σ Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi
Sigma
2004/3

NONEXISTENCE OF GLOBAL SOLUTION OF EQUATION SYSTEM REPRESENTING THE VOLTERRA-LOTKA COMPETITION MODEL

Özlem YILMAZ*, Gülseren AYDIN

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Beşiktaş-İSTANBUL

Geliş/Received: 06.10.2003 Kabul/Accepted: 02.09.2004

ABSTRACT

In this study, the problem of nonexistence of global solution of equation system representing the Volterra-Lotka competition model in ecology, is handled with Neumann boundary conditions where $\Omega \subset R^n$ is bounded and sufficiently uniform. While examining this problem, the generalized concavity method improved by V.K. Kalantarov and O.A. Ladyzhenskaya is used. In this method, under the existence of local solution, by using energy integral, it is shown that the positive $\psi(t)$ function, having the properties of the equation and the boundary conditions and representing the local solution of the equation under defined norm, satisfies the hypotheses of Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemma. In conclusion, it is found that the $\psi(t)$ function namely the norm of the solution is infinite at a finite time t.
Keywords: Volterra-Lotka competition model, nonexistence of global solution, energy integral

VOLTERRA-LOTKA REKABET MODELİNİ TEMSİL EDEN DENKLEM SİSTEMİNİN GLOBAL ÇÖZÜMÜNÜN YOKLUĞU

ÖZET

Bu çalışmada; yeterince düzgün sınıra sahip bir bölgede ekolojide Volterra-Lotka rekabet modelini temsil eden denklem sisteminin global çözümünün yokluğu problemi, Neumann sınır koşulu ile ele alınmıştır. Bu problem incelenirken V.K. Kalantarov ve O.A. Ladyzhenskaya tarafından geliştirilen genelleştirilmiş konkavlık yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde, yerel çözümün varlığı temel alınarak, enerji integrali yardımıyla, denklemin ve sınır koşullarının özelliklerini taşıyan ve belli bir norma göre denklemin yerel çözümünü temsil eden pozitif bir $\psi(t)$ fonksiyonunun, Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasının hipotezlerini sağladığı gösterilir. Sonuçta, $\psi(t)$ fonksiyonunun yani çözümün normunun sonlu bir t anında sonsuz olduğu bulunur.
Anahtar Sözcükler: Volterra-Lotka rekabet modeli, global çözümün yokluğu, enerji integrali

---

1. GİRİŞ

Lineer olmayan kısmi türevli evolusyon denklemleri ile verilmiş başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığı, tekliği, global yokluğu ve global davranışları konusunda A.Mc. Nabb [1], V.N. Maslennikova [2], J. Rauch ve J.Smoller [3], D.E Jackson [4]

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: e-mail: oyilmaz@fened.msu.edu.tr , Tel: (0212) 236 69 36/131

ve D.Erdem ve V.K. Kalantarov [5] çeşitli araştırmalar yapmışlardır. Matematiksel fizik ve matematiksel biyolojinin birçok problemi, L lineer veya yarılineer ikinci mertebeden parabolik operatör olmak üzere,

$$Lu = g_1\left(x,t,u,v\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g_2\left(x,t,u,v\right) \tag{2}$$

yapısındaki denklem sistemleri ile verilir. Bu çalışmada (1)-(2) yapısına uygun Volterra-Lotka rekabet modelini temsil eden denklem sistemi Neumann sınır koşulu ile incelenmiş ve sistemin enerji integrali elde edilip Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemması kullanılarak çözümün global yokluğu araştırılmıştır.

Bu çalışma ile, ekolojide canlılar arasındaki rekabet modeline uyan Volterra–Lotka rekabet modeli genelleştirilerek, lineer olmayan parabolik denklem sistemlerinin global çözümlerinin yokluğu konusundaki incelemelere bir ışık tutulmuştur.

2. KALANTAROV-LADYZHENSKAYA LEMMASI

Bu çalışmada genelleştirilmiş konkavlık yöntemi olarak bilinen Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemması kullanılmıştır. Bu Lemmaya göre,

$\psi(t)$ iki kez türetilebilen ve $\alpha > 0$, c_1, $c_2 \geq 0$, $t > 0$ için,

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)[\psi'(t)]^2 \geq -2c_1\psi'(t)\psi(t)-c_2[\psi(t)]^2 \tag{3}$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun.

Eğer,

$$\psi(0)>0\,,\ \psi'(0)>-\gamma_2\alpha^{-1}\psi(0) \ \text{ ve } \ c_1+c_2>0$$

ise,

$$\gamma_1 = -c_1+\sqrt{c_1^{\,2}+\alpha c_2}\,,\quad \gamma_2 = -c_1-\sqrt{c_1^{\,2}+\alpha c_2}$$

olmak üzere,

$$t \to t_1 = \frac{1}{2\sqrt{c_1^2+\alpha c_2}}\,\ell n\frac{\gamma_1\psi(0)+\alpha\psi'(0)}{\gamma_2\psi(0)+\alpha\psi'(0)}$$

için,

$$\psi(t) \to +\infty$$

olur. [6]

3. PROBLEMİN KONULMASI

Volterra-Lotka rekabet modelini temsil eden aşağıdaki denklem sistemi ele alınsın.

$$u_t-\Delta u = f_1\left(t,u,v\right)+\phi\left(x,t,u,u_x,v\right) \qquad x\in\Omega,\ t>0 \tag{4}$$

$$v_t-\Delta v = f_2\left(t,u,v\right)+\varphi\left(x,t,u,v\right) \qquad x\in\Omega,\ t>0 \tag{5}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0$$

$$v(x,0)=v_0(x), \qquad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0$$

$\Omega \in R^n$ de sınırlı ve yeterince düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip bir bölge, $f_i(t,u,v)$ $(i=1,2)$, $\phi(x,t,u,u_x,v)$ ve $\varphi(x,t,u,v)$ fonksiyonları değişkenlerine göre sürekli fonksiyonlardır. $\phi(x,t,u,u_x,v)$ ve $\varphi(x,t,u,v)$ fonksiyonları M_1, M_2, M_3, N_1, N_2 pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$\left|\phi(x,t,u,u_x,v)\right| \le M_1|u_x| + M_2|u| + M_3|v| \quad \forall u,v \in R \tag{6}$$

$$\left|\varphi(x,t,u,v)\right| \le N_1|v| + N_2|u| \tag{7}$$

Ayrıca değişkenlerine göre türetilebilen $G(t,u,v)$ fonksiyonelinin aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilsin:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}G(t,u(\tau),v(\tau)) = f_1(t,u(\tau),v(\tau))u_\tau + f_2(t,u(\tau),v(\tau))v_\tau \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}G(t,u(x,t),v(x,t)) = G_t + f_1u_t + f_2v_t \tag{9}$$

$$f_1u + f_2v \ge 2(\alpha_1+1)G(t,u,v)\ , \quad \alpha_1 > 0 \tag{10}$$

$$G_t(t,u,v) \ge M_4(f_1u + f_2v) \tag{11}$$

$$M_4 = \frac{M_1^2(1+\alpha_1)(1+2\varepsilon)}{4(\alpha_1-\beta)(1-\varepsilon)},\quad \beta\in(0,\alpha_1),\ \varepsilon\in(0,1)$$

Bu problemin global çözümünün yokluğu, Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasına dayanan aşağıdaki teorem yardımıyla verilecektir.

Teorem : $\{u,v\}$ fonksiyon çifti (4)-(5) probleminin yerel çözümü olsun ve bu problem için (6)-(11) koşulları sağlansın:

Burada,

$$\alpha = \sqrt{1+\beta} - 1\ , \quad \delta = -\frac{\gamma_2}{\alpha}$$

$$\gamma_1 = -c_1 + \sqrt{c_1^2 + \alpha c_2}\ , \quad \gamma_2 = -c_1 - \sqrt{c_1^2 + \alpha\, c_2}$$

$$c_1 = \max\left\{\frac{M_1^2}{4\alpha_1} + M_2 + 2\varepsilon_1, \frac{M_3^2+N_2^2}{4\varepsilon_1} + N_1\right\},\ \varepsilon_1 \in (0,1)$$

$$c_2 = 4(\alpha_1+1)M_7$$

$$M_5 = M_4\left(\frac{M_1^2 + 4\varepsilon M_2 + 8\varepsilon^2}{4\varepsilon}\right) + \frac{1}{4}\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1-\beta}\left(M_2^2\left(\frac{\varepsilon^2+\varepsilon+1}{\varepsilon}\right) + 2N_2^2\right)$$

$$M_6 = M_4\left[\frac{M_3^2+N_2^2}{4\varepsilon} + N_1\right] + \frac{1+\alpha_1}{4(\alpha_1-\beta)}\left[2N_1^2 + \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)M_3^2\right]$$

$$M_7 = \max\{\ M_5, M_6\ \}$$

olmak üzere,

$$0 < k < \frac{2}{\delta}$$

için, $u_0(x)$ ve $v_0(x)$ başlangıç fonksiyonları,

$$A_0 = -\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 - \frac{1}{2}\|\nabla v_0\|^2 + \int_\Omega G(0,u_0,v_0)\ dx - \frac{M_4}{2}\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) > \frac{(1+\alpha)^2}{\alpha(\alpha_1+1)}\frac{(\delta T_0+1)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)}{2k-k^2\delta}$$

ifadesini sağlarsa,

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{c_1^2+\alpha c_2}}\ln\frac{\gamma_1[\ T_0\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)\left(1+\alpha^2\right)+\alpha(\alpha_1+1)A_0k^2\ ]+2\alpha^2(\alpha_1+1)A_0k-\alpha(1+\alpha)^2\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|\right)^2}{\gamma_2[\ T_0\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)\left(1+\alpha^2\right)+\alpha(\alpha_1+1)A_0k^2\ ]+2\alpha^2(\alpha_1+1)A_0k-\alpha(1+\alpha)^2\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|\right)^2}$$

için

$$\lim_{t\to t_1}\left\{\int_0^t\left(\|u(.,t)\|^2+\|v(.,t)\|^2\right)d\tau\right\} = \infty$$

olur.

İspat: $\{u,v\}$ fonksiyonları sözkonusu başlangıç-sınır değer probleminin yerel çözümü olsun. Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasındaki $\psi(t)$ fonksiyonu, teoremin koşullarını sağlayacak şekilde ve γ pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\psi(t) = \int_0^t\left(\ \|u(.,\tau)\|^2 + \|v(.,\tau)\|^2\right)\ d\tau + (T_0 - t)\ \left(\ \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) + \gamma(t+k)^2$$

şeklinde seçilsin. $\psi(t)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleri alınıp düzenlemeler yapılırsa,

$$A_1 = \int_0^t\left(\ \|u\|^2 + \|v\|^2\right)\ d\tau \quad \text{ve} \quad A_2 = \int_0^t\left(\ \|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2\right)\ d\tau$$

olmak üzere,

$$\psi'(t) \le 2\sqrt{A_1A_2} + 2\gamma(t+k) \tag{12}$$

$$\psi''(t) = \frac{d}{dt}\left[\ \|u(.,t)\|^2 + \|v(.,t)\|^2\right] + 2\gamma$$

olur.

$$\chi(t) = \psi''(t)\psi(t) - (1+\alpha)\left[\psi'(t)\right]^2 \tag{13}$$

ifadesindeki terimler ayrı ayrı kısıtlanırsa; (12) eşitsizliği kullanılarak,

$$\left[\psi'(t)\right]^2 \le \left(2\sqrt{A_1A_2} + 2\gamma(t+k)\right)^2 = 4A_1A_2 + 4\gamma^2(t+k)^2 + 8\sqrt{A_1A_2}\gamma(t+k)$$

elde edilir ve son terime Young eşitsizliği uygulanırsa eşitsizlik,

$$\left[\psi'(t)\right]^2 \le 4\left(1+2\varepsilon_5\right)A_1A_2+4\left(1+\frac{1}{2\varepsilon_5}\right)\gamma^2\left(t+k\right)^2 \tag{14}$$

şeklinde yazılır.

$\psi''(t)\psi(t)$ terimi için ise,

$$\psi''(t)\psi(t)=\left\{\frac{d}{dt}\left[\ \|u\|^2+\|v\|^2\right]+2\gamma\right\}\left\{A_1+\left(T_0-t\right)\left(\ \|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma\left(t+k\right)^2\right\} \tag{15}$$

eşitliği gözönüne alınarak eşitliğin sağındaki,

$$\frac{d}{dt}\left[\ \|u\|^2+\|v\|^2\right]$$

yerine daha küçük bir ifade koymak için, denklem sistemindeki (4) denkleminin her iki yanı $L_2(\Omega)$ da u ile skaler çarpılıp, $(\Delta u,u)$ terimine 1. Green Özdeşliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u)=-\|u_x\|^2+\left(f_1,u\right)+\left(\phi,u\right) \tag{16}$$

elde edilir. (5) denkleminin her iki yanı da $L_2(\Omega)$ da v ile skaler çarpılıp, $(\Delta v,v)$ terimine 1. Green Özdeşliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v,v)=-\|v_x\|^2+\left(f_2,v\right)+\left(\varphi,v\right) \tag{17}$$

elde edilir. (16) ve (17) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)=-\|u_x\|^2-\|v_x\|^2+(\phi,u)+(\varphi,v)+\left(f_1,u\right)+\left(f_2,v\right) \tag{18}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin son iki terimi yerine (10) eşitsizliği kullanılıp, daha sonra (6),(7) eşitsizliği ve sonra da Cauchy eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\ \|u\|^2+\|v\|^2\right) &\ge 2\left(\alpha_1+1\right)\left[-\frac{1}{2}\|u_x\|^2-\frac{1}{2}\|v_x\|^2+\int_\Omega G\left(t,u,v\right)\ dx\right]\\ &+\alpha_1\|u_x\|^2+\alpha_1\|v_x\|^2+M_1\|u_x\|\|u\|-M_2\|u\|^2\\ &-M_3\|u\|\|v\|-N_1\|v\|^2-N_2\|u\|\|v\|\end{aligned} \tag{19}$$

elde edilir, eşitsizliğin sağ tarafındaki,

$$E(t)=-\frac{1}{2}\|u_x\|^2-\frac{1}{2}\|v_x\|^2+\int_\Omega G\left(t,u,v\right)\ dx$$

(4)-(5) denklem sistemi için enerji integralini verir. (19) de Young eşitsizliği kullanılıp,

$$\frac{M_1\varepsilon}{2}=\alpha_1 \ , \qquad \frac{M_3\varepsilon}{2}=\varepsilon_1 \ , \qquad \frac{N_2\varepsilon}{2}=\varepsilon_1$$

$$l_1=\frac{M_1^{\ 2}}{4\alpha_1}+M_2+2\varepsilon_1 \ , \quad l_2=\frac{M_3^{\ 2}+N_2^{\ 2}}{4\varepsilon_1}+N_1$$

olarak alındığında,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 2(\alpha_1+1)E(t)+\alpha_1\|v_x\|^2-l_1\|u\|^2-l_2\|v\|^2 \tag{20}$$

elde edilir. (18) eşitliği $(0,t)$ aralığında integre edilirse ve (6),(7) koşulları kullanıldıktan sonra Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+\int_0^t\|u_x\|^2d\tau\leq -\int_0^t\|v_x\|^2d\tau+\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)&\\ +\frac{M_1\varepsilon}{2}\int_0^t\|u_x\|^2\,d\tau+\frac{M_1}{2\varepsilon}\int_0^t\|u\|^2\,d\tau&\\ +M_2\int_0^t\|u\|^2\,d\tau+\frac{M_3\varepsilon}{2}\int_0^t\|u\|^2\,d\tau+\frac{M_3}{2\varepsilon}\int_0^t\|v\|^2\,d\tau&\\ +N_1\int_0^t\|v\|^2\,d\tau+\frac{N_2\varepsilon}{2}\int_0^t\|u\|^2\,d\tau+\frac{N_2}{2\varepsilon}\int_0^t\|v\|^2\,d\tau&\\ +\int_0^t\left[(f_1,u)+(f_2,v)\right]d\tau&\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsitsizlikte,

$$\frac{M_1\varepsilon}{2}=\varepsilon_2 \ , \ \frac{N_2\varepsilon}{2}=\varepsilon_2 \ \text{ ve } \ \frac{M_3\varepsilon}{2}=\varepsilon_2$$

alınıp negatif olan terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned}\int_0^t\|u_x\|^2d\tau\leq\frac{1}{1-\varepsilon_2}\Bigg[-\int_0^t\|v_x\|^2d\tau+\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\left(\frac{M_1^{\ 2}}{4\varepsilon_2}+M_2+2\varepsilon_2\right)\int_0^t\|u\|^2\,d\tau&\\ +\left(\frac{M_3^{\ 2}+N_2^{\ 2}}{4\varepsilon_2}+N_1\right)\int_0^t\|v\|^2\,d\tau+\int_0^t\left[(f_1,u)+(f_2,v)\right]\,d\tau&\end{aligned} \tag{21}$$

olarak bulunur. (4) denkleminin her iki yanı $L_2(\Omega)$ da u_t ile skaler çarpılıp, $(\Delta u,u_t)$ terimine 1. Green Özdeşliği uygulanırsa,

$$\|u_t\|^2=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|+(f_1,u_t)+(\phi,u_t) \tag{22}$$

elde edilir. (5) denkleminin her iki yanı da $L_2(\Omega)$ da v_t ile skaler çarpılıp, $(\Delta v, v_t)$ terimine 1. Green Özdeşliği uygulanırsa,

$$\|v_t\|^2 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_x\|^2 + (f_2, v_t) + (\varphi, v_t) \tag{23}$$

elde edilir. (22) ve (23) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_x\|^2 + (f_1, u_t) + (f_2, v_t) + (\phi, u_t) + (\varphi, v_t) \tag{24}$$

elde edilir. (24) de (9) koşulu kullanılırsa,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) = \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 - (\phi, u_t) - (\varphi, v_t) + \int_\Omega G_t \quad dx \tag{25}$$

olup bu eşitlik,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 - \int_\Omega |\phi| \; |u_t| \; dx - \int_\Omega |\varphi| \; |v_t| \; dx + \int_\Omega G_t \quad dx$$

şeklinde ifade edilebilir. Son ifadede sırasıyla Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri kullanılıp ,

$$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon_3$$

alınırsa,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq (1-\varepsilon_3)\|u_t\|^2 + (1-\varepsilon_3)\|v_t\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}\|\phi\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}\|\varphi\|^2 + \int_\Omega G_t \quad dx$$

olur. (6),(7) koşulları kullanılıp, Young eşitsizliği uygulanırsa ve sonra $\varepsilon = 1$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(E(t)) \geq {} & (1-\varepsilon_3) \; \|u_t\|^2 + (1-\varepsilon_3) \; \|v_t\|^2 - \frac{M_1^{\,2}}{4\varepsilon_3}(1+2\varepsilon_4) \; \|u_x\|^2 \\ & - \frac{1}{4\varepsilon_3}\left[M_2^{\,2}\left(\varepsilon_4 + \frac{1}{\varepsilon_4} + 1\right) + 2N_2^{\,2}\right] \; \|u\|^2 \\ & - \frac{1}{4\varepsilon_3}\left[2N_1^{\,2} + \left(\frac{2}{\varepsilon_4} + 1\right)M_3^{\,2}\right] \; \|v\|^2 + \int_\Omega G_t \; dx\end{aligned} \tag{26}$$

Bu eşitsizlik $(0,t)$ aralığında integre edilip eşitsizliğin sağındaki $\|u_x\|^2$ nin $(0,t)$ aralığındaki integrali yerine (21) eşitsizliği yazılıp,

$$\varepsilon_3 = \frac{\alpha_1 - \beta}{1+\alpha_1}, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_2 = \varepsilon \quad \text{ve} \quad M_4 = \frac{M_1^{\,2}(1+\alpha_1) \; (1+2\varepsilon_4)}{4(\alpha_1 - \beta) \; (1-\varepsilon_2)}$$

olarak alınır ve

$$A_0 = E(0) - \frac{M_4}{2}\left(\; \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)$$

notasyonu kullanılırsa,

$$E(t) \geq A_0 + \frac{1+\beta}{1+\alpha_1} \int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2 \right) d\tau + M_4 \int_0^t \|v_x\|^2 d\tau$$

$$- \left[M_4 \left(\frac{M_1^2 + 4 \ \varepsilon \ M_2 + 8\varepsilon^2}{4\varepsilon} \right) + \frac{1}{4} \frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 - \beta} \left(M_2^2 \left(\frac{\varepsilon^2 + \varepsilon + 1}{\varepsilon} \right) + 2N_2^2 \right) \right] \int_0^t \|u\|^2 d\tau$$

$$- \left[M_4 \left(\frac{M_3^2 + N_2^2}{4\varepsilon} + N_1 \right) + \frac{1}{4} \frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 - \beta} \left(2N_1^2 + \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1 \right) M_3^2 \right) \right] \int_0^t \|v\|^2 d\tau$$

$$- M_4 \int_0^t \left[(f_1, u) + (f_2, v) \right] d\tau + \int_0^t \int_\Omega G_t \ dx \ d\tau \tag{27}$$

olur. Bu eşitsizlikte,

$$M_5 = M_4 \left(\frac{M_1^2 + 4 \ \varepsilon \ M_2 + 8\varepsilon^2}{4\varepsilon} \right) + \frac{1}{4} \frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 - \beta} \left(M_2^2 \left(\frac{\varepsilon^2 + \varepsilon + 1}{\varepsilon} \right) + 2N_2^2 \right)$$

$$M_6 = M_4 \left(\frac{M_3^2 + N_2^2}{4\varepsilon} + N_1 \right) + \frac{1}{4} \frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 - \beta} \left(2N_1^2 + \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1 \right) M_3^2 \right)$$

notasyonları ve (11) şartı kullanılırsa,

$$E(t) \geq A_0 + \frac{1+\beta}{1+\alpha_1} \int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2 \right) d\tau + M_4 \int_0^t \|v_x\|^2 d\tau$$
$$- M_5 \int_0^t \|u\|^2 d\tau - M_6 \int_0^t \|v\|^2 d\tau \tag{28}$$

elde edilir. (28) eşitsizliği (20) de kullanılırsa,

$$\frac{d}{dt} \left(\|u\|^2 + \|v\|^2 \right) \geq 4(1+\beta) \int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2 \right) d\tau - 4(\alpha_1 + 1) \ M_5 \int_0^t \|u\|^2 d\tau$$
$$-4(\alpha_1 + 1) M_6 \int_0^t \|v\|^2 d\tau + (\alpha_1 + 1) A_0 + 4(\alpha_1 + 1) M_4 \int_0^t \|v_x\|^2 \ d\tau$$
$$+2\alpha_1 \|v_x\|^2 - 2l_1 \|u\|^2 - 2l_2 \|v\|^2 \tag{29}$$

elde edilir. (15) eşitliğinde (29) eşitsizliği gözönünde tutularak,

$$M_7 = \max \ \{M_5, M_6\} \quad \text{ve} \quad c_1 = \max \ \{l_1, l_2\}$$

olarak alınırsa,

$$\psi''(t) \ \psi(t) \geq \left[4(1+\beta) A_2 + 4(\alpha_1 + 1) \left(A_0 - M_7 \int_0^t \left(\|u\|^2 + \|v\|^2 \right) d\tau + M_4 \int_0^t \|v_x\|^2 d\tau \right) \right.$$

$$+2\alpha_1 \|v_x\|^2 - 2c_1\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 \right) + 2\gamma \Big]$$

$$\left[A_1 + (T_0 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 \right) + \gamma (t+k)^2 \right] \tag{30}$$

elde edilir. Şimdi (14) ve (30) eşitsizlikleri, (13) de yerleştirilirse ve sonra $2\varepsilon_5 = \alpha$, $(1+\alpha)^2 = 1+\beta$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
\psi''(t)\ \psi(t) - (1+\alpha)\left[\psi'(t)\right]^2 \geq\ & 4(1+\beta) A_2 A_1 + 4(1+\alpha)^2 A_2 (T_0 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 \right) \\
& + 4(1+\alpha)^2 A_2 \gamma (t+k)^2 + \Big[4(\alpha_1+1)\big(A_0 - M_7 \psi(t) \\
& + M_7 (T_0 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 \right) + M_7 \gamma (t+k)^2 \\
& - 2c_1\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 \right) + 2\gamma \Big]\ \psi(t) \\
& - 4(1+\beta) A_1 A_2 - 4(1+\alpha)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\gamma^2 (t+k)^2
\end{aligned} \tag{31}$$

olur. Gereken düzenlemeler yapılıp bazı pozitif terimler atılırsa ve

$$\gamma = \frac{\alpha(\alpha_1+1) A_0}{(1+\alpha)^2} \quad , \quad c_1 = \frac{\alpha(\alpha_1+1) A_0}{(1+\alpha)^2 \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 \right)}$$

olarak seçilirse ve diğer bütün terimler pozitif olduklarından atılırsa sağ taraf daha da küçüleceğinden, (31) eşitsizliği,

$$\psi''(t)\ \psi(t) - (1+\alpha)\ \left[\psi'(t)\right]^2 \geq -2c_1 \psi'(t)\ \psi(t) - 4(\alpha_1+1) M_7 \psi^2(t)$$

şeklini alır. Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemması ile karşılaştırılırsa,

$$c_2 = 4(\alpha_1 + 1) M_7$$

olduğu görülür ve,

$$\psi''(t)\psi(t) - (1+\alpha)[\psi'(t)]^2 \geq -2c_1 \psi'(t)\psi(t) - c_2 \psi^2(t)$$

elde edilir. Böylece, $\psi(t)$ fonksiyonu, $c_1, c_2 \geq 0$ sayıları ile Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasındaki (3) koşulunu gerçeklemiş olur. Lemmanın diğer koşulları olan, $\psi(0) > 0$ ve $\psi'(0) > \delta\, \psi(0)$ eşitsizliklerinin de $\psi(t)$ fonksiyonu için sağlandığı kolayca görülür.

t_1 patlama zamanı,

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{c_1^{\,2} + \alpha c_2}} \ln \frac{\gamma_1 \left[\ T_0\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\left(1+\alpha^2\right) + \alpha(\alpha_1+1) A_0 k^2\ \right] + 2\alpha^2(\alpha_1+1) A_0 k - \alpha(1+\alpha)^2 \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|\right)^2}{\gamma_2 \left[\ T_0\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\left(1+\alpha^2\right) + \alpha(\alpha_1+1) A_0 k^2\ \right] + 2\alpha^2(\alpha_1+1) A_0 k - \alpha(1+\alpha)^2 \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|\right)^2}$$

olarak bulunur.Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasından $t \to t_1$ için,

$$\lim_{t \to t_1} \left\{ \int_0^t \left(\|u(.,t)\|^2 + \|v(.,t)\|^2 \right) d\tau \right\} = \infty$$

olur.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada Volterra-Lotka rekabet modelinin genel bir halini temsil eden başlangıç-sınır değer problemi incelenmiş ve bazı koşullar altında global çözümün mevcut olmadığı gösterilmiştir. Bu çalışma ile, ekolojide canlılar arasındaki rekabet modelini veren Volterra-Lotka rekabet modeli genelleştirilerek, lineer olmayan parabolik denklem sistemlerinin global çözümlerinin yokluğu konusundaki incelemelere bir ışık tutulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Nabb A. Mc., “Comparison and Existence Theorems for Multicomponent Diffusion Systems”, J. Math. Anal. Appl., 3, 133-144, 1961.

[2] Maslennikova V. N. , “The First Boundary Value Problem for Quasilinear Diffusion Systems”, Dokl. Akad. Nauk. SSSR.,150, 991-994, 1963.

[3] Rauch J. Ve Smoller J., “Qualitative Theory of Fitz Hugh Nagumo Equations”, Adv. Math., 27, 12-44, 1978.

[4] Jackson D.E., “Existence and Regularity for FitzHugh-Nagumo Equations with in Homogeneous Boundary Conditions”, Nonlinear Anal. Theory. Methods & Appl., 14, 3, 201-216, 1990.

[5] Erdem D. and Kalantarov V.K., “Global Nonexistence of Solutions of Multicomponent Diffusion Systems”, Academy of Sciences of Azebaijan, Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics, 5, 21-29, 1996.

[6] Kalantarov V. K. and Ladyzhenskaya O. A., “The Occurence of Collapse for Quasilinear Equations of Parabolic and Hyperbolic type “, J.Soviet Math.10, 53-70, 1978, Translated from Zap. Nauch. Sem. LOMI, 69, 77-102, 1977.