren işletilmesi gerekir. Çünkü ispatlar mantıksal çıkarsamalar (deduction) yoluyla yapıldığı için sürecin her aşamasında bireylerin kendi düşünceleri üzerinde düşünmeleri, mantık hatasına düşmeden ispat sürecini sebep-sonuç ilişkisi çerçevesinde ve kontrollü bir şekilde yürütmeleri gerekir.

İspatlar matematiğin uygulama alanlarından bir tanesidir. Bu nedenle verilen bir teoremin doğruluğunu kanıtlamanın ötesinde öğrenme-öğretme süreçlerini destekleme adına farklı işlevleri bulunmaktadır. En temelde, eleştirel ve yaratıcı düşüncenin gelişimini desteklediği söylenebilir. Bilgiler arası ilişkileri açığa çıkarması nedeniyle öğrencilerin kavramsal bilgi edinmeleri için uygun ortamlar sunduğu muhakkaktır (Hanna, 1990). Yine, entelektüel kapasitelerini zorlaması nedeniyle öğrencilerin üst-bilişsel yeteneklerini geliştirdiği, dolayısıyla öz-takip ve öz-düzenleme becerilerini desteklediği söylenebilir. Schoenfeld'e (1994) göre ispatlar matematik yapmanın en etkili yoludur; bu açıdan bakıldığında ise öğrencilere yaparak ve yaşayarak öğrenme ortamları sunduğunu söyleyebiliriz. İspat sürecinde geçmiş bilgiler sentezlenerek kullanılır ve yapılan çıkarsamalar ile yeni bilgilere ulaşılır; bu özelliği nedeniyle de matematiksel düşünceleri kendilerinin keşfetmesi için öğrencilere imkân tanıdığı söylenebilir (Knuth, 2002a,b).

Literatür taramasından oluşan bu çalışmada ispatın matematik öğretimindeki rolü ve önemi üzerinde durulmaktadır. Konunun geniş bir perspektiften ele alınarak incelenmesine gayret edilmiştir. İlk olarak *ispat* kavramının anlamı ve mantıksal temelleri izah edilmekte; sonrasında ise lise ve üniversite matematiği kapsamında kullanılan ispat yöntemleri örnekler üzerinden açıklanmaktadır. İkinci olarak, ispat uygulamalarının matematik öğretimindeki rolü ve öğrenme-öğretme süreçlerini nasıl desteklediği hususları tartışılmaktadır. Üçüncü olarak, öğretmen adaylarının ve matematik öğretmenlerinin ispat bilgilerini konu edinen çalışmaların geniş bir özeti paylaşılmaktadır. Sunulan bilgilerin sentezlendiği kısa bir özet ile yazı sonlandırılmaktadır.

## İSPAT KAVRAMI ve İSPAT TÜRLERİ

*İspat* matematikte olduğu kadar gerçek yaşamda da sıkça kullanılan bir kavramdır. Gerçek yaşamda, ispat kavramı kullanıldığı alana ve ilişkili olduğu olay ve olgulara göre farklı manalara gelebilmektedir. Bir farmakolog keşfettiği bir ilacın yan etkilerinin olmadığını deneysel metotlarla ve çok sayıda insan üzerinde deneyerek kanıtlayabilir. Bir yargıç, görgü şahitlerinin ifadeleri ve olay yeri bulgularına dayanarak bir şahsın suçlu olduğunu ispat edebilir. Bir bilim adamı deniz seviyesinde suyun $100C^0$ de kaynadığını bir fizik deneyiyle kanıtlayabilir. Gerçek yaşamda ispat kavramı, hedef kitleleri ikna etmek için somut delillerden ve tekrarlanabilir deney bulgularından hareketle eldeki iddianın doğruluğunun aydınlatılması ve bu konuda bir yargıya varılması manasına gelmektedir. Dolayısıyla, gerçek yaşamda bir iddianın ispatı sezgiye, kişisel öngörülere ve yorumlara dayanabilir. Bu nedenle objektifliği, mantıksallığı ve geçerliliği sorgulamaya açıktır.

Matematikte ispat kavramı çok daha kesin manalar içerir. Matematiksel ispatlarda deney ve gözlem bulgularına, sezgiyle ulaşılan bilgi ve çıkarsamalara yer yoktur. Yegane enstrüman olarak aklın kullanıldığı, geçmiş bilgiler üzerine inşa edilen ve eldeki teoremin doğruluğunu sebep-sonuç ilişkisi çerçevesinde ve mantıksal bir akıcılıkla ortaya koyan izahlara ispat denir. Daha öz bir ifadeyle ispat, bir teoremin doğruluğunu veya yanlışlığını mantıksal çıkarsamalar (deduction) yoluyla açık ve net olarak izah eden yapılar olarak tanımlanabilir (Martin & Harel, 1989). Bir matematiksel izahın ispat olabilmesi için önceki bilinenler üzerine inşa edilmesi, mantıksal çıkarsamalar (deduction) içermesi, iç tutarlılığının olması ve üzerinde çalışılan kümedeki tüm durumlar için geçerli olması gerekir (a.g.e.). Kişisel öngörüler ve sezgisel bilgilerle yapılan izahların ispat olarak kabul edilmesi mümkün değildir. Objektif olması, mantıksal olması ve genel geçer olması matematiksel ispatların en temel özellikleridir. Yapılan tanımlardan anlaşılacağı üzere ispat bir mantıksal düşünce sürecidir. Ortaya atılan bir iddia ile başlayan bu süreç matematiksel dil ve terminolojinin yanı sıra aksiyom, tanım ve kavram türünden temel yapıların ilişkilendirilerek kullanımını içerir; mantıksal çıkarsamalarla yeni bir sonuca ulaşılmasıyla son bulur (Griffiths, 2000). İspatlar, verilen bir teoremi kanıtlamanın yanı sıra bir bilginin yapısındaki mantıksal tutarlılığı açıklamak ve bu bilginin üretim sürecinde kullanılan düşünce süreçlerini ortaya çıkarmak için kullanılır (Coe & Ruthven, 1994).

Bu noktada, ispat kavramının bir örnek üzerinden açıklanması yerinde olacaktır. '*İki tek sayının toplamı bir çift sayı eder*' teoremini göz önüne alalım. Tam sayılar kümesinde sonsuz tane tek sayı vardır; dolayısıyla tüm bu sayılar arasında işlemler yaparak teoremi kanıtlamak mümkün değildir. Diğer yandan, özel örnekler üzerinden (örneğin, 1+3=4; 5+7=12, vs.) yapılacak açıklamalar meselenin anlaşılmasına katkı sunsa da teoreme konu olan tüm durumları içermediği için ispat olarak kabul edilemez. Öyleyse, teoreme konu olan tüm durumları kapsayacak şekilde daha genel yaklaşımlar ve mantıksal çıkarsamalar içeren bir düşünce sürecinin işe koşulması gerekir. Bunun için iki tane tek sayı alalım.

**Birinci sayı:** *$a=2m+1$, $m \in Z$ ; ($\forall m \in Z$ için 2m çift, 2m+1 ise tek sayıdır).*

**İkinci sayı:** *$b=2n+1$, $n \in Z$; ($\forall n \in Z$ için 2n çift, 2n+1 ise tek sayıdır).*

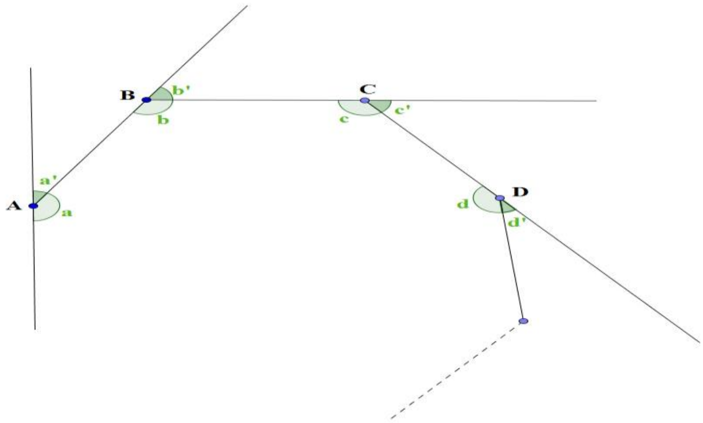
**Sayıları toplayıp düzenlersek:** *$a+b=(2m+1)+(2n+1)=2(m+n)+2=2(m+n+1)$elde ederiz.*

**Sonuç:** *$(m+n+1)=k\in Z$ ve bu sayısının 2 ile çarpımı her zaman çift sayıdır; buda iki tek sayının toplamının her zaman bir çift sayı olduğunun kanıtıdır.*

Buraya kadar ispat kavramı salt matematiksel manası itibariyle izah edildi. Literatürde, ispat kavramını öğretim süreçlerinin sosyal bileşenleriyle ilişkilendirerek izah eden yaklaşımlar da söz konusudur. Bu yaklaşımlar ispattan beklenen pedagojik kazanımların gerçekleşebilmesi için ispat uygulamalarının yürütüldüğü sürecin sosyal bileşenlerine dikkatleri çekmektedir. Bell (1976) ispatı öğrenme-öğretme komitesinin üyeleri arasında fikir paylaşımına imkân tanıyan ve eldeki iddianın doğruluğuna karşı tarafı ikna etmek için yürütülen sosyal bir aktivite olarak tanımlamaktadır. Stylianides (2007) matematiksel bir ispatın üç temel özelliğinden bahsetmektedir. Birincisi, ispat sürecinde öğrencilerin geçmişten bildikleri ve yeniden ispatına gerek duymadıkları tanım, teorem ve aksiyom türünden bilgilerin kullanılması hususudur. İkincisi, ispat sürecinde öğrencilerin bilişsel düzeyleri ve kavramsal gelişimlerine hitap eden mantıklı ve tutarlı bir akıl yürütmenin işe koşulmasıdır. Bu süreçte aksine örnek verme, tümevarım ve eldeki iddianın kabulüyle hareket edip sonuçta çelişkiye düşme gibi düşünce türleri işe koşulabilir. Stylianides'in (2007) bahsettiği üçüncü temel özellik ise ispat sürecinin özünü teşkil eden akıl yürütme süreçlerinin ve yapılan mantıksal çıkarsamaların sunumunda kullanılan temsilleri içermektedir. Bu temsiller sözlü açıklamalar, cebirsel ifadeler, tablolar, modeller ve grafik türü görsel yapılardan oluşabilir. Sosyo-pedagojik bir süreç olarak ispat, öğrenme-öğretme komitesinin üyeleri arasında iletişim ve etkileşim olarak cereyan eder; neticede ise matematiksel bilgilerin daha iyi anlaşılmasına imkân tanır (Alibert & Thomas, 1991). Harel ve Sowder'a (2007) göre ispat yaparken bireyler arasında yaşanan iletişimin iki temel özelliği vardır. Birincisi, kişinin eldeki durumla alakalı ileri sürdüğü iddiaların doğruluğuna kendisinin inanması; ikincisi ise bu düşüncelerin doğruluğuna diğer grup üyelerini ikna etmesidir. Yukarıda bahsedilen özelliklere sahip bir ispatın bir teoremin doğruluğunun yanı sıra neden ve niçin doğru olduğunun anlaşılmasını sağlayacağı belirtilmekte, bu nedenle de en iyi ispat olarak kabul edilmektedir (Hanna, 1995).

Matematik eğitiminde farklı ispat yöntemleri kullanılmaktadır. Bunlar genel olarak doğrudan ispat, tümevarımla ispat, olmayana ergi yöntemi, çelişki bulma metodu ve aksine örnekle ispat yöntemlerini içermektedir. Doğrudan ispat, okul matematiği kapsamında en sık kullanılan ispat yöntemidir. Bu yöntemde, teoremde verilen bilgi ve şartlar aynen alınır ve istenilen sonuca ulaşılmaya çalışılır. Matematiksel ifadeyle $p \Rightarrow q$ şeklinde verilmiş bir önermede $p$ (varsayım) doğru kabul edilir; verilen bilgiler kullanılarak $q$'nun (hükmün) doğruluğu kanıtlanmaya çalışılır. Yukarıda sunulan '*iki tek sayının toplamı bir çift sayıdır*' teoreminin ispatı bu yöntemle yapılmıştır. Uygun durumlar için çok hızlı ve sonuç alıcı bir diğer ispat yöntemi ise *aksine örnekle* ispattır. Bu yöntemde eldeki teoremin doğruluğunu çürüten tek bir durumun ortaya konulması yeterlidir. Örneğin, '*x bir tek sayı ise $x^2$ bir çift sayıdır*' teoreminin doğruluğu verilecek aksine bir örnekle çürütülebilir. Örneğin, $x=3$ sayısını alalım; karesi $x^2=9$ eder; 9 ise 2 ile tam bölünemediği için bir tek sayıdır. Dikkat edilecek olursa burada verilen özel bir örnek ile önermenin hüküm kısmının doğruluğu çürütülmekte, böylece önermenin tamamının yanlışlığı kanıtlanmış olmaktadır.

Bazı teoremlerin ifadesi genelden hareketle bir hükmün doğrulanmasını gerektirebilir. Bu durumlarda genelden hareket edilerek teoremle ilişkili bütün özel durumları da kapsayan bir çıkarımda bulunulur. Bu ispat yöntemine ise *tümdengelim* metodu denilmektedir. Bu yöntemin nasıl çalıştığını geometriden şöyle bir örnekle izah edelim: *n kenarlı bir çokgen (n herhangi bir sayma* *sayısı ve istenildiği kadar büyük düşünülebilir) dış açılarının ölçüleri toplamı $360^0$ dir*. İspat sürecinin anlaşılması için durumu aşağıdaki şekilde modelleyelim.




**Şekil 1:** n kenarlı bir çokgenin iç ve dış açıları arasındaki ilişkileri resmeden bir model.

Modelden anlaşılacağı üzere *n* kenarlı bir çokgenin *n* tane köşesi vardır; her bir köşede ise birbirinin bütünleri olan iç ve dış açılar bulunmaktadır. Bu açıları köşelerin isimleriyle adlandıralım; örneğin, ***A*** köşesindeki iç açı: ***a*,** dış açı: ***a*´** olsun. Çokgenin tüm köşelerindeki açıların toplamı ise ***S*** olsun. Bu durumda:

$S= (a+a')+(b+b')+(c+c')+(d+d')+...+(n+n')$ *dir,*

$S= (a+a')+(b+b')+(c+c')+(d+d')+...+(n+n')=n\cdot 180^0$ *(köşelerdeki tüm açıların ölçüleri toplamı)*

$S= (a'+b'+c'+d'+... +n')+(a+b+c+d+...+n)=n\cdot 180^0$ *(iç ve dış açıları bir arada yazarsak)*

$S= (a'+b'+c'+d'+...+n')+(n-2)\cdot 180^0=n\cdot 180^0$ *(çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2)\cdot 180^0$)*

$S= (a'+b'+c'+d'+...+n')+ =n\cdot 180^0-(n-2)\cdot 180^0=n\cdot 180^0-n\cdot 180^0+2\cdot 180^0$

$S= (a'+b'+c'+d'+...+n')=2\cdot 180^0=360^0$

Böylece verilen teoremin ispatı tamamlanmış oldu.

Lise ve üniversite matematiği kapsamında en sık kullanılan ispat metotlarından biri de tümevarım yöntemidir. Sayılabilir sonsuz kümeler üzerinde tanımlanmış olan teoremlerin ispatında kullanılan bu yöntemde $n=1$ için verilen önermenin doğruluğu gösterilir; $n=k$ için doğru kabul edilir ve bu kabulden hareketle $n=k+1$ için doğruluğu gösterilerek ispat süreci tamamlanır. Tümevarım yöntemiyle ispat yapılırken her zaman $n=1$ ile ispata başlama zorunluluğu yoktur; teoremde belirtilen şarta göre *1* den büyük herhangi bir doğal sayıyla ispata başlamak mümkündür. Bu yöntemi kullanarak ardışık tek sayıların toplamına ilişkin bir ispat yapalım. Teoremimiz şu şekilde ifade edilsin: $n\in N^+$ *için* $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ *dir*.

1. $n=1$ *için* $1=1^2$ *dir ve doğrudur.*
2. $n=k$ *için* $1+3+5+...+(2k-1)=k^2$ *olduğunu kabul edelim.*
3. $n=k+1$ *için* $1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ *olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Bunun için 2 deki ifadenin her iki yanına* $(2k+1)$ *eklersek:* $1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$ *dir. Böylece verilen önermenin doğruluğu kanıtlanmış oldu.*

Son olarak dolaylı ispat yöntemlerinden *olmayana ergi (contraposition)* ve *çelişki bulma* metotlarından bahsedilecektir. Olmayana ergi yönteminde hükmün olumsuzundan hareketle varsayımın olumsuzuna ulaşılır; böylece başlangıçta verilen teoremin doğruluğu ispatlanmış olur. Teoremi $p \Rightarrow q$ biçiminde düşünelim; olmayana ergi yönteminin mantığına göre verilen teoremin doğruluğunu kanıtlamak için $\sim q \Rightarrow \sim p$ önermesini kanıtlamak yeterlidir. Örneğin, '*karesi çift olan bir sayının kendisi de çifttir*' teoremini ele alalım. Bu teoremin varsayım kısmı *p: a sayısının karesi çifttir*; hüküm kısmı *q: a sayısının kendisi çifttir*. İspatta hükmün olumsuzundan hareket edip varsayımın olumsuzuna ulaşılacaktır. Buna göre:

$a=2k+1$, *(* $\forall k \in Z$ *için 2k çift, 2k+1 ise tek sayıdır)*

$\Rightarrow a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow a^2=2(2k^2+2k)+1$, *(* $\forall k \in Z$ *için* $2k^2+2k=t \in Z$ *dir)*

$\Rightarrow a^2=2t+1$ *olur (*$t \in Z$ *için 2t çift,2t+1 ise tek sayıdır)*

$\Rightarrow a^2$ *bir tek sayıdır.*

Yapılan bu ispatta $a$ sayısı tek kabul edilip karesinin de tek sayı olduğu gösterilmektedir; böylece '*karesi çift olan bir sayının kendisi de çifttir*' teoremi kanıtlanmış olmaktadır.

*Çelişki bulma yönteminde* ise eldeki önermenin doğru olmadığı kabul edilerek ispata başlanır ve sürecin sonunda başlangıçtaki kabulle çelişkiye düşülür; böylece verilen önermenin doğruluğu kanıtlanmış olur. Estetik oluşu ve kolay anlaşılır olması nedeniyle üniversite matematiği kapsamında sıkça yapılan bir ispatı burada paylaşmak isteriz.

$\boldsymbol{Teorem}$: $\sqrt{2}\ irrasonel\ sayıdır.$

$\boldsymbol{Kabul}$: $\sqrt{2}\ irrasyonel\ olmasın;$ $öyleyse\ bu\ bir\ rasyonel\ sayıdır.$

$Öyleyse;\ a,b \in Z, b \neq 0\ ve\ a,b\ aralarında\ asal\ olmak\ üzere\ \sqrt{2}=\frac{a}{b}\ olsun.$

$Bu\ durumda, 2=\frac{a^2}{b^2}\ dir\ ve\ buradan\ a^2=2b^2\ olur \quad (\mathbf{1})$

$Öyleyse\ a=2k\ dır\ (karesi\ çift\ olan\ sayı\ çifttir); bunu\ (1)de\ yerine\ yazarsak$

$4\ k^2=2b^2\ ve\ 2k^2=b^2\ elde\ ederiz; dolayısıyla\ b=2t\ bir\ çif\ sayıdırdir \quad (\mathbf{2})$

$(\mathbf{1})\ ve\ (\mathbf{2})\ den\ \sqrt{2}=\frac{a}{b}=\frac{2k}{2t}\ elde\ edilir\ ki\ bu\ bir\ çelişkidir.$

Bu sonuç başta kabul edilen $a$ ve $b$ sayılarının aralarında asal olması şartıyla çelişmektedir; bunun manası ise $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel değil, irrasyonel bir sayı olduğudur. Bu noktada *olmayana ergi metodu (contraposition)* ile *çelişki bulma (contradiction)* yöntemleri arasındaki mantıksal farka dikkat çekmek isteriz. Olmayana ergi yönteminde verilen önermenin hüküm kısmının olumsuzundan hareketle varsayımın olumsuzuna ulaşılmaktadır. Çelişki bulmada ise eldeki iddianın doğru olmadığı kabul edilmekte; sürecin sonunda ise bu kabul ile çelişkiye düşülmektedir; düşülen bu çelişki ise başlangıçta verilen iddianın doğru olduğu manasına gelmektedir.

## MATEMATİK ÖĞRETİMİNDE İSPATIN ROLÜ

Matematik eğitiminde ispatın her biri oldukça önemli çok sayıda işlevinden bahsetmek mümkündür. İspatın en temel rolünün bir iddianın doğruluğunun ortaya çıkarılması olduğunda kuşku yoktur. Öğrenciler ispat kavramını genellikle bu boyutuyla anlamakta ve tecrübe etmektedirler.

Ayrıca, okul matematiği kapsamında ispat sürecinde işe koşulan mantıktan çok yapılan işlemlerin ve kanıt yöntemleriyle alakalı rutinlerin dikkatlere sunulduğu da bir gerçektir. Bu tür durumların öğrencilerin ispata ilişkin bilgi ve düşüncelerinin rutinlere kısıtlanmasına sebebiyet verdiği belirtilmektedir. Birçok öğrenci için ispatlar, öğretmenler tarafından önerilen metot ve prosedürlerin takibiyle yürütülen, rutin uygulamalar içeren, oldukça anlamsız alıştırmalar olmanın ötesinde bir mana içermemektedir. Schoenfeld (1994) geleneksel öğretim ortamlarında, ispatın açıklama gücünden öğrenciler lehine yararlanılmadığını, bu nedenle de öğrencilerin ispatın özünde var olan düşünce derinliğini yakalayamadıklarını belirtmektedir.

Matematik eğitimcilerine göre ispatın asıl faydası bir iddianın *neden* ve *niçin* doğru olduğu hususunun aydınlatılmasındaki rolüyle alakalıdır. Öğrencilerdeki düşünce gelişimini destekleyen de ispatın bu özelliğidir. Bu nedenle eğitimciler ispatları niteliklerine göre iki temel kategoride değerlendirmektedirler. Birincisi, çok fazla sorgulamaya yer vermeden bir iddianın doğruluğunu *yüzeysel olarak gösteren ispatlardır*; ikincisi ise o iddianın doğruluğunu *neden* ve *niçin* sorularına yanıt teşkil edecek şekilde bütün derinliğiyle ortaya koyan *açıklayıcı ispatlardır*. Hersh'e (1993) göre bir matematikçi eldeki iddianın doğruluğundan ziyade *neden* ve *niçin* doğru olduğunu anlamaya çalışmalıdır. Eldeki iddianın doğruluğunu hiçbir mantıksal boşluğa yer vermeden sebepleriyle birlikte izah etmesi nedeniyle ispatın *açıklayıcılık özelliği* ve bu anlamdaki *rolü* (explanatory role of proof) oldukça önemlidir.

Matematik eğitiminde ispatın bir diğer önemli rolü ise bilgi ve düşünce paylaşımına olanak tanıması, yani *iletişim aracı* olarak işlev görmesidir. Bir önceki kısımda da değinildiği üzere birçok matematik eğitimcisi ispatı bireyler arası düşünce paylaşımına imkân tanıyan sosyal bir aktivite (Hanna, 1990) ve matematik öğrenme-öğretme sürecinin (mathematical discourse) bir ürünü olarak tanımlamaktadır (Wheeler, 1990). İspatı bireyler arasında fikri münazaraların yürütüldüğü bir tartışma platformu olarak değerlendirmekte mümkündür (Daviz, 1986). Bu platformda, bireyler birbirlerinin fikirlerini desteklemek veya çürütmek için tezler ileri sürerler; bu savlarını desteklemek için geçmiş bilgilerini sentezleyerek ve uyarlayarak işe koşarlar. Aksiyomlar, tanımlar ve teoremler gibi matematiğin temel yapı taşlarını kullanırlar. Eldeki iddiayla alakalı mantıksal çıkarsamalar (deduction) yapabilmek için yoğun bir akıl yürütme süreci yaşarlar; gerek kendi düşünceleri gerekse arkadaşlarının düşünceleri üzerinde düşünceler yürütürler. Yani, üst-bilişsel yeteneklerini işe koşarlar; bu çerçevede öz-takip ve öz-düzenlemeler yaparlar. Zihinlerinde yürüttükleri bilişsel eylemleri sözlü olarak ifade etmenin yanı sıra semboller, simgeler, cebirsel gösterimler ve grafikler türünden matematiksel dil ve terminolojiyi kullanarak birbirlerini ikna etmeye çalışırlar. Yürütülen bütün bu sosyal ve bilişsel aktiviteler neticesinde grup üyelerinin üzerinde mutabık kaldığı ve eldeki iddianın doğruluğunu açık ve net olarak gösteren bir argümanlar zinciri ortaya çıkar ki bu ispatın kendidir. İspat sürecinde, biliş temelli ancak ağırlıklı olarak sosyal içerikli bir iletişim ve etkileşim sürecinin yaşandığı açıktır. Bu nedenledir ki matematik eğitimcileri ispatı, *sosyal bir aktivite* ve *öğrenme-öğretme sürecinin bir ürünü* olarak tanımlamakta ve bu açılardan bireylere sunduğu katkılara vurgu yapmaktadırlar.

İspatın, yeni bilgilerin keşfine imkân tanımak gibi bir işlevi de söz konusudur. Matematik tarihinde, birçok bilginin ispatlanarak, yani mantıksal çıkarsamalar (deduction) yoluyla keşfedildiği bilinmektedir (De Villiers, 1999). Esasen bu sadece matematikçiler için geçerli bir durum değildir; okul matematiği kapsamında da birçok bilgi ispatlanarak öğrencilere keşfettirilebilir. Örneğin, Euclid geometrisi kapsamında '*bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı* $180^0$ *dir*' kuramsal bilgisini ispat yoluyla keşfetmek mümkündür. Alınacak herhangi bir üçgenin bir köşesinden karşı kenara bir paralel çizilir. Paralel doğruların iç kısımlarında kalan ve bunları kesen her bir doğrunun (üçgenin diğer iki kenarı) ise ters tarafına düşen açıların (iç ters açılar) ölçülerinin eşit olduğu mantığından hareketle tabandaki açılar tepeye taşınır. Bu durumda, üçgenin iç açılarının tepede bir doğru açı oluşturduğu, dolayısıyla ölçüleri toplamının $180^0$ olduğu kanıtlanmış olur.

Özetle, ispat yaparken bireyler iki temel alanda sahip oldukları bilgilerini kullanırlar. Birincisi, matematiksel bilgilerdir ki bunlar daha önceden keşfedilmiş ve doğruluğu kanıtlanmış kavramları, düşünce türlerini, metotları ve temel matematiksel yapıları içerir. Bu bilgiler yeni bir iddianın ortaya konulması ve ispatlanması sürecinde ilk kalkış noktasını ve düşünce bağlamını oluşturur. İspat sürecinde, akıl yürütmenin dayandığı ikinci temel bağlam ise matematiksel dildir. Matematiksel dil, terimler ve tanımların yanı sıra semboller, simgeler, cebirsel ifadeler ve grafikler türünden çeşitli gösterimleri içerir. Matematiksel dil, bir iddianın ortaya konulması ve kanıtlanması sürecinde soyut düşüncelerin ifade edilmesi, kavramlar arası ilişkilerin araştırılması, gerekli açıklamaların yapılması ve düşüncenin başkalarıyla paylaşımı noktasında önemli işlevler görür.

Bu iki temel alanda yürütülen eylemler neticesinde öğrenciler düşünce gelişimi başta olmak üzere birçok sosyal ve bilişsel kazanım elde ederler. Matematik öğrenme sürecinin özünü teşkil eden soyutlama ve genelleme yapabilme yetenekleri gelişir; bu sayede kavram oluşturma süreçlerini sorunsuz işletip içerik açıdan zengin ve doğru bilgiler edinebilirler. İspat yaparken bireyler çoğu kez zihinsel çatışmalar (cognitive conflict) yaşarlar. Yaşanan bu tecrübeler, bireylerin daha önce edindikleri eksik ve hatalı bilgiler üzerinde kavramsal değişimlere (conceptual change) giderek doğrusunu inşa edebilmeleri için oldukça önemlidir. İspatlar, bireylerin matematiğin birbiriyle ilişkili düşüncelerden oluşan sistemli ve düzenli bir disiplin olduğuna ilişkin bir bakış geliştirmelerine de yardımcı olur. İspatlar matematik yapmanın (doing mathematics) en etkili yollarından biridir (Schoenfeld, 1994) ve bu özelliği sayesinde bireylere yaparak ve yaşayarak öğrenme imkânı sunduğu da söylenebilir. İspatların sunduğu bir diğer önemli kazanım ise düşüncede esnekliktir. Bu sayede bireyler mevcut bilgilerini eldeki durumun özgün koşullarını karşılayacak şekilde uyarlayarak kullanabilirler. Düşüncede esneklik aynı zamanda disiplinler arasında ve matematik-gerçek yaşam durumları arasında ileri-geri bilgi transferleri yapabilmek için de önemli bir zihinsel yetenektir. Matematiksel dil ve terminolojiyi etkili kullanabilmek ve bununla ilişkili olarak düşüncelerini izah edebilmek, fikir paylaşımında bulunabilmek ve tartışma ortamlarında diğer bireylerle iletişim ve etkileşime girebilmek ispatın öğrencilere sunduğu en temel sosyal kazanımlar olarak belirtilebilir.

Öğrencilere sunduğu çok sayıda bilişsel ve sosyal kazanımlardan ötürü her düzeydeki matematik ders programlarında ve sınıf içi öğretimlerde kanıt temelli etkinliklere ve ispat uygulamalarına yer verilmesi ısrarla önerilmektedir (Schoenfeld, 1994; Hanna, 1995; NCTM, 2000; Yackel & Hanna, 2003). Ülkemizde, yeni lise matematik öğretimi ders programlarında da ispatın önemi vurgulanmakta, 'akıl yürütme ve ispat yapabilme' öğrencilerin edinmesi gereken temel kazanımlar arasında sayılmaktadır (TTKB, 2013b). Ancak, geleneksel öğretim ortamlarında, ispatlara lise eğitiminin son yılarında ve genellikle düzlem geometrisi kapsamında yer verilmektedir. Sayılar ve cebir konularında ispat uygulamalarına gereği kadar önem verilmediği bilinmektedir. Bu eksiklikleri gidermek için ilk elden inisiyatif alacak olanlar ise öğretmenlerdir. Bu nedenle öğretmenlerin ispat konusunda yeter düzeyde bilgi sahibi olmaları beklenir. Ancak, yapılan çalışmalar matematik öğretmeni adaylarının ve öğretmenlerinin ispat konusunda kısıtlı bir algıya ve sınırlı bilgilere sahip olduklarını göstermektedir. Bundan sonraki bölümde öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat konusundaki yeterliklerini konu edinen çalışmaların sonuçları paylaşılacak; bu alanda yaşanan sıkıntılar ve bunların muhtemel sebepleri tartışılacaktır.

## ÖĞRETMENLERİN İSPAT KONUSUNDAKİ YETERLİKLERİ

### Öğretmenlerin ispatın rolüne ilkin düşünceleri

Literatürde öğretmenlerin ispat konusundaki yeterliklerini inceleyen çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalar, araştırma konusunun odağı, kullanılan araştırma metotlarının niteliği ve katılımcıların mesleki deneyimi gibi parametreler açısından farklılık arz etmektedir. Bazı araştırmacılar öğretmen adaylarının ispat algılarını ve bilgilerini incelerken (Jones, 1997; Martin & Harel, 1989; Morris, 2002; Stylianides, Stylianides & Philippou, 2004, 2007; Varghese, 2007) bir kısım araştırmacılar da meslekte deneyimli öğretmenlerin bu alandaki yeterliklerini çalışmışlardır (Barkai, Tsamir, Tirosh & Dreyfus, 2002; Dickerson, 2008; Knuth, 1999, 2002a). Verilerin yazılı sınav ve/veya mülakat tekniğiyle toplandığı bu çalışmalarda katılımcılara genellikle bir teoremle alakalı ispatlar verilmiş ve bunların doğruluğunu değerlendirmeleri istenmiştir. Bu kısımda daha akıcı ve anlaşılır bilgiler sunmak için literatürdeki araştırma sonuçları iki kategoride ele alınacaktır. İlk olarak, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispatın matematik öğretimindeki rolüne ilişkin düşüncelerini konu edinen çalışmaların sonuçları paylaşılacaktır. İkinci olarak ise ispat konusundaki matematik alan bilgilerini inceleyen çalışmaların sonuçları sunulacaktır.

Bir önceki bölümde izah edildiği üzere ispatların verilen bir iddianın doğruluğunu ortaya koyma (verification), eldeki durumun doğruluğunu sebep-sonuç ilişkisi çerçevesinde açıklama (explanation), bilgi paylaşımına aracılık etme (communication), yeni bilgileri keşfetme (discovery) ve bilgiler arası ilişkileri araştırma (exploration) gibi çok sayıda işlevleri bulunmaktadır. Ancak, araştırma sonuçları öğretmenlerin ispatın rolüne ilişkin oldukça kısıtlı bir düşünceye sahip olduklarını göstermektedir. Bu bağlamda öğretmenler tarafından en sık dillendirilen düşünce *ispatın bir iddianın doğruluğunu ortaya koymadaki* rolüyle alakalı fikirleri içermektedir.

Goetting (1995), 11'i ortaokul ve 16'sı lise olmak üzere toplam 27 matematik öğretmeni adayı üzerinde verilerin mülakat tekniğiyle toplandığı nitel bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmada ortaokul öğretmeni adayları ağırlıklı olarak ispatın *bir iddianın doğruluğunu ortaya koymadaki* işlevini dile getirirken lise öğretmeni adayları daha çok ispatın bir teoremin neden ve niçin doğru olduğunu *açıklamadaki rolüne* işaret etmiştir. Mingus ve Grassl'in (1999) çalışmasında yer alan 51 katılımcının (30'u ortaokul, 21'i lise matematik öğretmeni adayı) büyük çoğunluğu ispatın tek bir rolüne vurgu yapmıştır. Bu rol ispatın bir teoremin kanıtlanması sürecinde kullanılan kavramların ve bilgilerin *açıklanmasındaki* işlevini içermektedir. Ulusal literatürden ise Baştürk (2010) tarafından 33 lise matematik öğretmeni adayı üzerinde yapılan çalışmadan bahsedilebilir. Verilerin anket ve mülakat teknikleriyle toplandığı çalışmanın sonuçları katılımcıların ispatın önemine inanmakla birlikte ispat uygulamalarına karşı olumsuz bir tutum geliştirdiklerini göstertmektedir. Katılımcılar %90'lar oranında '*matematik öğrenmek için ispatlar gereklidir'* düşüncesini benimserken diğer yandan katılımcıların %46'sı ispatları sevmediğini, %39'u ise ispat yaparken çok sıkıldığını belirtmiştir. Mülakatta ise katılımcılar genellikle ispatın 'anlamlı ve kalıcı öğrenmenin gerçekleşmesi' için önemli olduğunu dile getirmişlerdir.

Meslekte tecrübeli öğretmenler için de durumun benzer olduğu söylenebilir. Örneğin, Knuth (2002a) 3-20 yıl arasında mesleki tecrübeye sahip 16 matematik öğretmeni üzerinde bir çalışma yapmıştır. Nitel yöntemlerin kullanıldığı araştırmada veriler mülakat tekniğiyle toplanmış ve katılımcılara matematik eğitiminde ispatın rolü ve kullanım amaçlarıyla alakalı sorular yöneltilmiştir. İstisnasız tüm katılımcılar ispatın 'bir teoremin doğruluğunu ortaya koymadaki' rolüne işaret ederken sadece üç öğretmenin ispatın *açıklama özelliğine* vurgu yaptığı, 8 öğretmenin ise ispatın yeni bilgilerin keşfindeki işlevini dile getirdiği görülmüştür. Knuth (2002a), ispatın kavramlar arası ilişkilerin araştırılması, dolayısıyla da bilgi ve düşünce gelişimine yaptığı katkının hiçbir öğretmen tarafından dile getirilmemiş olmasını ilginç bir durum olarak not etmektedir.

**Öğretmenlerin ispat konusundaki alan bilgileri**

Öğretmenlerin ispat konusundaki matematik alan bilgilerini inceleyen çalışmalar yukarıdakine benzer sonuçlar üretmiştir. Matematiksel bir izahın ispat olabilmesi için eldeki iddiayı mantıksal silsile içinde kesin olarak aydınlatması ve üzerinde çalışılan kümenin tüm elemanlarını kapsayacak şekilde genel geçer olması gerekir. Ancak, çok sayıda öğretmenin ispatın mantıksal temellerini oluşturulan bu hususta bilgi eksikliği yaşadıkları görülmektedir. Eldeki iddiayla alakalı özel örnekler üzerinden yapılan açıklamaları ispat olarak kabul ettikleri rapor edilmektedir (Martin & Harel, 1989; Goetting, 1995; Healy & Hoyles, 2000; Knuth, 2002b). Örneğin, Martin ve Harel (1989, s. 44), 101 öğretmen adayının yer aldığı çalışmada katılımcılara "*Rakamları toplamı 3'ün katı olan sayılar 3 ile tam bölünür*" teoreminin kanıtı olabilecek farklı açıklamalar vermiş ve bunlardan hangisinin geçerli bir ispat olduğunu tespit etmelerini istemiştir. Katılımcıların yarıdan fazlasının (65 öğretmen adayının) bir örnek üzerinden yapılan açıklamayı (*48 sayısısın rakamları toplamı 12 eder; 12 sayısı 3 ile bölünmekte ve 48 sayısının kendisi de 3 ile bölünmektedir. Öyleyse verilen teorem doğrudur*) ispat olarak kabul ettikleri görülmüştür. Aynı çalışmada, katılımcıların %52'sinin söz konusu iddiayla alakalı mantıksal açıdan tamamen yanlış olmasına karşın sergilenen düşünce yaklaşımları itibariyle formel bir ispat sürecini çağrıştıran şu izahı geçerli bir ispat olarak kabul ettikleri görülmüştür: "*a sayısı rakamları toplamı 3 ile tam bölünebilen herhangi bir sayı olsun. Kabul edelim ki a sayısını oluşturan rakamlar x, y ve z olsun; bu durumda a=xyz olur. x+y+z toplamı 3 ile bölünebildiğine göre xyz sayısı da 3 ile tam bölünür; dolayısıyla a sayısı 3 ile tam bölünür* (s. 45)". Jones (1997) katılımcı öğretmen adaylarından gruplar halinde beyin fırtınası yaparak ispat kavramıyla ilişkili terimleri ve kavramları tespit etmelerini istemiştir. Sonrasında ise bu terim ve kavramaları kullanarak her bir öğretmen adayının kendi kavram haritasını oluşturması istenmiştir. Sonuçta, matematik başarısı çok üst düzey olan öğretmen adaylarının dahi ispatla alakalı kavramlar arasında var olan anlamsal ilişkileri kurmada yetersiz kaldıkları görülmüştür. Bu bulgulardan hareketle Jones (1997) genel matematik başarısının, ispat konusunda yeter düzeyde alan bilgisine sahip olunduğu manasına gelemeyeceği sonucunu çıkarmaktadır.

Matematikte, doğrudan ispat, dolaylı ispat ve tümevarımla ispat gibi farklı yöntemlerin kullanıldığı bilinmektedir. Önceki bölümlerde bu yöntemlerden her birinin mantığı örnekler üzerinden izah edilmişti. Literatür bulguları öğretmenlerin bu yöntemlerin mantıksal temellerini anlamada zorlandıklarını göstermektedir. Örneğin, Riley (2003) matematik öğretmeni adaylarının olmayana ergi yöntemiyle ispat yapabilme yeterliklerini incelemiştir. Çalışmada yer alan 23 katılımcıdan "$x$ bir tam sayı olsun; $x^3$ bir çift sayı ise $x$ bir çift sayıdır' teoremini ispatlamalarını istenmiştir. Temel matematik derslerinin yanı sıra *ispata giriş* (introductory proof) adında bir ders de okumuş olmalarına rağmen katılımcılardan sadece 9 tanesi *olmayana ergi yöntemini* kullanarak verilen teoremi doğru olarak kanıtlayabilmiştir. Geri kanılanların mantık hatası yaptıkları veya özel örnekler üzerinden eldeki iddianın doğruluğunu açıklamaya çalıştıkları görülmüştür. Stylianides ve arkadaşları (2004), 95 öğretmen adayı üzerinde yürüttükleri araştırmada (70'i ortaokul, 25'i lise matematik öğretmeni adayı) katılımcılara sözel ve sembolik olarak ifade edilmiş ispat örnekleri vermiş ve bunlardan hangilerinin doğru ve geçerli ispat olduğunu tespit etmelerini istemiştir. Bu bağlamda kullanılan durumlardan bir tanesi şu şekildedir: **Teorem:** $\forall x,y \in N$ *için* $x^2 \neq y^2 \Rightarrow x \neq y$ *dir*. **İspat:** *Şayet* $x=y \Rightarrow x^2=y^2$ *dir; dolayısıyla verilen teorem doğrudur* (s. 139). Lise öğretmeni adaylarının üçte ikisi, ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ise beşte biri verilen ispatı doğru olarak tespit etmiştir. Araştırmada kullanılan diğer durumlarda düşünüldüğünde genel başarının çok daha düşük olduğu belirtilmektedir. Yazarlar, lise öğretmeni adaylarının yaklaşık üçte birinin, ortaokul öğretmeni adaylarının ise yarısının *olmayana ergi yöntemiyle* yapılan ispatları kabul etmediklerini belirtmektedir.

Ters durum yöntemiyle ispat konusunda tecrübeli öğretmenlerin de sıkıntılar yaşadığı bilinmektedir. Knuth (2002a) 3-20 yıl arası mesleki tecrübeye sahip 16 matematik öğretmeninden $x > 0 \; için \; x + \frac{1}{x} \geq 2 \; dir$ teoremiyle alakalı aşağıdaki ispatın geçerli olup olmadığını değerlendirmelerini istemiştir. Dikkat edilecek olursa yapılan ispat mantık hatası içermektedir. Genel akış itibariyle formel bir ispat sürecini çağrıştırsa da yapılanlar cebirsel işlemlerden ibaret olup *olmayana ergi yönteminin* mantığını içermemektedir; burada daha ziyade ters işlem (converse) düşüncesinin işe koşulması söz konusudur. Ancak, 16 katılımcıdan 10 tanesi sunulan izahın geçerli bir ispat olduğunu kabul etmiştir.

$x > 0\ için\ x + \frac{1}{x} \geq 2\ dir$

$x + \frac{1}{x} \geq 2\ doğru\ olsun;$

$Eşitsizliğin\ her\ iki\ yanından\ 2\ çıkarılırsa: \frac{x^2-2x+1}{x} \geq 0\ elde\ edilir.$

$Paydaki\ ifade\ tam\ kare\ olduğu\ için\ \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0\ şeklinde\ düzenlenir.$

$Paydaki\ tam\ kare\ ifade\ 0'a eşit\ veya\ büyüktür; dolayısıyla\ x > 0\ dır.$

$Bu\ durumda\ x + \frac{1}{x} \geq 2\ için\ x > 0\ dır.$

$$Buradan\ x > 0\ için\ x + \frac{1}{x} \geq 2\ olduğu\ anlaşılır\ ki\ bu\ da\ verilen\ teoremin\ ispatıdır.$$

Lise ve üniversite matematiği kapsamında sık kullanılan ispat yöntemlerinden biri de *tümevarımla ispattır*. $A \subset N$ olmak üzere $A=\{n /\ n \in N\ ve\ n \geq n_0\}$ kümesi üzerinde bir $P(n)$ teoremi tanımlanmış olsun. Verilen teoremin tümevarım yöntemiyle ispatı için iki şartın sağlanması gerekir. İlk olarak, A kümesinin ilk elemanı olan $n=n_0$ için $P(n)$'in doğru olduğu gösterilmelidir. İkinci olarak, $n_0$'dan büyük herhangi bir $n=k \in A$ için teorem doğru kabul edilip bu kabulden hareketle $n=k+1 \in A$ için teoremin doğruluğu gösterilmelidir ($P(k) \Rightarrow P(k+1)$). Bu iki husus tümevarımla ispat yönteminin mantıksal temellerini teşkil etmektedir. Yapılan çalışmalar, öğretmen adaylarının tümevarımla ispat yöntemiyle alakalı rutinleri başarıyla yürüttüklerini, ancak yöntemin mantıksal temellerine ilişkin kavramsal anlamadan yoksun olduklarını göstermektedir. Movshovitz-Hadar'ın (1993) araştırmasında, 24 lise matematik öğretmeni adayanın tamamı tümevarım yöntemiyle ispat yapmada kendilerini yeterli gördüklerini ifade etmişlerdir. Fakat sadece 2 katılımcının bu yönteminin mantığına hâkim olduğu görülmüştür. Geri kalanlar işlemsel boyutu itibariyle tümevarım yöntemini çağrıştıran, ancak mantıksal hatalar içeren yanlış bir ispatı doğru olarak kabul etmişlerdir. Benzer bulgular Knuth (1999) tarafından da ortaya konulmuştur. Bu çalışmada, katılımcı 18 öğretmeninin tamamı '*1 den n'e kadar olan doğal sayıların toplamı n(n+1)/2 dir*' teoremiyle alakalı tümevarım yöntemiyle oluşturulmuş ispatı doğru bir şekilde tespit etmiş, ancak bu ispat sürecinin mantıksal temellerini izah etmede yetersiz kalmışlardır.

Stylianides vd. (2007) yazılı sınav ve mülakat tekniklerini kullanarak 95 öğretmen adayının (70'i ortaokul, 25'i lise öğretmeni adayı) söz konusu ispat yöntemiyle alakalı bilgilerini incelemiştir. Sonuçlar lise matematik öğretmeni adaylarının daha başarılı olduklarını göstermektedir. Bununla birlikte her iki gruptakilerin büyük çoğunluğu yöntemin mantıksal temellerini anlamada yetersizlik sergilemiştir. Zorlanılan noktalar: i) Tümevarımla ispat sürecinin ilk aşamasını oluşturan $n=n_0$ için verilen bir $P(n)$ teoremin doğruluğunun neden gösterilmesi gerektiği ve bunun ne manaya geldiği; *ii)* Teoremin ispatı için ardışık aşamalar (inductive steps) arasında, yani ($P(k) \Rightarrow P(k+1)$), ilişkinin kurulması ve bunun ne anlama geldiği ve *iii)* Teoremin tanımlı olduğu kümenin özelliklerinin anlaşılması hususlarını içermektedir. Örneğin, katılımcılardan $\forall\ n \in N\ ve\ n \geq 5\ için\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot n = 2^n\ dir$ teoremiyle alakalı verilen bir ispatın doğru olup olmadığını değerlendirmeleri istenmiştir. Verilen ispatta $n=5$ için teoremin doğru olduğu gösterilmiş, $n=k$ için teorem doğru kabul edilmiş ve buradan hareketle $n=k+1$ için teoremin doğruluğu gösterilerek süreç sonlandırılmıştır. Lise öğretmeni adaylarının %92'si ve ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ise %54'ü yapılan ispatın geçerli olduğunu tespit etmiştir. Ancak, her iki gruptan da çok sayı öğretmen adayının yapılan ispatın mantığını anlamada zorlandıkları görülmüştür. Örneğin, ortaokul öğretmeni adaylarının %13'ü verilen ispatın yanlış olduğunu söylerken, %29'u tümevarımla ispatın geçerli olabilmesi için verilen teoremin *tüm doğal sayılar için* doğru olduğunu göstermesi gerekir iddiasında bulunmuştur.

Öğretmenlerin ispat konusunda zorlandıkları konuların başında sayılar teorisi gelmektedir (Martin & Harel, 1989; Morris, 2002; Barkai vd., 2002). Araştırma sonuçları bu alanda yaşanan sıkıntıların, öğretmenlerin tümevarım ve tümdengelim düşünce türleri arasındaki anlamsal farkı kavrayamamış olmalarından ve bunlardan hangisinin formel ispat mantığını içerdiği noktasındaki bilgi eksikliklerinden kaynaklandığına işaret etmektedir. Burada, yüklenilen mana itibariyle tümevarımcı düşünce (inductive reasoning), tümevarımla ispat yönteminden (proof by mathematical induction) tamamen farklıdır. Kısaca açıklamak gerekirse *tümevarımcı düşünce*, sınırlı sayıda veriler, spesifik örnekler ve özel durumlar üzerinden yapılan mantıksal çıkarsamalarla eldeki teoremin doğruluğunun iddia edildiği düşünce süreçlerini ifade etmektedir. Tümdengelimci düşünce ise formel ispat mantığını içermektedir; genel yaklaşımların sergilendiği ve mantıksal çıkarsamaların (deduction) yapıldığı düşünce süreçlerine karşılık gelmektedir. Martin ve Harel'in (1989) araştırmasında 101 matematik öğretmeni adayının yarıdan fazlasının tümevarım düşüncesi işe koşularak özel örnekler üzerinden yapılan açıklamaları geçerli bir ispat olarak kabul ettikleri görülmüştür. Örneğin, katılımcılardan 65 tanesi "*12 sayısı 36'yı tam böler, 36 sayısı da 360'ı tam böler; öyleyse 12 sayısı 360'ı tam böler* (s. 44)" şeklindeki örnek temelli bir izahı "$a, b, c \in Z$ *olsun;* $a \mid b$ *ve* $b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (s.43)" teoreminin ispatı olarak kabul etmiştir.

Morris'in (2002) 30 öğretmen adayı üzerinde yaptığı araştırma da benzer bulgular üretmiştir. Verilerin her bir katılımcıyla yapılan mülakatlardan elde edilmiş olması bu çalışmayı önemli kılmaktadır. Araştırmada, "*... n bir sayma sayısı olmak üzere* $n^2+n$ *her zaman bir çift sayıdır* (s. 86)" teoreminin ispatı olarak katılımcılara tümevarım ve tümdengelim düşüncelerini içeren 4 adet açıklama verilmiş ve bunların geçerli ispat olup olmadıklarını değerlendirmeleri istenmiştir. Bu izahlardan iki tanesi şu şekildedir:

Tümdengelim düşüncesi işe koşularak yapılan ispat:

> Herhangi bir n sayma sayısı için $n^2+n=n(n+1)$
>
> $n(n+1)$ iki ardışık sayma sayısının çarpımıdır
>
> $n$ ve $(n+1)$ ardışık sayılar olduğu için bunlardan biri mutlaka çift sayıdır
>
> Dolayısıyla, n ve $(n+1)$ sayılarından biri 2 ile tam bölünür
>
> Dolayısıyla $n(n+1)$ çarpımı 2 ile tam bölünür, bu nedenle de çifttir
>
> Sonuç olarak, her bir $n$ sayma sayısı için $n^2+n$ bir çift sayıdır.

Tümevarım düşüncesi kullanılarak oluşturulan açıklama:

> $n=1$ olsun; bu durumda $n^2+n=1^2+1=2$; 2 ise bir çift sayıdır
>
> $n=2$ olsun; bu durumda $n^2+n=2^2+2=6$; 6 ise bir çift sayıdır
>
> Burada, $n$ sayısının tek ve çift olduğu her iki durum içinde sonucun çift olduğu görülmektedir. Bu nedenle herhangi bir $n$ sayma sayısı için $n^2+n$ her zaman çift bir sayı ifade eder.

Katılımcılardan sadece %30'unun tümdengelim düşüncesi işe koşularak yapılan açıklamayı geçerli bir ispat olarak tespit edip yorumladıkları görülmüştür. %40'lık bir kesimin ise bu iki düşünce türü arasındaki nitel farkı anlamada zorlandıkları ve tümevarım düşüncesi işe koşularak sadece iki adet örnek üzerinden yapılan açıklamayı geçerli ispat olarak kabul ettikleri belirtilmektedir.

Barkai vd. (2002) ortaokul matematik öğretmenlerinin bölünebilme kurallarıyla alakalı ispat yeterliklerini incelemiştir. 27 öğretmenin katıldığı çalışmada veriler yazılı sınavla toplanmıştır. Sonuçlar, katılımcıların kayda değer bir kısmının özel örnekler üzerinden açıklamalar yapmayı tercih ettiklerini göstermektedir. Örneğin, katılımcıların tamamı "*ardışık beş tam sayının toplamı 5 ile tam olarak bölünür*" teoremini doğru olarak kabul etmiştir; ancak bunların üçte biri formel kanıt mantığını kullanarak teoremi ispat edebilmiştir. Katılımcıların %52'si özel örnekler üzerinden açıklamalar yapmış ve bunlarında yarıdan fazlası yaptıkları izahların geçerli ispat olduğuna ilişkin inançlarını belirtmiştir.

Sayılar teorisi konusunda son olarak Gholomazad, Liljedahl ve Zazkis'in (2004) çalışmasından bahsetmek isteriz. Bu araştırmada, katılımcı 75 öğretmen adayına sonlu ve sonsuz kümelerin kapalılık özelliğiyle alakalı beş farklı açıklama verilmiş; verilen bu açıklamaların geçerli ispat olup olmadıklarını yorumlamaları ve kanıt olarak kabul etmedikleri durumlar için kendi ispatlarını oluşturmaları istenmiştir. Sonuçta, öğretmen adaylarının örnek temelli açıklamaları ispat olarak kabul etme noktasında çok güçlü eğilimlerinin olduğu görülmüştür. Yazarlar, bu durumun katılımcıların eldeki konunun (kümelerin kapalılık özelliği) esası ve temel özellikleriyle alakalı bilgi eksikliğinden ziyade ispat konusundaki yetersizliklerinden kaynaklandığını belirtmektedir. Çalışma kapsamında kullanılan ispat durumlarından bir tanesi "*13 sayısının katlarından oluşan sayıların kümesi A={0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91,104, 117, 130, 143, 156, 169, …} olsun. Bu küme toplama işlemine göre kapalıdır* (s. 643)" teoremiyle alakalı olup şu şekildedir:

> 13 +26 = 39, 13'ün katıdır
>
> 39 + 52 = 91, 13'ün katıdır
>
> 65 + 78 = 143, 13'ün katıdır
>
> 91 + 104 = 195, 195 = 15 × 13, öyleyse 195 13'ün katıdır
>
> 117 + 156 = 273, 273 = 21 × 13
>
> 130 + 169 = 299, 299 = 23 × 13
>
> 195 + 143 = 338, 338 = 26 × 13
>
> 1300 + 2613 = 3913, 3913 = 301 × 13
>
> Görüldüğü üzere 13'ün katı olan iki sayı toplandığında yine 13'ün katı olan bir sayı elde edilmektedir; dolayısıyla verilen kümenin toplama işlemine göre kapalılık özeliği vardır.

Katılımcıların %68'i yapılan bu açıklamayı formel bir ispat olarak kabul etmiştir. Bunlardan 20 tanesinin teoremin doğruluğundan emin olmak için iki-üç örneğin yeterli olacağını belirterek diğerlerinin üzerini çizdiği belirtilmektedir. Sadece 14 öğretmen adayı cebirsel temsilleri kullanarak ve formel kanıt mantığını işe koşarak doğru ispatlar yapabilmiştir.

Literatür bulguları öğretmenlerin ispat konusundaki zorluklarının geometri alanında da devam ettiğini göstermektedir. Varghese'nin (2007) çalışmasında, 17 matematik öğretmeni adayından 14 tanesinin '*Herhangi bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı* $360^0$ *dir*' teoreminin ispatı olarak birtakım açıklamalar yaptığı, ancak bunlardan sadece iki tanesinin geçerli ispat olduğu görülmüştür. İki öğretmen adayının semboller kullanarak yaptığı izahların ise ispat olarak kabul edilebilecek düzeyde olduğu belirtilmektedir. Geri kalan ispatların tamamen yanlış olduğu; bunun da katılımcıların teoremde verilen bilgileri anlamadaki yetersizliklerinden kaynaklandığı belirtilmektedir. Geometri konularında yaşanan sıkıntıların, örnek temelli ve uygulama içerikli izahların ispat olarak kabul edilmesi hususuyla ve geometrik şekillerin görsel özelliklerine yoğunlaşmadan kaynaklanan yanılgı ve hatalarla alakalı olduğu belirtilmektedir. Goetting'in (1995) çalışmasında yer alan çok sayıda öğretmen adayı örnek temelli açıklamaları ve özel durumları temsil eden geometrik çizimleri formel kanıt olarak değerlendirmiştir. Benzer sonuçlar Knuth (2002a) tarafından da rapor edilmektedir. Katılımcı 16 lise matematik öğretmeninden 5 tanesi "*bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı* $180^0$ *eder* (s. 392)"' teoreminin ispatı olarak sunulan uygulama içerikli bir izahı (empirically based argument) formel ispat olarak kabul etmiş; bir katılımcı ise formel olmasa da verilen açıklamanın matematiksel açıdan geçerli bir ispat olduğunu iddia etmiştir. Katılımcılara sunulan uygulama içerikli izah ve ilgili görsel şu şekildedir: *Verilen üçgenin köşesindeki açılar kesilip sağ taraftaki gibi bir araya getirilirse ölçüleri toplamının* $180^0$ *olduğu görülür (s. 392).*


**Şekil 2:** Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının $180^0$ olduğuna dair uygulama içerikli açıklama (Knuth, 2002a, s. 392).

Dickerson'ın (2008) çalışmasında ise 17 lise matematik öğretmeninden 16 tanesi verilen geometrik şekillerin yapılarının bozukluğundan veya ilgili açıklamalarda ispat için gerekli olmayan detay bilgilere yer verilmediği için kendilerine sunulan geçerli ispatları kabul etmemişlerdir. Özetle, öğretmenlerin geometri konularıyla alakalı ispat yapma zorluklarının iki temel alandaki eksiklikten kaynaklandığı söylenebilir. Birincisi, matematiksel ispatların mantıksal temelleriyle alakalı bilgi ve düşünce eksiklikleridir. İkincisi ise geometrik şekillere manasını veren arka plandaki soyut düşüncelere ulaşma ve ispat sürecini bu kavramlar üzerinden yürütmedeki sıkıntılardır.

## SONUÇ ve ÖNERİLER

Akıl yürütmenin yoğun bir şekilde kullanıldığı ispat uygulamaları matematik yapmanın en etkili yoludur. Bir teorem ispatlanırken sonuca ilişkin varsayım ve tahminlerin ötesine geçilir; geçmiş bilgiler sebep-sonuç ilişkisi çerçevesinde kullanılarak ve mantıksal çıkarsamalar (deduction) yoluyla eldeki iddiayla alakalı tüm durumları içeren açık, net ve genel geçer açıklamalar yapılır. İspatın öğrencilere çok sayıda bilişsel kazanımlar sunduğu bilinmektedir. Bilgiler arası ilişkilerin kavranması, analiz-sentez yapabilme yeteneklerinin artırılması, kavramsal öğrenmenin önünü açması, yaparak yaşayarak öğrenmeye imkân tanıması, yansıtıcı düşüncenin aktive edilmesi ve üst-bilişsel düşüncenin gelişimini desteklemesi bunlardan bazılarıdır. Öğretim açısından ise matematiksel dil ve terminolojinin kullanıldığı etkili bir iletişim aracı olduğunu söyleyebiliriz. Bir diğer önemli işlevi ise eldeki bilginin mantıksal temelleri ve kavramsal boyutlarıyla izahına imkân tanımasıdır.

Ancak, araştırma sonuçları öğretmenlerin ispat konusunda ciddi eksikliklerinin olduğunu göstermektedir. İspatın rolüne ilişkin '*ispatlar bir iddianın doğruluğunu kanıtlamak için vardır*' türünden tek düze bir düşünceye sahip oldukları söylenebilir. Alan bilgilerinin ise kavramsal anlamadan uzak, daha çok ispat sürecinde takip edilen rutinlere indirgenmiş olduğu anlaşılmaktadır. Alan bilgisi noktasındaki eksikliklerinin farklı ispat yöntemlerinin mantıksal temelleriyle alakalı olduğu, sayılar ve geometri konularında yoğunlaştığı söylenebilir. Bu bağlamda kaydedilen en temel sıkıntı ise örnek ve uygulama temelli özel durumlar üzerinden yapılan izahları ispat olarak kabul etmeleridir. Lise ve üniversite matematiği kapsamında yaygın olarak kullanılmasına rağmen tümevarımla ispat yönteminin mantıksal temellerini anlamaktan dahi uzak oldukları görülmektedir.

Olmayana ergi yönteminin mantığını ise bir işlemsel süreci sondan başa doğru çözümlemede takip edilen rutin bir yaklaşıma indirgedikleri anlaşılmaktadır.

Öğretmenlerin matematik alan bilgilerinin ve öğretime ilişkin düşüncelerinin sınıf içi pratiklerini şekillendirdiği, dolayısıyla öğrencilerin düşünce gelişimi üzerinde etkilerinin olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, matematik eğitimi kaynaklarında (NCTM, 200; TTKB, 2013a,b) ortaya konulan hedefler doğrultusunda kanıt temelli öğretimler yapabilmeleri için öğretmenlerin bu alandaki yeterliklerinin artırılması gerekir. Öğretmenlerin matematiksel ispatların öğrencilere sağladığı sosyal ve bilişsel kazanımların farkında olmaları ve bunların önemine inanmaları sağlanmalıdır. Ayrıca, öğretmen adayları ve öğretmenler ispatların sınıf içi öğretim faaliyetlerini etkin kılmak adına sunduğu pedagojik yararlar konusunda bilinçlendirilebilir. Bu amaçla, öğretmen yetiştiren kurumlarda okutulan alan matematiği ve matematik eğitimi dersleri kapsamında bu kazanımlardan bahsedilmelidir. Söz konusu derslerin içeriklerinde birbirini bütünleyecek şekilde gerekli düzenlemeler yapılabilir. Bu dersler kapsamında ispat uygulamalarına çokça yer verilmesi ve bu uygulamaların sadece matematiksel boyutuyla değil aynı zamanda pedagojik boyutuyla da tartışılması önem arz etmektedir. Yapılacak bu tür tartışma ve değerlendirmeler öğretmen adaylarının sadece alan bilgilerini güçlendirmekle kalmayacak, ispatın sağlayacağı kazanımların ve pedagojik yararların çok daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır. Özetle, ispatlar belli konuların öğretiminde kullanılıp sonra terkedilen rutin içerikli uygulamalar olmaktan çıkarılmalıdır. Zaman ve konu alanı kısıtlamasının ötesine geçilmeli, problem çözme gibi matematik ders programlarının özünü teşkil eden temel düşünce yaklaşımlarından biri olarak değerlendirilmelidir. Matematik öğrenmenin ve matematik yapmanın en temel aracı olarak ispatlardan yararlanılmalıdır. Kuramsal bilgilerin doğruluğunu incelemek ve kavramlar arası ilişkileri kurmak maksadıyla her fırsatta ispatlara yer verilmelidir. Şartlar elverdiği ölçüde, yeni bilgiler hazır olarak verilmek yerine kanıtlanarak elde edilmelidir.

Sonuç olarak, ispat konusundaki öğretmen yeterlikleriyle alakalı literatürde var olan çalışmaların neredeyse tamamının yabancı araştırmacılara ait olduğu görülmektedir. Türkiye'de bu alanda ciddi bir eksikliğin olduğunu söyleyebiliriz. Bu eksikliğin giderilmesi için nitel yöntemlerin kullanıldığı ve öğretmenlerin ispat konusundaki yeterliklerinin matematik alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi boyutuyla el alınıp incelendiği çok sayıda çalışmanın yapılması önem arz etmektedir. Bu çalışmaların ortaya koyacağı bulgular ışığında öğretmenlerin ispat konusundaki bilgi sistemlerinin ve sınıf içi öğretimlerinin geliştirilmesi adına daha rasyonel öneriler getirilebilir.

## KAYNAKÇA

Alibert, D. & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). The Netherlands: Kluwer.

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D. & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 57-64), Norwich, UK.

Baştürk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions of mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, 36(3), 283-298.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

Coe, R. & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, 20(1), 41-53.

Davis, P. (1986). The nature of proof. In M. Carss (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education* (pp.352-358). Adelaide, South Australia: Unesco.

De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the geometer's sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Dickerson, D. S. (2008). High school mathematics teachers' understandings of the purposes of mathematical proof. *Unpublished doctoral dissertation*, Syracuse University, Syracuse.

Gholamazad, S., Liljedahl, P. & Zazkis, R. (2004). What counts as proof? Investigation of pre-service elementary teachers' evaluation of presented 'proofs'. In D. E. McDougall & J. O. Ross (Eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 639-646), University of Toronto, Toronto.

Goetting, M. (1995). The college students' understanding of mathematical proof. Unpublished doctoral dissertation, University of Maryland, Maryland.

Griffiths, P. A. (2000). Mathematics at the turn of the millennium. *American Mathematical Monthly*, 107, 1-14.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). The Netherlands: Kluwer.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: Information Age.

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389-399.

Jones, K. (1997). Student teachers' conceptions of mathematical proof. *Mathematics Education Review*, 9, 21-32.

Knuth, E. (1999). The nature of secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Unpublished doctoral dissertation*, University of Colorado, Colorado.

Knuth, E. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.

Knuth, E. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61-88.

Ko, Y. Y. & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 68-77.

Martin, G. & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 41-51.

Mingus, T. & Grassl, R. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, 99(8), 438-444.

Morris, A. K. (2002). Mathematical reasoning: Adults' ability to make the inductive-deductive distinction. *Cognition and Instruction*, 20(1), 79-118.

Movshovitz-Hadar, N. (1993). The false coin problem, mathematical induction and knowledge fragility. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 253-268.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standard for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

PISA (2015). PISA-2015 sonuç raporu. Şubat 2017 tarihinde '*https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf*' adresinden ulaşılmıştır.

Polya, G. (1973). *How to solve it*. United States of America: Princeton University Press.

Riley, K. J. (2003). An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proof and refutations. Unpublished doctoral dissertation, Montana State University, Bozeman.

Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior,* 13(1), 55-80.

Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 237-253.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Philippou, G. N. (2004). Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 133-162.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.

TTKB (2013a). *İlköğretim matematik dersi öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

TTKB (2013b). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Varghese, T. (2007). Student teachers' conceptions of mathematical proof. *Unpublished master thesis*, University of Alberta, Alberta, Canada.

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 431-459.

Wheeler, D. (1990). Aspects of mathematical proof. *Interchange*, 21(1), 1-5.

Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards to school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.