σ

Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi

Sigma
2005/4

AN APPROACH TO SOLUTION FOR THE PURSUIT PROBLEM UNDER LACK OF KNOWLEDGE

İbrahim DEMİR*

Yıldız Teknik Üniversitesi,Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Davutpaşa-İSTANBUL

Geliş/Received: 05.11.2004 Kabul/Accepted: 08.08.2005

ABSTRACT

In this article, under lack of knowledge the linear differential games are analyzed and a new solution method is constructed. At this work, terminal set for linear differential games are taken as cylindrical set and in this set the possibility of finishing game is shown.
Keywords: Differential games, Pursuit problems, Lack of knowledge.

EKSİK BİLGİ ALTINDA TAKİP PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE BİR YAKLAŞIM

ÖZET

Bu makalede, Eksik bilgi altında lineer diferansiyel oyunlar incelenmiş ve yeni bir çözüm yöntemi getirilmiştir. Bu çalışmada lineer diferansiyel oyunlar için bitiş kümesi silindir küme olarak ele alınmıştır ve bu silindir kümede oyunun bitirilmesinin mümkün olduğu gösterilmiştir.
Anahtar Sözcükler: Diferansiyel oyunlar, Takip problemleri, Eksik bilgi.

1. GİRİŞ

Diferansiyel oyunların önemli parçası takip problemleridir. Diferansiyel oyunlar teorisi başlangıçta savaş modelleri için bir araç olarak geliştirilmiştir [2].

Diferansiyel oyunların asıl amacı diferansiyel denklemler ile verilen hareketlerin çatışması durumlarını öğrenmektir. Bu teoriyle Rusya'da Pontryagin [9][8], Krasovsky [10], Chikrii [5], Azimov [1] ve diğer bilim adamları uğraşmışlardır. Amerika ve Batıda ise R. Isaacs, Hajek, Lee ve Markus, M. Bardi [7] ve diğer bilim adamları uğraşarak bu alana önemli katkıda bulunmuşlardır[2].

Amerika'daki ekolun başını çeken R. Isaacs [11] daha çok uygulamalı diferansiyel oyunlarla uğraşmıştır ve geometrik yaklaşımlarla çözüm yöntemine önem vermiştir. Rusya'daki ekolun ileri gelenleri ise teorik çalışmalarda bulunmuşlardır. Bu çalışmada uyguladığımız yöntemler Pontryagin'in diferansiyel oyunlardaki yaklaşımına dayanmaktadır.

Bu makalede, Eksik bilgi altında takip eden nesnenin takip edilen nesneyi yakalayabilmesi koşulları incelendi. Phan Zuy Hai doktora tezinde [6] A. Ya. Azimov'un yaklaşımını [1] eksik bilgili takip problemlerinin çözümü için genelleştirildi. Azimov'un

* e-posta: idemir@yildiz.edu.tr, tel: (0212) 449 16 60

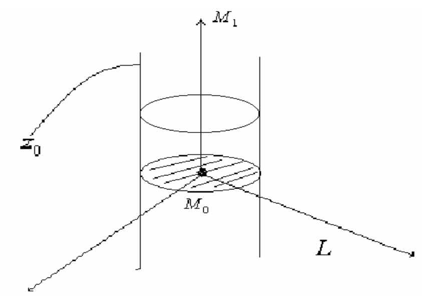
çalışmasında her iki oyuncunun kontrolleri integral kısıtlamalıdır. Hai'in çalışmasında ise eksik bilgi altında her iki oyuncunun kontrolleri integral kısıtlamalıdır. Bu çalışmada, Azimov'un ve Hai'in incelediği problemdeki kısıtlar değiştirildi ve takip eden nesnenin kontrolünü integral kısıt, takip edilen nesnenin kontrolünü geometrik kısıt olarak ele alınmış ve bu yeni kısıtlar altında takip problemi incelendi.

2. EKSİK BİLGİ ALTINDA TAKİP PROBLEMİ

Diferansiyel oyunlar uygulamalı matematiğin önemli alanlarından biridir. Burada aşağıdaki lineer diferansiyel oyunları incelenmiştir. $z(t)$ süreci

$$\dot{z}(t) = Az(t) - Bu(t) + Cv(t) \tag{1}$$

denklemi ile verilmiştir. Burada problemin koşullarını sağlayan her t için $z(t) \in R^n$, $u(t) \in R^p$, $v(t) \in R^q$ dir. Ayrıca A, B ve C sırasıyla nxn, pxn *ve* qxn boyutlu verilmiş matrislerdir. Takip eden oyuncu $u(t)$ kontrolü ile $z(t)$ yörüngesini $z_0 \notin M$ başlangıç noktasından sonlu zamanda M bitiş kümesine getirmek istemekte, İkinci oyuncu $v(t)$ kontrolünü kullanarak bu isteğe engel olmak istemektedir. Burada M bitiş kümesi $M_0 + M_1$ şeklinde silindir bir kümedir (şekil 2.1). M_1 alt uzay, M_0 ise L 'de bir kümedir. L ise M_1 'in R^n 'de ortogonal tamamlayıcısıdır. Yani $R^n = M_1 \oplus L$ dir.



Şekil 1. M bitiş kümesi

$\Pi : R^n \to L$ ortogonal izdüşüm matrisi olmak üzere $z(t_1) \in M$ olduğunda $\Pi z(t_1) \in M_0$ olur. Bunun terside doğrudur.

$u(t)$ ve $v(t)$ kontrolleri

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \le \rho^2 , \quad v(t) \in Q \tag{2}$$

sırasıyla integral ve geometrik kısıtlamaları sağlamaktadır. Burada $Q \subset R^q$ kompakt bir alt kümedir ve u(t) kontrolü ise karesi integrallenebilen fonksiyonlar sınıfındandır.

Takip Problemi : Öyle u stratejisi bulalım ki her $v(t)$ için $z(t_1) \in M$ veya $\Pi z(t_1) \in M_0$ olsun.

Tanım 1: $z_0 \notin M$ başlangıç noktası için öyle bir $T(z_0) > 0$ zamanı vardır ve her keyfi $v(.)$ kontrolü için öyle $u(.)$ kontrolü kurulabilir ve (1) diferansiyel denkleminin $z(t)$ yörüngesi $t_1 \leq T(z_0)$ anında $z(t_1) \in M$ olursa, oyunu z_0 noktasından sonlu zamanda bitirmek mümkündür.

Takip eden oyuncu $\forall t > 0$ için takip edilen oyuncunun kontrolü hakkında başlangıçtan itibaren belli bir zaman aralığında bilgi almamakta ve bu zamandan sonra ise aldığı bilgi de gecikmeli olmaktadır. Bu çalışmada incelenen bu tip problemlere eksik bilgi altında takip problemi denir.

Bu tanımla ilgili olarak aşağıdaki sorular sorulabilir.

1) Hangi $z_0 \notin M$ başlangıç noktasından oyunun bitirilmesi mümkündür?
2) Oyunu bitiren $u(.)$ stratejisi nasıl kurulabilir?
3) $T(z_0)$ zamanı mevcut mu?

Burada takip eden oyuncu her $t \in [t_0, T]$ için $\{v(s) | s \in [\tau(t_0), \tau(t)]\}$ 'yı bilmektedir. Burada T ve t_0 bilinmektedir. Her $t \geq t_0$ için verilen $\tau(t)$ fonksiyonu sürekli, diferansiyellenebilen monoton artan ve $\tau(t_0) \geq 0$, $\tau(t) \leq t$ dir. $\tau(t)$ fonksiyonu ve t_0 zamanı, takip eden tarafından bilinmektedir. Demek ki takip eden $[0, t_0]$ zaman aralığında $v(s)$ hakkında hiçbir şey bilmemekte, t_0 anından sonra her t anında $v(s)$ hakkında $t - \tau(t)$ gecikmesi ile bilgi sahibi olmaktadır. $u^*(t)$, $[0, t_0]$ zaman aralığında takip edenin kontrolü olsun. Buna göre

$\int_0^{t_0} \left\| u^*(t) \right\|^2 dt \leq \rho^2$ olmalıdır.

$$\tilde{\rho}^2 = \rho^2 - \int_0^{t_0} \left\| u^*(t) \right\|^2 dt \tag{4}$$

yazalım.

Varsayım 1: Öyle sürekli operatör fonksiyonu $F(s) : R^q \to R^p$ var ki

$$\Pi e^{(t_1 - \tau(s))A} C = \Pi e^{(t_1 - s)A} B F(s), \; s \in [t_0, t_1], \tag{5}$$

dir. Burada $t_1 \leq T$ 'dir. $l^2(t)$ sayısını aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$l^2(t) = \sup_{\substack{v(s) \in Q \\ s \in [0,t]}} \int_{t_0}^{t} \left\| F(s) v(\tau(s)) \dot{\tau}(s) \right\|^2 ds, \; t_0 \leq t \leq t_1 \tag{6}$$

Varsayım 2: Her t : $t_0 \leq t \leq t_1$ için $\tilde{\rho} \geq l(t)$ olsun. (7)

Aşağıdaki kümeleri göz önüne alalım.

$$H(t,t_0)=\left\{\int_0^{\tau(t_0)}\Pi e^{(t-s)A}Cv(s)ds+\int_{\tau(t)}^{t}\Pi e^{(t-s)A}Cv(s)ds\,\middle|\,v(s)\in Q, s\in[0,t]\right\} \quad (8)$$

$$G(t)=\left\{\int_{t_0}^{t}\Pi e^{(t-s)A}Bw(s)ds\,\middle|\,\int_{t_0}^{t}\|w(s)\|^2ds\le(\tilde{\rho}-l(t))^2\right\} \quad (9)$$

Burada $H(t,t_0)$ ve $G(t)$ kümeleri kompakt kümelerdir.

Tanım 2. $P\subset R^n, Q\subset R^n$ kümeleri verilsin. Buna göre Pontryagin farkı $P \overset{*}{-} Q=\left\{x\in R^n \,\middle|\, x+Q\subset P\right\}$ şeklindedir.

Varsayım 3:

$$M_0 \overset{*}{-} H(t,t_0)\ne\varnothing,\ \forall t\in[t_0,t_1] \quad (10)$$

dir.

Varsayım 4: Aşağıdaki koşul sağlansın:

$$\Pi e^{t_1A}\left(z_0-\int_0^{t_0}e^{-sA}Bu^*(s)ds\right)\in G(t_1)+\left(M_0 \overset{*}{-} H(t_1,t_0)\right) \quad (11)$$

Teorem: $z_0\notin M$ başlangıç noktasından başlayan oyun $t=t_1$ anında bitmesi için Varsayım 1 ila varsayım 4'ün sağlanması yeterlidir.

İspat: Varsayım 4'den $t_0\le s\le t_1$ için $w^*(s)$ vardır.

a-) $$\int_{t_0}^{t_1}\left\|w^*(s)\right\|^2ds\le\left(\tilde{\rho}-l(t_1)\right)^2 \quad (12)$$

b-) (9), (11) ve (12)' den

$$\Pi e^{t_1A}\left(z_0-\int_0^{t_0}e^{-sA}Bu^*(s)ds\right)-\int_{t_0}^{t_1}\Pi e^{(t_1-s)A}Bw^*(s)ds+H(t_1,t_0)\subset M_0 \quad (13)$$

elde edilir. $v(s)$, $s\in[0,t_1]$ takip edilenin keyfi uygun bir kontrolü olsun. (13)'den aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\Pi e^{t_1A}\left(z_0-\int_0^{t_0}e^{-sA}Bu^*(s)ds\right)-\int_{t_0}^{t_1}\Pi e^{(t_1-s)A}Bw^*(s)ds+$$

$$+\int_0^{\tau(t_0)}\Pi e^{(t_1-s)A}Cv(s)ds+\int_{\tau(t_1)}^{t_1}\Pi e^{(t_1-s)A}Cv(s)ds\in M_0 \quad (14)$$

Bu problem için takip eden oyuncunu kontrolünü aşağıdaki gibi kurulur:

$$u(s)=\begin{cases} u^*(s) & ,s\in[0,t_0] \\ F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)+w^*(s) & ,s\in[t_0,t_1] \end{cases} \tag{15}$$

$u(s)$ in uygun kontrol olduğunu göstermek gerekir. Bunun için

$$\sqrt{\int_0^{t_1}\|u(s)\|^2\,ds}=\sqrt{\int_0^{t_0}\|u^*(s)\|^2\,ds+\int_{t_0}^{t_1}\|F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)+w^*(s)\|^2\,ds} \tag{16}$$

(4)'den

$$\int_0^{t_0}\|u^*(s)\|^2\,ds=\rho^2-\tilde{\rho}^2 \tag{17}$$

elde edilir.

$$\sqrt{\int_{t_0}^{t_1}\|F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)+w^*(s)\|^2\,ds}\le\sqrt{\int_{t_0}^{t_1}\|F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)\|^2\,ds}+\sqrt{\int_{t_0}^{t_1}\|w^*(s)\|^2\,ds} \tag{18}$$

$\le l(t_1)+\tilde{\rho}-l(t_1)=\tilde{\rho}$ dir.

(16)'daki ifade de

$$\sqrt{\int_0^{t_1}\|u(s)\|^2\,ds}\le\sqrt{\rho^2-\tilde{\rho}^2+\tilde{\rho}^2}=\rho$$

$$z(t_1)=e^{t_1A}z_0-\int_0^{t_1}e^{(t_1-s)A}Bu(s)ds+\int_0^{t_1}e^{(t_1-s)A}Cv(s)ds$$

$$=e^{t_1A}z_0-\int_0^{t_0}e^{(t_1-s)A}Bu^*(s)ds+\int_{\tau(t_0)}^{\tau(t_1)}e^{(t_1-s)A}Cv(s)ds+\int_0^{\tau(t_0)}e^{(t_1-s)A}Cv(s)ds$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}e^{(t_1-s)A}B\left(F(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)+w^*(s)\right)ds+\int_{\tau(t_1)}^{t_1}e^{(t_1-s)A}Cv(s)ds$$

$$=e^{t_1A}\left(z_0-\int_0^{t_0}e^{-sA}Bu^*(s)ds\right)-\int_{t_0}^{t_1}e^{(t_1-s)A}BF(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)ds-\int_{t_0}^{t_1}e^{(t_1-s)A}Bw^*(s)ds$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}e^{(t_1-\tau(s))A}Cv(\tau(s))\dot{\tau}(s)ds+\int_0^{\tau(t_0)}e^{(t_1-s)A}Cv(s)ds+\int_{\tau(t_1)}^{t_1}e^{(t_1-s)A}Cv(s)ds$$

Burada $\tau(r)=s$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_{\tau(t_0)}^{\tau(t_1)}e^{(t_1-s)A}Cv(s)ds=\int_{t_0}^{t_1}e^{(t_1-\tau(r))A}Cv(\tau(r))\dot{\tau}(r)dr$$

elde edilir. Buradan

$$\Pi z(t_1) = \Pi e^{t_1 A}\left(z_0 - \int_0^{t_0} e^{-sA} Bu^*(s)ds \right) - \int_{t_0}^{t_1} \Pi e^{(t_1 - s)A} BF(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)ds$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \Pi e^{(t_1 - s)A} Bw^*(s)ds + \int_{t_0}^{t_1} \Pi e^{(t_1 - \tau(s))A} Cv(\tau(s))\dot{\tau}(s)ds + \int_0^{\tau(t_0)} \Pi e^{(t_1 - s)A} Cv(s)ds$$

$$+ \int_{\tau(t_1)}^{t_1} \Pi e^{(t_1 - s)A} v(s)ds$$

olur. Varsayım 1'den

$$\int_{t_0}^{t_1} \Pi e^{(t_1 - s)A} BF(s)v(\tau(s))\dot{\tau}(s)ds = \int_{t_0}^{t_1} \Pi e^{(t_1 - \tau(s))A} Cv(\tau(s))\dot{\tau}(s)ds$$

olduğuna göre bu ifadeyi kullanılarak (14) dikkate alındığında $\Pi z(t_1) \in M_0$ sonucu elde edilir. Sonuç olarak takip edilen oyuncunun her uygun $v(s)$ kontrolüne karşı takip eden oyuncunun (15)'de öyle bir $u(s)$ kontrolü kurulur ki z_0 başlangıç noktasından çıkan yörünge en geç t_1 zamanında M alt uzayına gelir. Sonuç olarak oyun $t = t_1$ anında biter.

2. Uygulama

Örnek 1: Varsayalım ki takip eden oyuncunun hareketi

$$\dot{x} + \alpha x = u \tag{19}$$

ile takip edilen oyuncunun hareketi ise

$$\dot{y} + \beta y = v \tag{20}$$

ile verilsin. $\alpha > 0, \beta > 0$ sürtünme katsayısı olup birer skaler sayı, $x, y, u, v \in R^n$ vektörler ve $u(t)$, $v(t)$ kontrolleri ölçülebilir ve aşağıdaki koşulları sağlayan kontrol fonksiyonlarıdır.

$$\int_0^{\infty} \|u(t)\|^2 dt \le \rho^2, \ \rho > 0, \ \|v(t)\| \le \sigma \tag{21}$$

ayrıca her biri sırasıyla integral ve geometrik kısıtlardır. $\varepsilon > 0$ bir sayı olarak verilmiştir. Oyun $(x_0, y_0) : \|x_0 - y_0\| > \varepsilon$ başlangıç noktasından başlamaktadır ve

$$\|x(t_1) - y(t_1)\| \le \varepsilon \tag{22}$$

olduğu zaman $t = t_1$ anında da bitmektedir. Takip eden oyuncu $\forall t > 0$ anında (x_0, y_0) için bilgi sahibidir.

Buna göre başlangıç koşulları $(x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0)$ ve $\alpha, \beta, \rho, \sigma$ parametreleri hangi koşulları sağlamalıdır ki oyun t_1 zamanında bitsin. Yani (22)'deki ifade gerçekleşsin.

Bu problemi çözmek için yukarıda verilen Teorem'i uygulanır. (19), (20) ve (21) ile verilen takip problemini (1)'deki diferansiyel oyun şeklinde yazılması gerekir. (19) ve (20) denklemleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$\dot{z}_1 = -\alpha z_1 + u \tag{23}$$
$$\dot{z}_2 = -\beta z_2 + v$$

Burada $x = z_1$, $y = z_2$ ve $z_1, z_2 \in R^n$ dır. (1)'deki A, B ve C matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha E & 0 \\ 0 & -\beta E \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -E \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada 0 – (kxk) boyutlu sıfır matrisi, E – (kxk) boyutlu birim matrisi ifade etmektedir. (22)'den

$$M_1 = \{(z_1, z_2) | z_1 = z_2\} \tag{24}$$

lineer uzayı elde edilir. Buna göre $M_1 \perp L$ olduğundan $L = \{(z_1, z_2) | z_1 = -z_2\}$ dir. M_0 ise $M_0 = \left\{(z,-z) \,\middle|\, \|z\| \le \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ şeklinde tanımlanır.

$\Pi : R^{2n} \to R^n$ ortogonal izdüşüm matrisini $\Pi = [E \quad -E]$ şeklinde ele alalım.

$\forall T > 0$ olsun. İncelenen bu örnek için Teorem'deki $t_0 = 0$ ve $\tau(t) = \frac{t}{2}$ olarak ele alındı.

Varsayım 1'deki $F(s)$'ü

$$F(s) = e^{\alpha(t_1 - s) - \beta(t_1 - \tau(s))} E, s \in [0, T]$$

şeklinde bulanabilir. Burada $\tau(s) = \frac{s}{2}$ alınırsa;

$$F(s) = e^{(\alpha-\beta)t_1 - \alpha s + \beta\frac{s}{2}} E,$$

$$F(s) = e^{(\alpha-\beta)t_1} . e^{(\frac{\beta}{2} - \alpha)s} E, s \in [0, t_1]$$

dir. $t_0 = 0$ olduğuna göre

$\int_0^{t_0} \|u^*(t)\|^2 \, dt = 0$ dan $\tilde{\rho} = \rho$ dir. $l^2(t)$ sayısı

$$l^2(t) \le \frac{1}{4}\sigma^2 e^{2(\alpha-\beta)t_1} \frac{1}{\beta - 2\alpha}\left[e^{(\beta-2\alpha)t} - 1\right], \; 0 \le t \le t_1 \tag{25}$$

şeklinde olduğu gösterilebilir.

i-) $\frac{\beta}{2} < \alpha < \beta$ için problemi incelenirse

(25)'den $l^2(t) \le \frac{1}{4}\sigma^2 \frac{e^{(\beta-2\alpha)t}-1}{(\beta-2\alpha)}$ dir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ifade monoton artan olduğundan $\forall t \ge 0$ için $l^2(t) \le \frac{\sigma^2}{2\alpha-\beta}.\frac{1}{4}$ dir. Buna göre $\rho \ge \sqrt{\frac{\sigma^2}{(2\alpha-\beta)}\cdot\frac{1}{4}}$ veya $\rho \ge \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{1}{2\alpha-\beta}}$ olduğu zaman varsayım 2 gerçekleşir. $H(t,0)$ kümesi

$$H(t,0) = B\left(0;\sigma\left(\frac{1}{\beta}-\frac{e^{-\frac{\beta}{2}t}}{\beta}\right)\right)$$

şeklinde bulunabilir. Burada $\forall t$ için $\frac{1}{\beta}-\frac{e^{-\frac{\beta}{2}t}}{\beta} \le \frac{1}{\beta}$ olduğu aşikardır.

Eğer $\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2} \ge \frac{\sigma}{\beta}$ olsa $\forall t \ge 0$ için $H(t,0) \subset M_0$ dir. Buradan $\forall t \ge 0$ için $M_0 \overset{*}{-} H(t,0) \ne \varnothing$ dir. Bu buna göre varsayım 3'de gerçekleşir. Bulunan değer $G(t)$ kümesinde yerine yazılırsa

$$\left\|\int_0^t - e^{-\alpha(t-s)}w(s)ds\right\| \le \sqrt{\int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}ds}\cdot\sqrt{\int_0^t \|w(s)\|^2 ds} \le \left(\rho - l(t)\right)\cdot\frac{\sqrt{1-e^{-2\alpha t}}}{\sqrt{2\alpha}} \text{ olur.}$$

Bundan daha küçük olan

$$\hat{G}(t) = \left\{\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}w(s)ds \,\middle|\, \int_0^t \|w(s)\|^2 ds \le \left(\rho - \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{1}{2\alpha-\beta}}\right)^2\right\}$$

kümesini göz önüne alındığında $\forall t$ için $\hat{G}(t) \subset G(t)$ olduğu aşikardır.

$$M_0 \overset{*}{-} H(t,0) \supset B\left(0;\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2}-\frac{\sigma}{\beta}\right)$$

ii-) (11)'deki ifadeden $\Pi e^{t_1 A}z_0 \in \hat{G}(t_1) + B\left(0;\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2}-\frac{\sigma}{\beta}\right)$ olup olmadığını incelenir ve bunun varlığı gösterilirse varsayım 4'ünde doğruluğu gerçekleştirmiş olur. Burada $t_1 \to +\infty$ olduğu zaman $\Pi e^{t_1 A}z_0 \to 0$ olur. Aynı zamanda

$$\frac{\sqrt{1-e^{-\alpha t_1}}}{\sqrt{2\alpha}}\left(\rho-\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{1}{2\alpha-\beta}}\right)\rightarrow\frac{\rho-\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{1}{2\alpha-\beta}}}{\sqrt{2\alpha}}$$ olur. Bu ise (11)'deki denklemi sağlar. Bütün varsayımlar gerçekleştirildiğine göre oyun $t=t_1$ anında da bitmektedir.

3. SONUÇ

Takip eden oyuncunun hareketi $\dot{x}+\alpha x=u$, takip edilen oyuncunun hareketi ise $\dot{y}+\beta y=v$ ile verilsin. Verilen $\varepsilon>0$ sayısına göre

$$\frac{\beta}{2}<\alpha<\beta\,,\quad \rho>\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{1}{2\alpha-\beta}}\ ,\ \varepsilon\geq\frac{\sqrt{2}\sigma}{\beta}$$

koşulları sağlandığı takdirde her $z_0=[z_{01},z_{02}]\ :\ \|z_{01}-z_{02}\|>\varepsilon$ noktasından başlayan oyunun bitmesi mümkündür.

Bu çalışmada lineer diferansiyel oyunlarda eksik bilgi altında karışık kısıtlamalı takip problemi incelenmiş ve bazı koşullar altında takip eden nesnenin takip edilen nesneyi yakalayabileceği ispat edilmiştir. Bu çalışma ile ekonomi ve askeri alanlarda çok sık kullanılan lineer diferansiyel oyunlar teorisinin karışık kısıtlamalı problemlerin çözümlerine bir ışık tutulmuştur. Bu teorik çalışmanın uygulamaları ilgili alanlarda yapılabilir. Ayrıca bu çalışma daha da geliştirilerek Lineer diferansiyel oyunlarda, karışık kısıtlamalı kontroller altında kaçma (evasion) problemi incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Azimov, A.Ya., "İntegral Kısıtlı Lineer Diferansiyel Oyunlarda bir Yöntem Hakkında" İzvestiya Akademi Nauk SSSR, seriya Tecnicheskaya Kibernetika, N2, 31-35,1974, (Rusca).

[2] Lewin J., "Differential Games : Theory and Methods for Solving Game Problems with Singular Surfaces", Springer – Verlag, New York, 1994,

[3] Nikolsky, M.S., "İntegral Kısıtlı Lineer Diferansiyel Oyunlar." Upravlyaemie Sistemi, Sibirskoe Otdelenie Akademi Nauk SSSR, N2, 203-214, 1969, (Rusça)

[4] Demir, İ., "Lineer Diferansiyel Oyunlar ve Bazı Uygulamaları", Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2003

[5] Chikrii, A., "Conflict-Controlled Processes", Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, Kluwer, 1997

[6] Phan, Z. H, "Linear Diferential and Descirete Games", Doktora Tezi, Bakü Devlet Üniversitesi, 1981, (Rusça)

[7] Bardi M., T.E.S. Raghavan, T. Parthasarathy, editors foreword by Tamer Başar., (1999), Stochastic and Differential Games : thery and numerical methods, Birkhäuser , Boston

[8] Pontrayagin, L. S. (1990), Optimal Control and Differential Games, American mathematical society, New York.

[9] Pontryagin, L. S. (1967), "On The Theory of Differential Games" Uspekhi Math., Nauka SSSR, N6, V174. 151 – 165 (Rusça)

[10] Krasovsky A. N., Krasovskii N. N., (1995), "Control Under Lack of Information." Birkhauser, Boston. 1995.- 322 p.-

[11] Isaacs R., (1999) Differential Games: A Mathematical Theory with Aplications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization, Dover Publications, Inc. Mineola, New York.