

THE EFFECT OF SINGULAR FINITE ELEMENT ON THE STRESS INTENSITY FACTORS CALCULATED WITH THE FINITE ELEMENT METHODS IN A PRE-STRECHED STRIP WITH A CRACK

Arzu TURAN*

Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL

Geliş/Received: 08.07.2004 Kabul/Accepted: 09.03.2005

ABSTRACT

In this work, the effect of singular finite elements on the stress intensity factors (SIF) calculated with the Finite Element Methods (FEM) in a pre-stressed strip with a crack is investigated. It is known that in the determination of the SIF by the use of displacements, the singular finite elements should be employed. As a result of this the difficulties arise from the FEM modeling. However, determination of SIF by employing one of the Energy Methods such as Energy Release Rate, the requirement for the use of singular finite elements in the FEM modeling at the around of crack is not precise. So, in this work it is shown that, with a concrete problem as an example, the use of the singular finite elements under calculation of SIF through Energy Release Rate Method is unnecessary.

Keywords: Stress intensity factors, Finite element methods, Singular finite element, Composite, Crack, Initial stres.

MSC number/numarası: 80M10, 74R10, 74B10.

ÇATLAK İÇEREN ÖNGERİLMELİ ŞERİTTEKİ GERİLME BİRİKİMİ ŞİDDETI FAKTÖRÜ'NÜN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE HESAPLANMASINDA SİNGÜLER SONLU ELEMANLARIN ETKİSİ

ÖZET

Bu çalışmada, çatlak içeren öngerilmeli şeritte, Sonlu Elemanlar Yöntemi ile hesaplanan Gerilme Birikimi Şiddeti Faktörüne (SIF) singüler sonlu elemanların etkisi incelenmiştir. Bilindiği üzere, Gerilme Birikimi Şiddeti Faktörünün yerdeğiştirmeler vasıtasıyla belirlenmesinde, singüler sonlu elemanlar kullanılmalıdır. Bunun sonucu olarak, sonlu elemanlar modellemesinden doğan zorluklar artar. Fakat, Enerji Yöntemlerinden biri örneğin Energy Release Rate Yöntemi ile SIF'in belirlenmesinde, singüler sonlu elemanların Sonlu Elemanlar modellemesinde kullanımı zorunluluğu belirgin değildir. Böylece, bu çalışmada, SIF'ün Energy Release Rate metodu ile hesaplanmasında singüler sonlu elemanların kullanılmasının gerekli olmadığı, örnek problem çerçevesinde gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Gerilme birikimi şiddeti faktörü, Sonlu elemanlar yöntemi, Singüler sonlu eleman, Kompozite, Çatlak, Öngerilme.

1. GİRİŞ

Bilindiği üzere yapı elemanlarının kırılma mekanizması; yapıda mevcut olan kusurların dış yükler etkisinde çatlakları oluşturması ve bu çatlakların büyüyerek yapı elemanında kırılmaya sebep olması, şeklinde ifade edilmektedir. Griffith'e kadar, yapı elemanlarının kırılmasının incelenmesi Klasik Mukavemet Kriteri çerçevesinde yapılmakta idi. Yapı elemanı çatlak içerdiği durumda Griffith tarafından Klasik Mukavemet Kriterinin yetersiz olduğu gösterilmiş ve yeni mukavemet kriteri ortaya atılmıştır [1,2]. Daha sonraları Irwin (1948) ve Orawan (1948) tarafından çatlak ucu civarında gerilme yayılımı analitik olarak belirlenmiş ve bu gerilme yayılımında Gerilme Birikimi Şiddeti Faktörü (SIF) adı verilen ve kırılma parametresi olarak kabul edilen, K parametresi dahil edilmiştir.

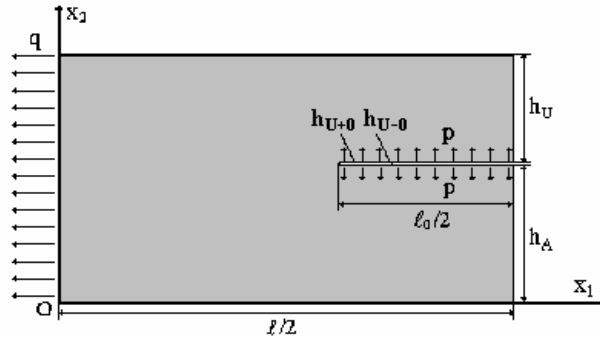
Bu alandaki pek çok çalışma Kırılma Mekanikliği'ni oluşturmaktadır. Kırılma mekanikliği kendi içerisinde Lineer Elastik Kırılma Mekanikliği (LEFM) ve Non-Lineer Kırılma Mekanikliği (NLFM) şeklinde ikiye ayrılır. Bu iki dal arasındaki fark, çatlak ucunda oluşan malzeme non-lineeritesinin göz önüne alınması ve alınmamasına dayanmaktadır. Dolayısıyla, çatlak ucunda oluşan malzeme non-lineeritesinin göz önüne alınmadığı problemler Lineer Elastik Kırılma Mekanikliğini oluşturur ve gevrek malzemeler (örneğin, cam, seramik veya yüksek mukavemetli metaller vb.) için geçerlidir. Non-Lineer Kırılma Mekanikliği ise, çimento tipli malzemeler veya düşük mukavemetli metaller gibi sünek malzemeler için geçerli olup, çatlak ucu bölgesindeki malzeme non-lineeritesini göz önüne alan Kırılma Mekanikliği dalını oluşturmaktadır [5].

Mevcut literatürde, yapı elemanlarının kırılmasına ait araştırmalar daha çok LEFM çerçevesinde yani, gevrek malzemeler için yapılmıştır. LEFM çerçevesinde kırılma, tek bir kırılma parametresi (Örneğin, K) ile temsil edilebilmektedir. Bu parametrenin değerinin belirlenmesi; a) Analitik-Empirik Formüller yardımıyla, b) Enerji Yöntemleri yardımıyla iki şekilde mümkündür. SIF değeri sonsuz ve izotrop ortamlar için literatürdeki kaynaklarda, çeşitli yükleme durumlarında formüllerin bulunduğu tablolar halinde verilmektedir [6,7]. Bunun dışında kalan durumlarda örneğin anizotrop ve sonlu ortamlar için, SIF'in belirlenmesinde Enerji Yöntemleri veya çatlak ucu civarındaki yerdeğiştirmelerden yararlanılmaktadır. Genellikle Enerji Yöntemleri, yapı elemanındaki çatlakın büyümesi sonucunda, yapı elemanının elastik enerjindeki değişim miktarının, çatlak uzamasına oranının K ile ifade edilmesine dayanmaktadır. Yapıda elastik enerjinin hesaplanması veya yerdeğiştirmelerin belirlenmesi ise, çoğunlukla sayısal yöntemlerin kullanımını zorunlu hale getirmektedir. Sayısal yöntemlerden en çok kullanılanı Sonlu Elemanlar Yöntemi olup, bu yöntem çatlak ucu bölgesinde özel modellemeyi yani, tekil (singüler) sonlu elemanların kullanımını gerektirmektedir [8,9,10]. Sonlu eleman modellemesinde singüler sonlu elemanların kullanılması, yönteme ait algoritma ve programların oluşturulmasını oldukça zorlaştırmaktadır.

Günümüzde mühendislik açısından önerilmenin, yapı elemanının mukavemetine etkileri üzerinde yoğun şekilde çalışılmaktadır. Bu alandaki ilk çalışmalar Guz ve öğrencilerine aittir. Klasik Elastisite teorisi çerçevesinde yapı elemanındaki önerilmeler göz önüne alınmaktadır. Öngerilmelerin göz önüne alınabilmesi ancak, Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisi (ÜBLET) çerçevesinde mümkündür [11,12]. Öngerilmenin ÜBLET çerçevesinde Gerilme Birikimi Şiddeti Faktörüne etkisi Guz ve öğrencileri tarafından; homojen önerilme ve anizotrop sonsuz ortamlar için yapılmış, daha sonraları sonlu ortam ve homojen/inhomojen önerilme durumlarında Akbarov ve öğrencileri tarafından geliştirilmiştir [13,14].

Akbarov ve diğerleri (2003) ile Akbarov ve diğerleri (2004) çalışmalarında, çatlak içeren yapı elemanlarının sonlu eleman modellemesinde kullanılan singüler sonlu elemanların kullanımının, stabilite kaybı probleminde etki göstermediği sonucu elde edilmiştir. Benzer şekilde, bu çalışmada, ÜBLET çerçevesinde çatlak içeren önerilmeli yapı elemanında önerilmenin SIF'e etkisinin Enerji Yöntemlerinden Energy Release Rate yardımıyla belirlenmesinde, sonlu eleman formülasyonunda çatlak ucu civarında kullanılan singüler ve singüler olmayan sonlu elemanların kullanımının etki göstermediğine ait elde edilen sayısal sonuçlar verilmektedir.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU



Ele alınan problemin çözüm bölgesinin Şekil 1 'de $\{0 \leq x_2 \leq H; 0 \leq x_1 \leq l/2\}$ $(H = h_A + h_U)$ kısmı gösterilmiştir. Bu bölgede sağlanan Lineerize edilmiş alan denklemleri, bünye denklemleri, geometrik ilgiler ile sınır koşulları aşağıda verilmiştir.

Şekil 1. Ele alınan şerit-levhannın geometrisi

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{ji} + \sigma_{in}^{(0)} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] = 0, \quad \sigma_{11} = A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{22} = A_{12}\varepsilon_{12} + A_{22}\varepsilon_{22},$$

$$\sigma_{12} = A_{66}\varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i,j=1,2 \quad (1)$$

sınır koşulları:

$$u_2 \Big|_{x_1=0;\ell} = 0, \quad \sigma_{11} \Big|_{x_1=0;\ell} = 0, \quad \sigma_{i2} \Big|_{x_2=H-h_{U-0}} = p\delta_i^2,$$

$$\sigma_{i2} \Big|_{x_2=H-h_{U+0}} = -p\delta_i^2, \quad \sigma_{i2} \Big|_{x_2=0} = 0 \quad (2)$$

Yukarıdaki denklemlerde bilinen notasyonlar kullanılmıştır. (1) 'de üst indis (0) öngörilmeleri göstermekte, ayrıca $\delta_i^j = \delta_{ij}$ Kronecker sembolü, x_i 'ler Lagrange koordinatlarıdır. (1) deki öngörilmeler aşağıdaki sınırdeğer probleminin çözülmesi ile elde edilir.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = 0, \quad \sigma_{11}^{(0)} = A_{11}\varepsilon_{11}^{(0)} + A_{12}\varepsilon_{12}^{(0)}; \quad \sigma_{22}^{(0)} = A_{12}\varepsilon_{12}^{(0)} + A_{22}\varepsilon_{22}^{(0)}; \quad \sigma_{12}^{(0)} = A_{66}\varepsilon_{12}^{(0)}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{11}^{(0)} \Big|_{x_1=0} = \sigma_{11}^{(0)} \Big|_{x_1=\ell} = q, \quad \sigma_{i1}^{(0)} \Big|_{x_2=0;h} = 0, \quad i,j=1,2 \quad (3)$$

$$u_2^{(0)} \Big|_{x_1=0;\ell} = 0. \quad (4)$$

Ele alınan problem çözümü iki aşamada bulunmaktadır: Birinci aşamada öngörilmenin yapı elemanındaki dağılımı belirlenir; ikinci aşamada, birinci aşamada elde edilen öngörilme değerlerinin de işlemlere dahil edildiği formülasyonda, çatlağın üst ve alt yüzeylerine normal doğrultuda etki eden ve çatlağı açılmaya zorlayan, düzgün yayımlı p kuvveti nedeniyle çatlak

The Effect of Singular Finite Element on the...

ucunda meydana gelen SIF 'e öngörülmenin etkisi incelenir. Her iki aşamada da çözüm sayısal olarak Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla yapılır.

3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE MODELLEME

Ele alınan problemin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile modellenmesinde aşağıdaki fonksiyonel kullanılır.

$$U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega-\Omega'} \left(T_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + T_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + T_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + T_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 - \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} p u_2 \Big|_{x_2=h_{U-0}} dx_1^{AA} - \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} p u_2 \Big|_{x_2=h_{U+0}} dx_1 \quad (5)$$

burada,

$$T_{11} = \sigma_{11} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad T_{12} = \sigma_{12} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

$$T_{21} = \sigma_{12} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad T_{22} = \sigma_{22} + \sigma_{12}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(0)} \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

$$\Omega' = \left\{ x_2 = h_{U\pm 0}, (\ell - \ell_0)/2 < x_1 < (\ell + \ell_0)/2 \right\} \quad (6)$$

dir. (5)'de ℓ_0 yarı çatlak uzunluğu ve ℓ şerit-levhanın Ox_1 doğrultusundaki uzumluğudur(Şekil 1). Belirtelim ki, (5) fonksiyonelinin birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden,

$$(1) \text{ deki alan denklemini } \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{ji} + \sigma_{in}^{(0)} \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right] = 0 \right) \text{ ve gerilmelere göre sınır koşulları elde edilmektedir. Yani, (5) ve (6) dan,}$$

$$\delta U = \iint_{\Omega-\Omega'} \left\{ T_{11} \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + T_{22} \delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + T_{21} \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + T_{12} \delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right\} dx_1 dx_2 - \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} p \delta u_2 \Big|_{x_2=h_{U-0}} dx_1 - \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} p \delta u_2 \Big|_{x_2=h_{U+0}} dx_1 \quad (7)$$

olur. (7) 'deki $T_{ij} \delta \left(\frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right)$ ifadeleri yerine,

$$T_{11} \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (T_{11} \delta u_1) - \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} \delta u_1, \quad T_{22} \delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} (T_{22} \delta u_2) - \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} \delta u_2,$$

$$T_{21} \delta \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} (T_{21} \delta u_1) - \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} \delta u_1, \quad T_{12} \delta \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (T_{12} \delta u_2) - \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} \delta u_2 \quad (8)$$

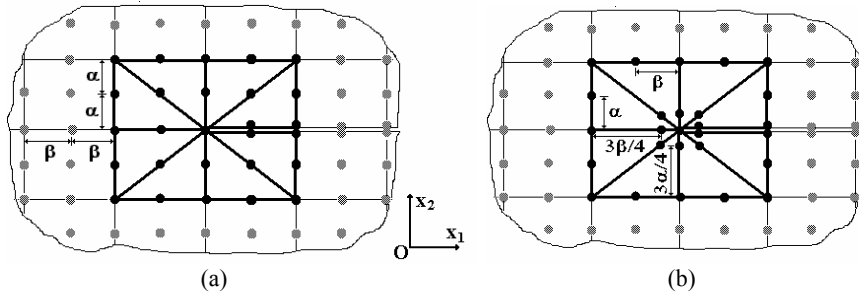
ifadeleri (7) 'de göz önüne alınırsa,

$$\delta U = \iint_{\Omega-\Omega'} \left\{ - \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} \right) \delta u_1 - \left(\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} \right) \delta u_2 \right\} dx_1 dx_2 +$$

$$\frac{\iint_{\Omega-\Omega'} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (T_{11} \delta u_1 + T_{12} \delta u_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (T_{22} \delta u_2 + T_{21} \delta u_1) \right\} dx_1 dx_2}{- \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} p \delta u_2 \Big|_{x_2=H-h_U-0} dx_1 - \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} p \delta u_2 \Big|_{x_2=H-h_U+0} dx_1} \quad (9)$$

bulunur. (9) da altı çizili terime Gauss teoremi uygulanırsa ve $\delta U = 0$ için ele alınan probleme ait alan denklemleri ve gerilmelere göre sınır koşulları elde edilir. Böylece, Sonlu Eleman formülasyonunda kullanılacak olan (5) fonksiyoneli, ele alınan sınırdeğer problemine eşdeğer bir fonksiyoneldir. Tekrar belirtelim ki, (6)'da üst indis (0) öngerilmeleri göstermektedir. Ele alınan problemde, basit mesnet sınır koşulu ve öngerilmelerin çatlak doğrultusuna paralel alınması nedeniyle, çatlakın varlığının öngerilmelerin yapı içerisinde dağılımına etkisi ihmal edilerek $\sigma_{ij}^{(0)} \equiv 0$, $ij \neq 11$ ve $\sigma_{11}^{(0)} = q$ olarak alınmıştır.

Sonraki aşamada, ele alınan çözüm bölgesi sonlu sayıda sonlu elemanlara ayrıştırılır ve her sonlu elemanda aranan fonksiyonun ifadesi polinom olarak kabul edilir. Bundan sonra bilinen Ritz tekniği yardımıyla her sonlu elemanda polinom olarak kabul edilen çözümün katsayıları belirlenir. Bu çalışmada yerdeğiştirme esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanıldığından elde edilen çözüm, her sonlu elemanda yerdeğiştirme fonksiyonudur. Gerilmeler ise (1)'de verilen bünye denklemleri (Hooke yasası) yardımıyla bulunur. Bu işlemlerin yapılması sırasında ele alınan problemin $x_1 = \ell/2$ ye göre simetrik olması göz önünde bulundurularak çözüm, $\{0 \leq x_2 \leq H; 0 \leq x_1 \leq \ell/2\}$ bölgesi için yapılmış, bu bölgenin ayrıştırılmasında çatlak ucu civarında 6 düğüm noktalı (nodlu) singüler (I. Durum) veya singüler olmayan (II. Durum) üçgen sonlu elemanlar (Şekil 2), geri kalan bölgede standart 9 düğüm noktalı (nodlu) dikdörtgen sonlu elemanlar kullanılmıştır. Dolayısıyla, ele alınan bölgenin sonlu eleman modellemesinde 596 standart dikdörtgen, 8 singüler veya singüler olmayan üçgen sonlu eleman (Şekil 2); 2525 düğüm noktası (NOD) ve 4975 serbestlik derecesi (NDOF) kullanılmıştır. Elde edilen çözümün gerilme sınır koşullarını sağlaması gerekliliği göz önünde tutularak, çözümün hassaslığı üzerinde dikkat edilmiştir.



Şekil 2. Çatlak ucunda a) standart, b) singüler sonlu eleman ağı

The Effect of Singular Finite Element on the...

Sonlu Elemanlar çözümlerinden elde edilen veriler, (5) fonksiyoneli ve “Energy Release Rate” yöntemi ($\partial U/\partial \ell_0$) yardımıyla çatlak ucunda 1. Mod SIF değerleri elde edilmiştir. Örneğin, öngerilmeli izotrop ortamdaki çatlak ucunda K değeri,

$$K_1^{(E)} = \sqrt{\frac{4\gamma\mu}{1-\nu - \frac{\sigma_{11}^0}{\mu} \frac{3\lambda^3 + 8\lambda^2\mu + 17\lambda\mu^2 + 14\mu^3}{4(\lambda + \mu)^2(\lambda + 2\mu)}}} \quad (10)$$

den belirlenir [11]. (10)’da λ ve μ malzemenin sırasıyla Lamé sabiti ve kayma modülü, $\sigma_{11}^{(0)}$ sonsuzda çatlak doğrultusuna paralel olarak verilen öngerilme ve

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{dU}{da} \quad (11)$$

dir. (11)’de U-cisimde biriken elastik enerji, a-yarı çatlak uzunluğudur. Çatlak içeren öngerilmeli anizotrop ortamlarda K- γ ilişkisi daha karmaşık olduğu için burada verilmemiştir.

4. SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Ele alınan şerit-levhanın malzemesinin, $x_2 = 0$ düzlemine paralel olacak şekilde yerleştirilen ve birbirini tekrarlayan farklı iki izotrop levhadan oluşan çok katlı kompozit malzeme olduğunu kabul edelim. Belirtelim ki, kompozit malzemenin bileşenlerinden güçlendirici levhaya ait büyüklükler alt indis “2”, matris malzemesine ait büyüklükler alt indis “1” ile gösterilecektir. Buna göre, bu malzemelere ait Elastik sabitler E_1, E_2 Young Modülü; ν_1, ν_2 Poisson sabiti; $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ sırasıyla lamé sabitleri ve kayma modülleri olsun. Dolayısıyla, ele alınan kompozit malzemeye ait normalize edilmiş mekanik sabitler, Cristensen (1979) ve diğer birçok kaynakta verildiği gibi aşağıdaki formüller yardımıyla bulunur.

$$\begin{aligned} A_{66} &= \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1\eta_2 + \mu_2\eta_1}, \\ A_{12} &= \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 - \eta_1\eta_2(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1}, \\ A_{11} &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_2 - \eta_1\eta_2 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1}, \\ A_{22} &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_2 - \eta_1\eta_2 \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

burada,

$$\eta_1 = 1 - \eta_2, \quad \lambda_k = \frac{E_k\nu_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}, \quad \mu_k = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)} \quad (13)$$

(12) ve (13)'de η_2 kompozit malzeme içerisinde güçlendirici (takviye) malzemesinin hacim oranını göstermektedir. Sayısal uygulamada $v_1 = v_2 = 0.3$, $\eta_2 = 0.5$, $h/\ell = 0.2$, $h_A = h_U = h/2$ alınmış ve diğer parametre değerleri tablolar üzerinde gösterilmiştir.

Tablo 1. Elde edilen SIF değerlerinin karşılaştırılması

$\ell_0/2\ell$	ℓ_0/h	$K_I^{(s)}/K_{I\infty}$	$K_I^{(f)}/K_{I\infty}$	$K_I^{(E)}/K_{I\infty}$
0.0400	0.400	1.240641	1.240642	1.193006
0.0375	0.375	1.200928	1.200926	1.171616
0.0300	0.300	1.144436	1.144420	1.110878
0.0250	0.250	1.093691	1.093106	1.072904
0.0200	0.200	1.047391	1.047357	1.040974
0.0400	0.400	1.240641	1.240642	1.193006

Tablo 1'de çatlak ucu bölgesinde singüler sonlu eleman ağı kullanılarak, öngerilme olmadığı ($q = 0$) durumda çatlağın boyutları plağın boyutlarına göre çok küçük alındığında SIF değerleri yaklaşık Analitik formül yardımıyla ($K_I^{(s)}/K_{I\infty}$, [6]), çatlak ucu bölgesindeki yerdeğıştirmelerin yardımıyla ($K_I^{(f)}/K_{I\infty}$, [18]) ve "Energy Release Rate" yöntemi ($K_I^{(E)}/K_{I\infty}$, [19]) yardımıyla olmak üzere üç farklı yolla bulunan SIF değerleri, plağın homojen izotrop malzeme özelliklerine sahip olması durumunda verilmektedir. Ayrıca Tablo 1'de görülen $K_{I\infty} = p\sqrt{\pi\ell_0}$ olup, çatlağın kenarlarına dik doğrultuda etkiyen ve sonsuzda verilen eksenel çekme kuvveti ($\sigma = p$) etkisinde, $q = 0$ için plaktaki çatlak ucunda oluşan SIF değeridir. Tablo 1'den görüldüğü gibi çatlağın boyutları küçüldükçe verilen oranlar 1'e yaklaşmaktadır, yani Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla bulunan sayısal sonuçlar, kesin çözüme yaklaşmaktadır. Bu sonuç, yapılan algoritma ve bilgisayar programlarının doğruluğunu göstermektedir.

Ayrıca, bir kısmı Tablo 1'de verilen, çok sayıda sayısal verilerin incelenmesi SIF 'in belirlenmesinde "Energy Release Rate" yönteminin daha güvenilir olduğunu göstermiştir. Bu nedenle, belirtelim ki, bundan sonraki sayısal değerler ancak bu yöntem çerçevesinde bulunacaktır.

Tablo 2'de sonlu eleman modellemesinde çatlak ucu civarında singüler ve singüler olmayan üçgen elemanların kullanılmasının SIF (K) değerine etkisi farklı çatlak uzunlukları ve öngerilme durumlarında verilmektedir. Çatlak ucu civarında singüler sonlu elemanların kullanılarak veya singüler olmayan (standart) sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen SIF (K) değerleri, yapı elemanında anizotropi ve çeşitli öngerilme değerlerinde herhangi bir etki yaratmamıştır. Yani ele alınan benzer durumlarda enerji yöntemleri kullanılarak, Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla K'nin belirlenmesinde, çatlak ucu civarında singüler sonlu elemanların kullanılması gerekli değildir.

The Effect of Singular Finite Element on the...

Tablo 2. Bazı $\ell_0/2\ell$, E_2/E_1 ve $q/(E_1\eta_1 + E_2\eta_2)$ değerlerinde singüler (I.Durum)/singüler olmayan (II.durum) sonlu elemanlar modellemesi ile elde edilen SIF değerleri.

$\ell_0/2\ell$	E_2/E_1	$q/(E_1\eta_1 + E_2\eta_2)$					
		I.Durum	II.Durum	I.Durum	II.Durum	I.Durum	II.Durum
		0.000		$\frac{+0.001}{-0.001}$		$\frac{+0.01}{-0.01}$	
0.04	1	1.1929	1.1929	$\frac{1.1920}{1.1939}$	$\frac{1.1920}{1.1939}$	$\frac{1.1839}{1.2026}$	$\frac{1.1839}{1.2026}$
	5	1.1723	1.1723	$\frac{1.1710}{1.1736}$	$\frac{1.1710}{1.1736}$	$\frac{1.1599}{1.1861}$	$\frac{1.1599}{1.1861}$
	10	1.1573	1.1573	$\frac{1.1555}{1.1591}$	$\frac{1.1555}{1.1591}$	$\frac{1.1404}{1.1772}$	$\frac{1.1404}{1.1772}$
	20	1.1435	1.1435	$\frac{1.1407}{1.1463}$	$\frac{1.1407}{1.1463}$	$\frac{1.1187}{1.1756}$	$\frac{1.1187}{1.1756}$
0.10	1	1.8512	1.8512	$\frac{1.8471}{1.8553}$	$\frac{1.8471}{1.8553}$	$\frac{1.8124}{1.8946}$	$\frac{1.8124}{1.8946}$
	5	1.7306	1.7306	$\frac{1.7257}{1.7355}$	$\frac{1.7257}{1.7355}$	$\frac{1.6851}{1.7838}$	$\frac{1.6851}{1.7838}$
	10	1.6476	1.6476	$\frac{1.6416}{1.6536}$	$\frac{1.6416}{1.6536}$	$\frac{1.5934}{1.7152}$	$\frac{1.5934}{1.7152}$
	20	1.5754	1.5754	$\frac{1.5675}{1.5836}$	$\frac{1.5675}{1.5836}$	$\frac{1.5064}{1.6729}$	$\frac{1.5064}{1.6729}$
0.15	1	2.5099	2.5099	$\frac{2.5005}{2.5193}$	$\frac{2.5005}{2.5193}$	$\frac{2.4225}{2.6119}$	$\frac{2.4225}{2.6119}$
	5	2.2601	2.2601	$\frac{2.2499}{2.2705}$	$\frac{2.2499}{2.2705}$	$\frac{2.1666}{2.3751}$	$\frac{2.1666}{2.3751}$
	10	2.0879	2.0879	$\frac{2.0763}{2.0998}$	$\frac{2.0763}{2.0998}$	$\frac{1.9850}{2.2240}$	$\frac{1.9850}{2.2240}$
	20	1.9384	1.9384	$\frac{1.9531}{1.9242}$	$\frac{1.9531}{1.9242}$	$\frac{1.8184}{2.1207}$	$\frac{1.8184}{2.1207}$
0.20	1	3.2717	3.2717	$\frac{3.2534}{3.2905}$	$\frac{3.2534}{3.2905}$	$\frac{3.1039}{3.4785}$	$\frac{3.1039}{3.4785}$
	5	2.8679	2.8679	$\frac{2.8490}{2.8873}$	$\frac{2.8490}{2.8873}$	$\frac{2.6985}{3.0809}$	$\frac{2.6985}{3.0809}$
	10	2.5890	2.5890	$\frac{2.5687}{2.6101}$	$\frac{2.5687}{2.6101}$	$\frac{2.4121}{2.8392}$	$\frac{2.4121}{2.8392}$
	20	2.3472	2.3472	$\frac{2.3236}{2.3719}$	$\frac{2.3236}{2.3719}$	$\frac{2.1525}{2.6681}$	$\frac{2.1525}{2.6681}$

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bilgilerinden ve önerilerinden faydalandığım Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV ve Sayın Doç. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU'na teşekkür ederim.

KAYNAKLAR

- [1] Griffith, A.A., "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids ", Philosophical Transactions Roy. Soc., 163-198, 1921.
- [2] Griffith, A.A., "The Theory of Rupture ", In: Proc First Int. Cong. App. Mech., 55-63, 1924.
- [3] Irwin, G.R., "Fracture Dynamics", In: Fracture of Metals", Amer. Soc. for Metals, 147-166, 1948.
- [4] Orawan, E., "Fracture and Strength of Solids", Reports on Progress in Physics XII, 185-232, 1948.
- [5] Cotterell, B. and Mai, Y.W., "Fracture Mechanics of Cementitious Materials", Blackie Academic & Professional, London, 1996.
- [6] Sih, G., "Handbook of Stress Intensity Factors", Lehigh University, Pennsylvania, 1973.
- [7] Vardar, Ö., "Fracture Mechanics", Boğaziçi University Publication, İstanbul, 1988.
- [8] Benzley S.E., "Representation of Singularities with Isoparametric Finite Elements", International Journal Numerical Methods in Engineering, 8, 537-545, 1974.
- [9] Henshell R.D. and Shaw K.G., "Crack Tip Finite Elements are Unnecessary", International Journal Numerical Methods in Engineering,, 9, 495-507, 1975.
- [10] Zienkiewich O.C. and Taylor R.L., "Basic Formulations and Linear problems the Finite Elements Method", Vol1, 4th Edition, McGraw-Hill, London, 648, 1989
- [11] Guz, A.N., "Brittle Fracture of the Materials With Initial Stresses" Kiev, Naukova Dumka-1991.
- [12] Guz, A.N., "Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg-1999.
- [13] Akbarov, S.D., Yahnioğlu, N. and Turan, A., "Çatlak İçeren Öngerilmeli Şeritte Gerilme Birikimi Şiddeti Faktörüne Öngerilmenin Etkisi", XII Ulusal Mekanik Kongresi , Gaziantep, 8-12 Eylül 2003, 797-806.
- [14] Akbarov S.D., Yahnioğlu, N and Turan, A., "On the determination of the SIF at the macro-crack tips in the pre-stretched anisotrop strip", 6th International Fracture Conference, Konya, 10-12 September 2003, 11-18.
- [15] Akbarov S.D., Rzayev O.G., and Yahnioğlu N., "On the unnecessary of the singular finite elements in the delamination problems", 6th International Fracture Conference, Konya, 10-12 September 2003, 19-28.
- [16] Akbarov S.D., Yahnioğlu N., and Rzayev O.G., "On the unnecessary of the singular type finite elements for investigations of the bucling around a crack", International Applied Mechanics, 2004 (has been accepted for publication).
- [17] Cristensen, R.M., "Mechanics of Composite Materials", Wiley, New York, 348, 1979.
- [18] Gosz, M., Dolbow, J. and Moran B., "Domain Integral Formulation for Stress Intensity Factor Computation Along Curved Three-Dimensional Interface Cracks", International J. Solids and Structures 1763-1783, 1998.
- [19] Tan, C.L.and Y.L. Gao., "Treatment of Bimaterial Interface Crack Problems Using the Boundary Element Method", Eng. Fracture Mechanics" 36, 6, 919-932, 1990.