

**AN AFFECT OF GEOMETRIC NONLINEARITY ON THE BENDING OF A STRIP CONTAININ A FILLER****Nazmiye YAHNİOĞLU\***, **Hakan AĞIT***Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalurji Fakültesi, Matematik Müh. Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL***Geliş/Received: 10.12.2004 Kabul/Accepted: 08.07.2005****ABSTRACT**

In this work, under bending by a uniform loading acting on the upper face of a strip, stress concentration of around the rectangular filler is investigated in the framework of the exact geometric non-linear equations of elasticity theory and plane strain-state. Investigations are carried out by helping of Displacement Based Finite Element Methods and Newton-Raphson Method for linearization of system of non-linear equations.

**Keywords:** Stress concentration, Geometric nonlinear, Filler, Finite Element Method, Newton-Raphson Method.

**MSC number/numarası:** 74B20, 74S05.

**DOLGU İÇEREN ŞERİT-LEVHANIN EĞİLMESİNE GEOMETRİK NON-LİNEERİTENİN ETKİSİ****ÖZET**

Bu çalışmada, yapısında dikdörtgen formda dolgu bulunan şerit-levhanın üst yüzeyine etkiyen düzgün yayılı yük etkisinde eğilmesiyle, dolgu civarında oluşan gerilme birikimleri, düzlem şekil değiştirme durumunda elastisite teorisinin geometrik non-lineer kesin denklemleri çerçevesinde incelenmiştir. İncelemeler yerdeğiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi ve non-lineer denklemlerin lineerleştirilmesinde Newton-Raphson yöntemi yardımıyla yapılmıştır.

**Anahtar Sözcükler:** Gerilme birikimi, Geometrik nonlineer, Dolgu, Sonlu elemanlar yöntemi, Newton-Raphson Yöntemi.

**1. GİRİŞ**

Dış yükler etkisinde çeşitli nedenlerle yapı elemanlarında oluşan gerilme birikimleri, yapı elemanının mukavemeti açısından istenmeyen bir durumdur. Yapıda oluşan bu gerilme birikimlerinin en önemli nedeni, yapı elemanının geometrisi dışında, malzeme süreksizlikleri yani, malzemenin içerdiği boşluk, çatlak gibi kusurlar veya heterojenliktir. Bu unsurlar çeşitli nedenlerle kaçınılmaz olarak yapı elemanında veya malzemede ortaya çıkabilmektedir. Bu nedenle dış yükler altında bu unsurlar civarında yapıda gerilme birikimlerinin oluşması da kaçınılmazdır.

Yapı elemanlarındaki malzeme süreksizlikleri elastisite teorisinin temel problemlerinden olup, pek çok araştırmacı tarafından incelenmiş [1-9] ve incelenmektedir. Bu

\* Sorumlu Yazar/Corresponding Autor: e-posta: nazmiye@yildiz.edu.tr, tel: (0212) 449 16 79

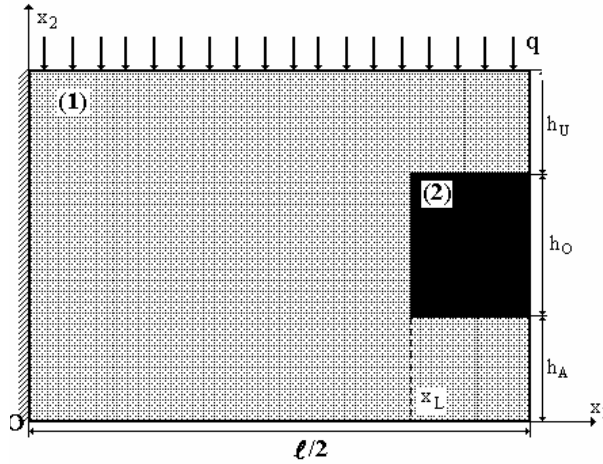
çalışmada yapı elemanındaki malzeme süreksizliklerinden sadece dolgu (filler) veya katkı içermesi durumu ele alınacaktır.

Literatürde heterojen mazlemelerin içerdiği tanecikler-takviyeler civarındaki gerilme birikimlerine ait çok sayıda çalışma mevcuttur. Bunların özeti [1,3,5] kaynaklarında verilmektedir. Bu çalışmalarda, malzemenin içerdiği tanecikler (güçlendiriciler), matematiksel olarak daire (veya küre), elips (veya elipsoid) vb. formda modellenerek sonlu veya sonsuz ortamda, ele alınan yükleme altında, bunlar civarında oluşan gerilme birikimleri analitik veya sayısal olarak lineer elastisite teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Bunlardan başka, yapıda oluşan çatlak vb hasarların onarımında çatlak bölgesinin dikdörtgen delik formunda açılarak burasının uygun dolgu malzemesi ile doldurulması (Doldurucu-Yama (filler-doubler) Metodu) olarak da dikdörtgen formda dolgular ile karşılaşılabilmektedir [9]. Yapı malzemelerinin onarımı sonucunda, bu yama-dolgu malzemesi etrafında oluşabilecek gerilme yığılmalarının, dolgunun geometrik ve malzeme parametreleri açısından incelenmesi önem taşımaktadır. Bu incelemeler sonucunda, dolgunun geometrik ve malzeme parametrelerinin, dış yükler altında, dolgu civarında yapıda oluşan gerilme birikimlerini önemli ölçüde etkilediği [3,5-8] ve diğer pek çok çalışmada gösterilmiştir.

Bu çalışmada şimdiye kadar yapılan çalışmalardan farklı olarak, dış yükler etkisinde dolgu civarında oluşan gerilme birikimleri, düzlem şekil değiştirme durumunda elastisite teorisinin kesin geometrik non-lineer denklemleri çerçevesinde incelenmiştir. Geometrik non-lineerite ve dolgunun malzeme parametrelerinin değişiminin ele alınan yükleme durumu için dolgu civarında oluşan gerilme yığılmasına etkileri Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Newton-Raphson Yöntemi yardımıyla araştırılmıştır.

## 2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL MODELİ

Levhaya bağlı  $Ox_1x_2$  koordinat takımını ve plağın geometrik boyutlarını Şekil 1'de gösterildiği gibi kabul edelim. Şekil 1 'de,  $x_1 = \ell/2$  'ye göre problem simetrisi göz önüne alınarak, plağın  $\{0 \leq x_2 \leq H; 0 \leq x_1 \leq \ell/2\}$  ( $H = h_A + h_O + h_U$ ) bölgesini kapsayan kısmı gösterilmiştir.



Şekil 1. Ele alınan şerit-levhannın geometrisi

Bu bölgede sağlanan non-lineer alan denklemleri [2],

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \sigma_{jm}^{(n)} \left( \delta_i^m + \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_m} \right) \right] = 0, \quad i,j;n;m=1,2 \quad (2)$$

düzlem şekil değiştirme durumunda bünye denklemleri [11],

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(n)} \\ \sigma_{22}^{(n)} \\ \sigma_{12}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E^{(n)}} & -\frac{\nu^{(n)}}{E^{(n)}} & 0 \\ -\frac{\nu^{(n)}}{E^{(n)}} & \frac{1}{E^{(n)}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(n)} \\ \varepsilon_{22}^{(n)} \\ \varepsilon_{12}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (G^{(n)} = \frac{1+\nu^{(n)}}{E^{(n)}}) \quad n=1,2 \quad (3)$$

yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları [11],

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha^{(n)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha^{(n)}}{\partial x_j} \right], \quad i,j;n;\alpha=1,2 \quad (4)$$

dir. (2)-(4)'de üst indis (n) Şekil 1'de gösterilen dolgu (n=2 durumu) ve onu saran malzemeye (n=1 durumu) ait büyüklükleri; (3)'de  $E^{(n)}$  ve  $\nu^{(n)}$ , ele alınan malzemenin elastisite modülü ve Poisson oranını; (2)'de  $\delta_{ij} = \delta_i^j$ , Kronecker sembolünü göstermektedir.

Sınır koşulları,

$$\begin{aligned} & \left[ \sigma_{jm}^{(1)} \left( \delta_i^m + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_m} \right) \right]_{x_1=0;\ell} n_j = 0, \quad \left[ \sigma_{jm}^{(1)} \left( \delta_i^m + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_m} \right) \right]_{x_2=h} n_j = -q \delta_i^2, \\ & \left[ \sigma_{jm}^{(1)} \left( \delta_i^m + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_m} \right) \right]_{x_2=0} n_j = 0, \quad u_2^{(1)} \Big|_{x_1=0;\ell} = 0 \\ & \left[ \sigma_{jm}^{(1)} \left( \delta_i^m + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_m} \right) \right]_{x_2=h_A;h_A+h_Q} n_j = \left[ \sigma_{jm}^{(2)} \left( \delta_i^m + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_m} \right) \right]_{x_2=h_A;h_A+h_Q} n_j, \\ & \left[ \sigma_{jm}^{(1)} \left( \delta_i^m + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_m} \right) \right]_{x_1=\ell_E;\ell-\ell_E} n_j = \left[ \sigma_{jm}^{(1)} \left( \delta_i^m + \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_m} \right) \right]_{x_1=\ell_E;\ell-\ell_E} n_j, \\ & u_i^{(1)} \Big|_{x_1=\ell_E;\ell-\ell_E} = u_i^{(2)} \Big|_{x_1=\ell_E;\ell-\ell_E}, \quad u_i^{(1)} \Big|_{x_2=h_A;h_A+h_Q} = u_i^{(2)} \Big|_{x_2=h_A;h_A+h_Q}, \quad i,j;m=1,2 \end{aligned} \quad (5)$$

şeklinde verilebilir [2]. (2)-(5) ifadelerinde  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  ve  $u_i$ 'ler, Şekil 1'de verilen yapı elemanı için ele alınan yükleme altında yapıda oluşan, sırasıyla gerilme tansörü, şekil değiştirme tansörü ve yer değiştirme vektörü bileşenleridir. (5)'de verilen  $n_j$  ele alınan yüzeyin dış normal vektörünün bileşenini göstermektedir. (5)'de  $\ell_E = x_L/\ell$ 'dir. Lagrange koordinatları ile yazılmış (2)-(5) denklemleri; karşılıklı iki kenarından basit mesnetle tutturulmuş, merkezinde dikdörtgen dolgu içeren şerit-plağın, üst yüzeyinden etkileyen düzgün yayılı yük ve dolgu sınırlarında ideal

temas koşullarının sağlandığı kabul edilen sınır koşulları altında, geometrik non-lineer durumda incelenmesine ait matematiksel formülasyonu göstermektedir.

Yukarıda verilen sınır değer probleminin çözümü analitik olarak mümkün olmadığından, ele alınan problemin çözümü için sayısal çözüm yöntemlerinden biri olan Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılacaktır.

### 3. SONLU ELEMANLAR MODELİ

Ele alınan geometrik non-lineer sınır değer probleminin sonlu elemanlar modeli için aşağıda verilen ve cisimde biriken toplam potansiyel enerjiyi gösteren fonksiyonel kullanılır.

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_I} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dx_1 dx_2 + \frac{1}{2} \iint_{\Omega_{II}} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dx_1 dx_2 - \int_S P_i^{(1)} u_i^{(1)} dS. \quad (6)$$

Burada  $\Omega_{II} = \{x_L \leq x_1 \leq \ell - x_L; h_A \leq x_2 \leq h_A + h_O\}$  dolgunun bulunduğu bölgeyi,  $\Omega_I = \Omega - \Omega_{II}$  ( $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell; 0 \leq x_2 \leq H\}$ ) dolgunun dışındaki bölgeyi,  $S$ ,  $\Omega$  bölgesinin dış sınırını ve ayrıca (6) da üst indis 2 ile ilgili büyüklükler dolguya, üst indis 1 ile ilgili büyüklükler dolguyu çevreleyen bölgeye ait büyüklükleri göstermektedir. (6) fonksiyonelinin birinci varyasyonelinin sifıra eşitliğinden (2) diferansiyel denklemi ve (5)' de verilen gerilmelere göre sınır koşulları elde edilir. Yani (2) diferansiyel denklemleri (6) fonksiyonelinin Euler denklemleridir [5,10].

Ele alınan problemin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile çözümü için, problemin çözüm bölgesi (Şekil 1) sonlu adet  $\Omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ) sonlu elemanlarına ayrıştırılır. Burada

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad (8)$$

dir. Aranan çözüm, yöntem gereği, her bir sonlu elemanda polinom şeklinde seçilir. Bu çalışmada, Yerdeğiştirme Esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanıldığından her bir sonlu elemanda aranan fonksiyon ancak yerdeğiştirme fonksiyonudur. Dolayısıyla,

$$u^{(k)} \approx N^{(k)} a^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (9)$$

seçilir. (9)'da altı çizili indislere göre Einstein toplama uyluşımı uygulanmayacaktır. Ayrıca (9)'da

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{u}^{(k)} \right)^T &= \left( u_1^{(k)}(x_1, x_2) \quad u_2^{(k)}(x_1, x_2) \right), \quad \left( \mathbf{a}^{(k)} \right)^T = \left( u_{11}^{(k)} \quad u_{21}^{(k)} \quad \dots \quad u_{19}^{(k)} \quad u_{29}^{(k)} \right) \\ \mathbf{N}^{(k)} &= \begin{pmatrix} N_1^{(k)} & 0 & N_2^{(k)} & 0 & N_3^{(k)} & 0 & N_4^{(k)} & 0 & N_5^{(k)} & 0 & N_6^{(k)} & 0 & N_7^{(k)} & 0 & N_8^{(k)} & 0 & N_9^{(k)} & 0 \\ 0 & N_1^{(k)} & 0 & N_2^{(k)} & 0 & N_3^{(k)} & 0 & N_4^{(k)} & 0 & N_5^{(k)} & 0 & N_6^{(k)} & 0 & N_7^{(k)} & 0 & N_8^{(k)} & 0 & N_9^{(k)} \end{pmatrix} \\ &k = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (10)$$

dir. (9) ve (10)'da ( $k$ ) üst indisi, ele alınan büyüklüğün  $\Omega_k$  sonlu elemanına ait olduğunu göstermektedir.  $\mathbf{a}^{(k)}$  vektörünün (10)'da gösterilen bileşenleri,  $\Omega_k$  sonlu elemanın nodlarındaki yer değıştirmelerdir. Her bir bileşenin, birinci alt indisi yer değıştirmenin doğrultusunu, ikinci alt indisi nodun yerel numarasını göstermektedir. Her sonlu elemanda (9) şeklinde seçilen çözümler (6)'da yerine yazılır ve bilinen Ritz tekniğı yardımıyla

$$\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{r} \quad (11)$$

şeklinde non-lineer cebirsel denklemlere dönüştürülür [10,11]. Burada  $\mathbf{a}^T = (a^{(1)} \quad a^{(2)} \quad \dots \quad a^{(M)})$  dir.  $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(M)}$ , nin ifadeleri (10)'da verilmektedir.

Sonuçta, ele alınan (2)-(4) non-lineer sınırdeğer probleminin (5) sınır koşulları çerçevesinde incelenmesi Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla (11) non-lineer cebirsel denklemler takımının incelenmesine getirilmiş olunur. (11) denklemlerinde non-lineer terimler ihmal edilirse, bu denklemler takımı [3]'de verilen,

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (12)$$

uygun lineer denklem sistemine dönüşmektedir. (12)'de  $\mathbf{K}$ -Rijitlik,  $\mathbf{a}$ -bilinmeyenleri içeren ve  $\mathbf{r}$ -sağ taraf matrisleridir.

#### 4. NEWTON-RAPHSON YÖNTEMİ VE TEĞET RİJİTLİK MATRİSİ

(11) non-lineer cebirsel denklemler takımı Newton-Raphson yöntemi yardımıyla lineerleştirilerek, iterasyonlarla çözülecektir. Bu yöntemle göre, keyfi bir çözüm vektörü, örneğin

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 \quad (13)$$

seçilmiş olsun. Bu çözüm (11) cebirsel denklemler takımının kesin çözümü olmadığından, (11)'de yerine yazılırsa,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_0) \quad (14)$$

şeklinde bir hata meydana gelir. Böyle bir hatanın oluşmaması için (13) şeklinde seçilen ilk çözüme bir artım verilerek,

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 + \delta\mathbf{a}_1 \quad (15)$$

şeklinde yeni bir çözüm vektörü yazılır. Burada  $\delta\mathbf{a}_1$ , (14)'deki hatayı sıfırlayacak şekilde belirlenmesi gereken bir çözümdür, yani

$$\Psi(\mathbf{a}_0 + \delta\mathbf{a}_1) = \mathbf{r} \quad (16)$$

denkleminin sağlandığı kabul edilir.  $\delta\mathbf{a}_1$ 'in bulunması için (16) denklemini lineerleştirilirse,

$$\Psi(\mathbf{a}_0 + \delta\mathbf{a}_1) \approx \Psi(\mathbf{a}_0) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta\mathbf{a}_1 \quad (17)$$

olur. Buradan (17), (16)'da yerine yazılırsa

$$\Psi(\mathbf{a}_0) + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta\mathbf{a}_1 = \mathbf{r} \quad (18)$$

elde edilir. (18)'de (14) göz önüne alınırsa,

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \delta\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1 \text{ veya } \mathbf{K}_T(\mathbf{a}_0)\delta\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_1 \quad (19)$$

şeklinde olur. Burada  $\mathbf{K}_T$  matrisine *Teğet Rijitlik Matrisi* adı verilir ve

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{a}_0) = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}_0} \quad (20)$$

dir [5,10,11]. (19) lineer denklem sisteminden  $\delta\mathbf{a}_1$  belirlenir (15)'de yerine yazılırsa (11) denklemler sistemi için yeni bir çözüm elde edilir. Eğer elde edilen (15) çözümü kesin çözüm ise (11) non-lineer denklemler sistemini özdeşlikle sağlar. Aksi halde (14)'dekine benzer şekilde,

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \Psi(\mathbf{a}_1) \quad (21)$$

bir hata meydana gelir. (15)-(20) işlemleri, (21) göz önüne alınarak ve  $\mathbf{a}_0$  yerine  $\mathbf{a}_1$  çözümü kullanılarak tekrarlanır. Son elde edilen çözümün istenilen hassasiyetle (11) denklemini sağladığı durumda iterasyon işlemi sonlandırılır.

Burada, ele alınan sınır değer problemine ait (11) non-lineer cebirsel denklemler takımının çözümü yukarıda verilen (14)-(20) iterasyonu kullanılarak yapılmıştır. İterasyona giren ilk çözüm olarak (12) denklem takımının çözümü seçilmiştir.

## 5. GERİLMELERİN BELİRLENMESİ

Bu çalışmada *Yerdeğiştirme Esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi* kullanıldığından, her bir nodda bilinmeyen olarak sadece yerdeğiştirmeler alınmıştır. Yani Sonlu Eleman çözümü bize ancak nodlardaki yerdeğiştirmeleri verecektir. Dolgu ( $n=2$ ) ve onu saran bölgedeki ( $n=1$ ) gerilme fonksiyonları Hooke Yasası yardımıyla bulunur. Yani,

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(n)} = \mathbf{D}^{(n)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(n)T} = \left\{ \hat{\sigma}_{11}^{(n)} \quad \hat{\sigma}_{22}^{(n)} \quad \hat{\sigma}_{12}^{(n)} \right\}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)T} = \left\{ \varepsilon_{11}^{(n)} \quad \varepsilon_{22}^{(n)} \quad \varepsilon_{12}^{(n)} \right\} \quad (22)$$

yazılır. Burada,

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_i} \right) \quad \mathbf{D}^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E^{(n)}} & -\frac{\nu^{(n)}}{E^{(n)}} & 0 \\ -\frac{\nu^{(n)}}{E^{(n)}} & \frac{1}{E^{(n)}} & 0 \\ 0 & 0 & 2G^{(n)} \end{bmatrix}, \quad G^{(n)} = \frac{1+\nu^{(n)}}{E^{(n)}} \quad (23)$$

dir.

Bilindiği gibi sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çözüm, bütün bölgede  $C^0$  sürekliliğine sahiptir. Dolayısıyla sonlu eleman çözümünden elde edilen (9) yerdeğiştirme fonksiyonu kullanılarak bulunan (24) gerilme fonksiyonu sonlu eleman sınırlarında süreksiz olur. Bu durum kullanılan yöntemden kaynaklanmaktadır. Bu nedenle gerilme fonksiyonları yeniden Sonlu Elemanlar Yöntemi ve En Küçük Kareler Yöntemi yardımıyla süreklileştirilmiştir [12].

Gerilme fonksiyonlarına ait sonlu eleman ağı, yerdeğiştirmelere ait sonlu eleman ağı ile aynı alınmıştır. Buna göre, her sonlu elemanda gerilme fonksiyonu

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n),k} \approx \mathbf{N}_{\sigma}^{(n),k} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(n),k} \quad (26)$$

şeklinde temsil edilir. Burada,

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n),k} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(n),k} \\ \sigma_{22}^{(n),k} \\ \sigma_{12}^{(n),k} \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(n),k} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{11}^{(n),k} \\ \bar{\sigma}_{22}^{(n),k} \\ \bar{\sigma}_{12}^{(n),k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}_{\sigma}^{(n),k} = \left( N_{\sigma}^{(n),1}, N_{\sigma}^{(n),2}, \dots, N_{\sigma}^{(n),M} \right) \begin{matrix} (k = 1, 2, \dots, M) \\ (n = 1, 2) \end{matrix} \quad (27)$$

ve (27)'de,

$$\mathbf{N}_{\sigma}^{(n),k} = \begin{pmatrix} N_1^{(n)} & 0 & 0 & N_2^{(n)} & 0 & 0 & N_3^{(n)} & 0 & 0 & \dots & N_9^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{(n)} & 0 & 0 & N_2^{(n)} & 0 & 0 & N_3^{(n)} & 0 & \dots & 0 & N_9^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(n)} & 0 & 0 & N_2^{(n)} & 0 & 0 & N_3^{(n)} & \dots & 0 & 0 & N_9^{(n)} \end{pmatrix} \quad (28)$$

## An Affect of Geometric Nonlinearity on the...

şeklinde. (28)'de kullanılan şekil fonksiyonları yer değiştirmelerin bulunmasında kullanılan şekil fonksiyonları olarak seçilmiştir. (26) yardımıyla elde edilen gerilme fonksiyonu ile (24) yardımıyla elde edilen süreksiz gerilme fonksiyonu arasında En Küçük Kareler Yöntemi yardımıyla,

$$Q = \iint_{\Omega_I} (\sigma^{(1)} - \hat{\sigma}^{(1)})^2 d\Omega_I + \iint_{\Omega_{II}} (\sigma^{(2)} - \hat{\sigma}^{(2)})^2 d\Omega_{II} \quad (29)$$

funksiyoneli kurulum ve nodlarda bilinmeyen gerilme değerleri

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ijk}^{(n)}} = 0, \quad i, j, n = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (30)$$

denklem sisteminden belirlenir.

## 5. SAYISAL SONUÇLAR

Ele alınan şerit-plakta, dikdörtgen dolgu malzemesini saran malzeme ile dolgu malzemesinin izotrop olduğunu kabul edelim. Bu malzemelerin sırayla elastisite modüllerini  $E^{(1)}$ ,  $E^{(2)}$  ve Poisson oranlarını  $\nu^{(1)}$ ,  $\nu^{(2)}$  ile gösterelim. Çözüm bölgesi  $x_1$  yönünde 80,  $x_2$  yönünde 12 dikdörtgen sonlu eleman olacak şekilde ayrıştırılmıştır. Problemin  $x_1 = \ell/2$ 'ye göre simetri özelliğinden yararlanılarak sonlu eleman modellemesi; 480 sonlu eleman, 2025 düğüm noktası (NOD) ve 4000 serbestlik derecesi (NDOF) içermektedir. Parametrelerin değerleri grafikler üzerinde verilmiş olup, parantez içindeki üst indisler, alt indis ve parantezsiz olarak kullanılmıştır.

Ele alınan yükleme durumu ve sınır koşulu için (2)-(5) geometrik non-lineer sınır değer probleminin incelenmesinde, yapıda bulunan dikdörtgen dolgu nedeniyle, delik civarında oluşan gerilme birikimlerine, non-lineeritenin etkisi ele alınmıştır. Bunun için (6) fonksiyoneli non-lineer terimlere  $P/E_1$  çarpanı ilave edilmiştir. Bu çarpanın özelliği  $P/E_1 = 0$  için ele alınan problem uygun lineer probleme indirgenmektedir. Bu parametrenin (çarpanın) değeri non-lineeritenin derecesini göstermektedir. Problemin incelenmesinde bu parametrenin yakınsaklık sınırlarının belirlenmesi gerekir. Çünkü,  $P/E_1$  parametresinin her değerinde ele alınan non-lineer probleme ait sayısal sonuçlar yakınsak çıkmaz ancak, bu çarpanın  $P^*/E_1$  gibi bir kritik değerden küçük kalması yani,  $P/E_1 \leq P^*/E_1$  durumunda sayısal sonuçlarda yakınsaklık elde edilmektedir. Parametrelerin bazı değerlerinde belirlenen  $P^*/E_1$  kritik değerleri Çizelge 1'de verilmiştir.

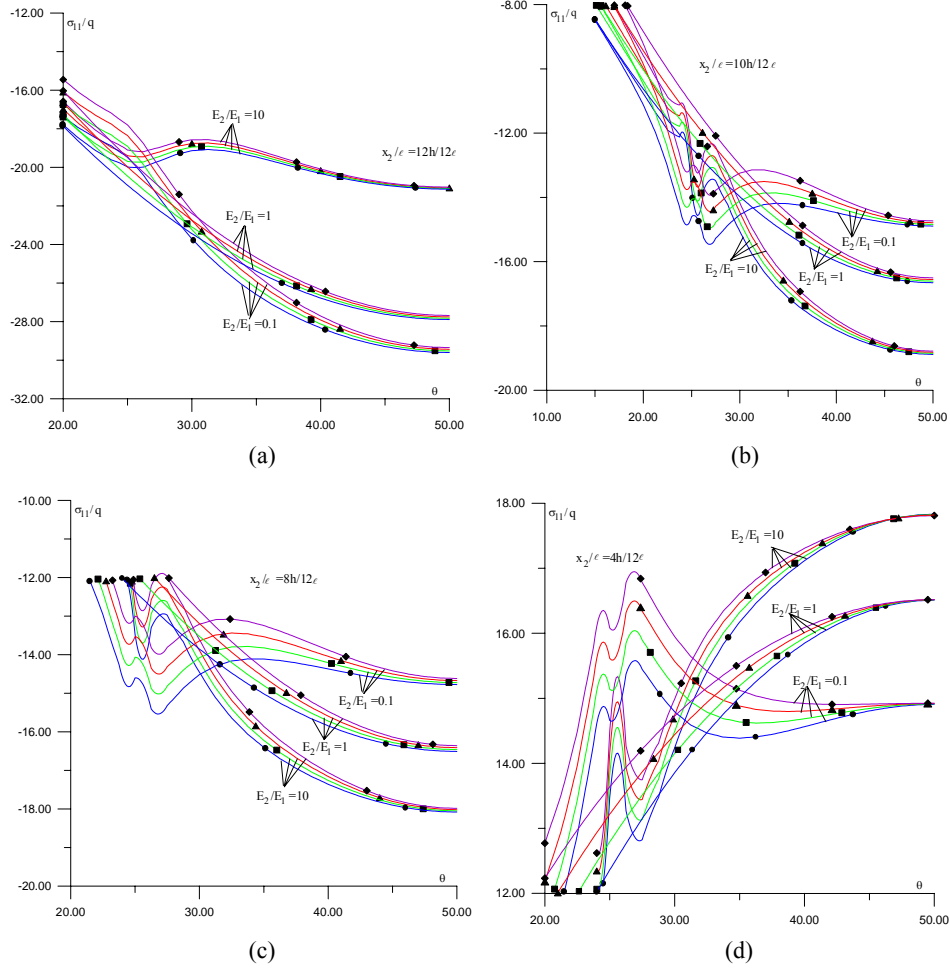
**Çizelge 1.** Bazı parametre değerleri için  $P^*/E_1$  değerleri

$$(h/\ell = 0.15, h_A = h_O = h_U = 0.05\ell, \ell_E/\ell = 0.25).$$

$E_2/E_1$	$P^*/E_1$
1	0.0015
10	0.0017
20	0.0021
50	0.0027

Aşağıda, verilen bütün grafiklerde  $h/\ell = 0.15, h_A = h_O = h_U = 0.05\ell, \ell_E/\ell = 0.25$  alınmıştır.

Şekil 2’de,  $\sigma_{11}$  gerilmesinin düzgün yayılı dış kuvvetin yoğunluğuna ( $q$ ) oranı ( $\sigma_{11}/q$ ), non-linearite parametresi  $P/E_1$ ’in farklı değerleri için dört ayrı kesitte  $x_1/\ell$ ’ye göre dağılımı verilmektedir. Grafiklerden görüldüğü gibi yapı elemanında dikdörtgen dolgu olması ve dolgu malzemesinin elastisite modülü’nün onu saran malzemenin elastisite modülünden büyük ( $E_2/E_1 = 10$ ) veya küçük ( $E_2/E_1 = 0.1$ ) olması gerilme dağılımını önemli ölçüde etkilemektedir. Bu etki, dikdörtgen dolgunun köşeleri civarında çok daha fazladır. Bundan başka non-linearite çarpanı olan  $P/E_1$ ’in artması gerilme değerlerini mutlak değerce düşürmektedir.

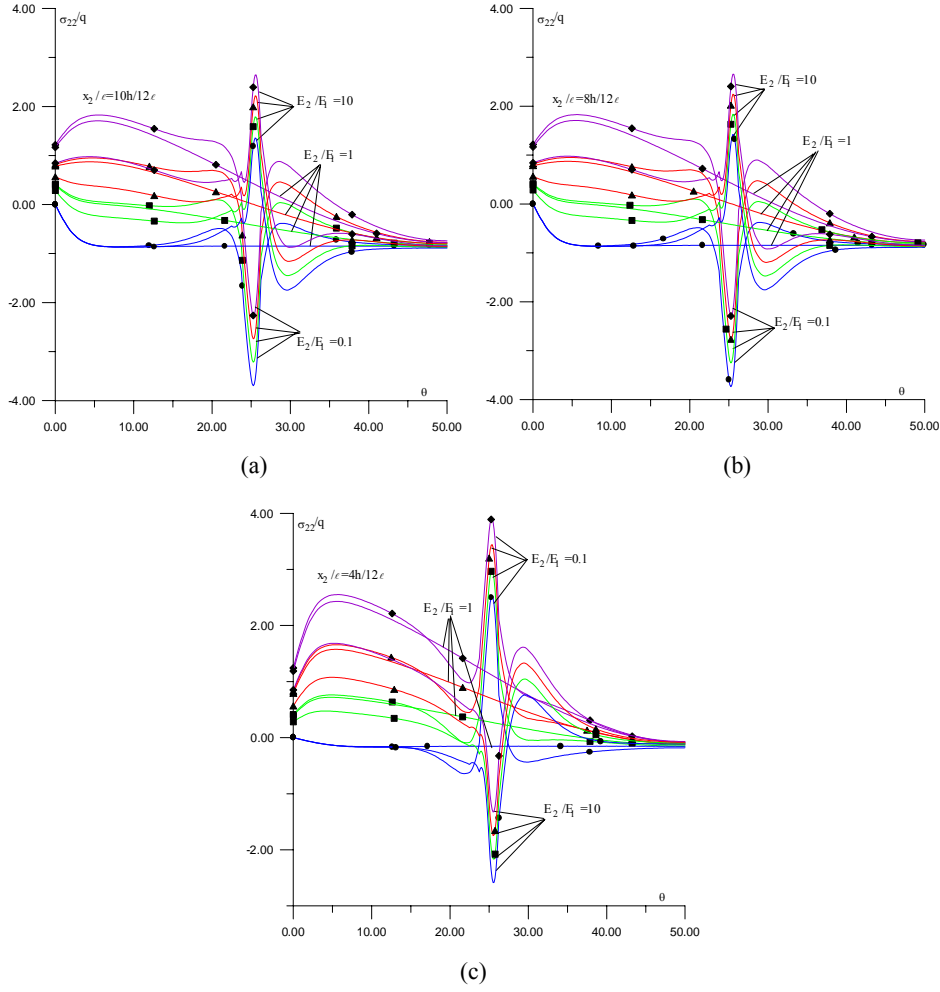


Şekil 2.  $\sigma_{11}/q$  gerilmesinin farklı  $P/E_1$  değerleri için a)  $x_2/\ell = 12h/12\ell$ , b)  $x_2/\ell = 10h/12\ell$ , c)  $x_2/\ell = 8h/12\ell$ , d)  $x_2/\ell = 4h/12\ell$  kesitlerinde  $x_1/\ell$ ’den bağımlılığı, ●-  $P/E_1 = 0$ ;

■-  $P/E_1 = 0.00005$ ; ▲-  $P/E_1 = 0.0001$ ; ◆-  $P/E_1 = 0.00015$ ;

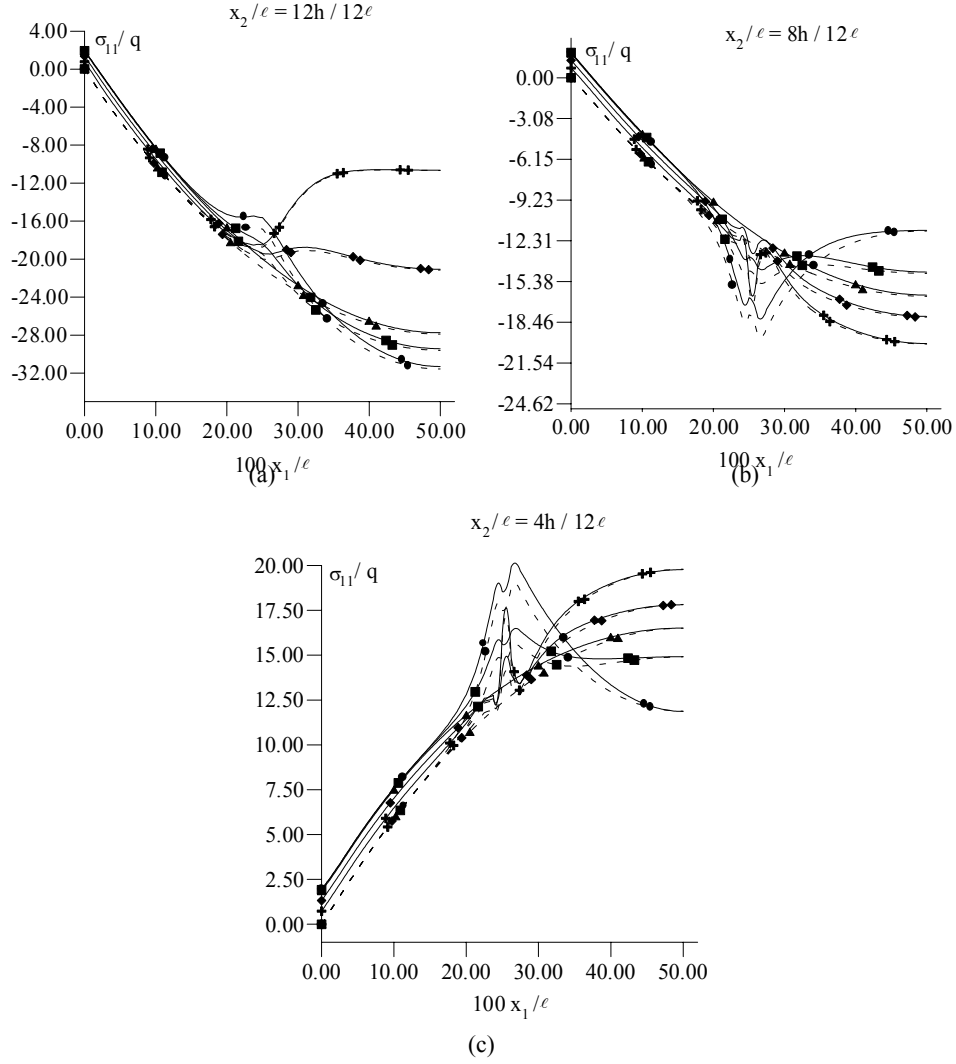


*An Affect of Geometric Nonlinearity on the...*

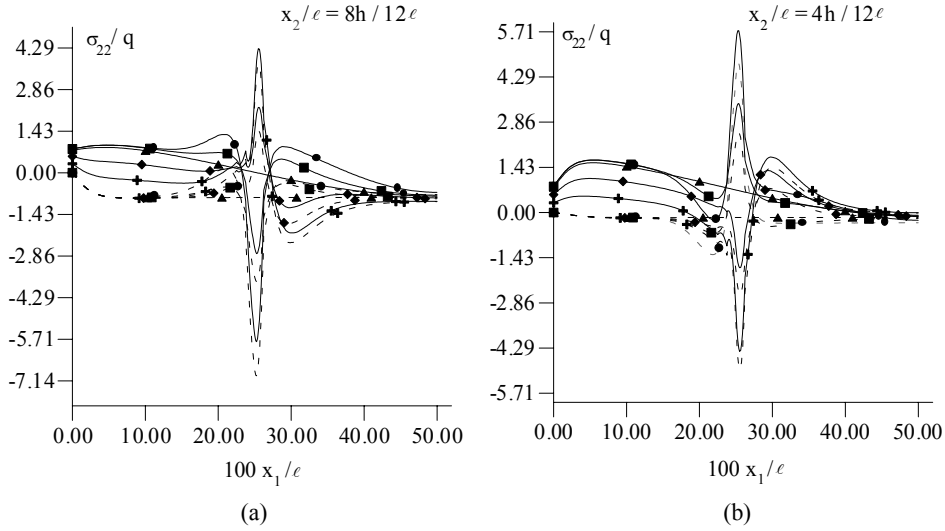


**Şekil 3.**  $\sigma_{22}/q$  gerilmesinin farklı  $P/E_1$  değerleri için a)  $x_2/\ell = 10h/12\ell$ , b)  $x_2/\ell = 8h/12\ell$ , c)  $x_2/\ell = 4h/12\ell$  kesitlerinde  $x_1/\ell$  'den bağımlılığı, ●-  $P/E_1 = 0$ .; ■-  $P/E_1 = 0.00005$ ; ▲-  $P/E_1 = 0.0001$ ; ◆-  $P/E_1 = 0.00015$ ;

Şekil 3'de  $\sigma_{22}/q$  gerilmesinin, non-lineerite parametresi  $P/E_1$  'in farklı değerlerinde üç ayrı kesitte  $x_1/\ell$  'den bağımlılığını gösteren grafikler verilmektedir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi  $P/E_1$  'in yani, non-lineerite çarpanının değişimi, Şekil 2'de olduğu gibi, Şekil 3'de de gerilme dağılımlarını etkilemektedir. Fakat bu etki bu değer arttıkça, dikdörtgen delik civarındaki gerilme değerlerini mutlak değerce düşürürken, diğer kısımlarda artışa neden olmaktadır. Burada  $\sigma_{12}/q$  gerilmesi yayılımına,  $P/E_1$  parametresi değişimi az etki gösterdiği için yer verilmemiştir.



Şekil 4.  $\sigma_{11}/q$  gerilmesinin farklı  $E_2/E_1$  değerleri için a)  $x_2/\ell = 12h/12\ell$ , b)  $x_2/\ell = 10h/12\ell$ , c)  $x_2/\ell = 8h/12\ell$  kesitlerinde  $x_1/\ell$ ' den bağımlılığı, ●-  $E_2/E_1 = 0.02$ ; ■-  $E_2/E_1 = 0.1$ ; ▲-  $E_2/E_1 = 1$ ; ◆-  $E_2/E_1 = 10$ ; + -  $E_2/E_1 = 50$ ; —  $P/E_1 = 0.0001$ . - - -  $P/E_1 = 0$ .



Şekil 5.  $\sigma_{22}/q$  gerilmesinin farklı  $E_2/E_1$  değerleri için a)  $x_2/\ell = 8h/12\ell$ , b)  $x_2/\ell = 4h/12\ell$ , kesitlerinde  $x_1/\ell$  'den bağımlılığı, ●-  $E_2/E_1 = 0.02$ ; ■-  $E_2/E_1 = 0.1$ ; ▲-  $E_2/E_1 = 1$ .; ◆-  $E_2/E_1 = 10$ ; +  $E_2/E_1 = 50$ ; —  $P/E_1 = 0.0001$ . - - -  $P/E_1 = 0$ .

Şekil 4 ve Şekil 5'de sırasıyla  $\sigma_{11}/q$  ve  $\sigma_{22}/q$  gerilmelerinin farklı  $E_2/E_1$  oranları için lineer ( $P/E_1 = 0$ ) ve non-linear ( $P/E_1 = 0.0001$ ) durumda  $x_1/\ell$  'ye göre farklı kesitlerde grafikleri verilmektedir. Bu grafiklerden görüldüğü üzere, her iki gerilme grafiği dolgu bölgesi civarında  $E_2/E_1 < 1$  ve  $E_2/E_1 > 1$  için birbirinden farklı yayılış formu göstermekte ayrıca,  $E_2/E_1$  oranı arttıkça gerilme değerleri mutlak değerce artmakta fakat, bu oran düştükçe non-lineerite parametresinin etkisi artmaktadır.

#### KAYNAKLAR

- [1] Mura, T., "Inclusion Problems", Appl Mech Rev, 41(1):15-20, 1988.
- [2] Akbarov S.D. and Guz A.N., "Mechanics of Curved Composites", Kluwer Academics Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000.
- [3] Yücel A.M., "Dikdörtgen Delik İçeren Kompozit Kiriş Levhaların Eğilmesindeki Gerilme Dağılımı Problemleri", Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Y.T.Ü., 2002.
- [4] S D Akbarov, N Yahnioglu and A M Yucel, "On the influence of the initial tension of a strip with a rectangular hole on the stress concentration caused by additional loading", The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, V. 39, No 6, Pp: 615 – 624, 2004.
- [5] Ağıt H., "Dikdörtgen Delik İçeren Şerit-Levhaya Ait Bir Non-Linear Sınır Değer Probleminin FEM İle İncelenmesi", Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Y.T.Ü., 2004.
- [6] Zeng H. And Bert C.W., "Generalized Bending of Shear-Deformable Plate with Elastic Inclusion", J. Engrg. Mech., V. 127, No. 9, Pp. 927-931, 2001.
- [7] Bert, C.W., (2001), "Generalized Bending of a Plate with a Circular Inclusion of Arbitrary Rigidity", Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 36(3):341-345.

- [8] Hufenbach, W. and Zhou, B., (2001), "Solutions for an Anisotropic, Finite Plate with an Elastic Inclusion and a Loaded Boundary", *Composite Structures*, 52:161-166
- [9] Aksoy, T.M., Özbay O., Ertay Y. Ve Öge A., "UH-1H ve AB-205 Helikopteri Kızak Tüplerinin Doldurucu/Yama Metodu ile Onarımı", ABAQUS 2004 Kullanıcılar Konferansı, 7-8 Ekim 2004, İstanbul.
- [10] Selim, S., "Bazı Non-Linear Sınır Değer Problemlerinin FEM İle İncelenmesi", Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Y.T.Ü., 1999.
- [11] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., "Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-linearity", *The Finite Element Method 4<sup>th</sup> Ed. Vol 2*, McGraw-Hill Book Company., 1989.
- [12] Hinton, E. and Campell, J., "Local and global smoothing of discontinuous finite element function using a least square method", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*. Vol. 8, pp:461-480, 1979.