σ Journal of Engineering and Natural Sciences
Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi
Sigma
2005/4

ENERGY DECAY FOR KIRCHHOFF EQUATION

Müge MEYVACI *

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,Beşiktaş-İSTANBUL

Geliş/Received: 02.08.2005 Kabul/Accepted: 03.10.2005

ABSTRACT

In this study, energy decay of the solution of the initial-boundary value problem for the Kirchhoff equation including dissipative terms was obtained.
Keywords: Energy decay estimate, Kirchhoff Equation.

KİRCHHOFF DENKLEMİ İÇİN ENERJİ AZALIMI

ÖZET

Bu çalışmada, disipativ terim içeren Kirchhoff denklemiyle konulan başlangıç- sınır değer probleminin çözümlerinin enerji azalımı elde edilmiştir.
Anahtar Sözcükler: Enerji azalama kestirimi, Kirchhoff denklemi.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, Ω, $\mathbb{R}^N$, de düzgün sınırlı bölge, $A = -\Delta \equiv -\sum_{j=1}^{n} \partial^2 / \partial x_j^2$, Laplace operatörünü, $u' = \partial_t u \equiv \partial u / \partial t$ türevini göstermek ve $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\gamma \geq 1$, $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere

$$u'' + \left\| A^{1/2} u \right\|^{2\gamma} Au + |u'|^{\beta} u' = |u|^{\alpha} u \quad (x,t) \in \Omega \times [0, \infty) \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad u'(x,0) = u_1(x)$$

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega} = 0$$

ikinci mertebeden hiperbolik tipten denklemle verilmiş başlangıç sınır değer problemi için enerji azalma kestirimi, potansiyel çukur metoduyla incelenecektir.

G. Kirchhoff 1883 yılında, iki ucu sabitlenmiş esnek telin serbest titreşim hareketini, $M(r) = c_0^2 + r$ olmak üzere

* e-posta: mucakiro@mynet.com, tel: (0212) 236 69 36 / 131

$$u_{tt} - M(\int_0^L u_x^2 dx)\, u_{xx} = 0$$

denklemiyle modelledi ve bu denklem Kirchhoff denklemi olarak adlandırıldı. S. Bernstein 1940 yılında yayınlamış olduğu çalışmasında, bu denkleme ilk kez matematik bakış açısıyla yaklaşarak, başlangıç koşullarının Sobolev uzayından alınması durumunda çözümlerin lokal varlığını, başlangıç koşullarının analitik olması durumunda ise çözümlerin global varlığını ispatladı. Birçok yazar u' veya Au' lineer disipative terimlerini içeren denklemlerle konulmuş, başlangıç-sınır değer problemlerinin global çözümlerinin varlığını ve azalma özelliklerini incelemiştir [2],[4]-[6]. Bu çalışmada, $|u'|^{\beta} u'$ lineer olmayan sönüm ve $|u|^{\alpha} u$ kaynak terimiyle konulan denklem için enerji azalma kestirimi incelenecektir.
(1) denkleminin enerjisi;

$$J(u) := \frac{1}{\gamma+1}\left\| A^{1/2} u \right\|^{2(\gamma+1)} - \frac{2}{\alpha+2}\|u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \tag{2}$$

olmak üzere,

$$E(u,u') := \|u'\|^2 + J(u) \tag{3}$$

fonksiyonu ile tanımlıdır. (1) denkleminin $2u'(x,t)$ ile çarpılması ve Ω üzerinden integralinin alınmasıyla enerji eşitliği

$$\frac{d}{dt}E(t) = -2\| u' \|_{\beta+2}^{\beta+2} \tag{4}$$

olarak elde edilir. (1) problemi için K-pozitif kümesi ise

$$W_* := \left\{ u \in D(A) : K(u) \equiv \left\| A^{1/2} u \right\|^{2(\gamma+1)} - \|u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} > 0 \right\} \cup \{0\} \tag{5}$$

ile tanımlıdır.

Şimdi, enerji azalma kestiriminde kullanılacak olan M.Nakao' nun lemması ile Gagliardo-Nirenberg ve Sobolev-Poincaré lemmaları ispatsız verilecektir.

Lemma 1.1. (M.Nakao [3]):

$\Phi(t)$, $[0,\infty)$ aralığında negatif olmayan, artmayan fonksiyon olmak üzere $r > 0$ ve $k > 0$ için

$$\Phi(t)^{1+r} \le k\left\{\Phi(t) - \Phi(t+1)\right\}$$

ise $[t]^{+} = \max\{0,t\}$ olmak üzere, her $t \ge 0$ için

$$\Phi(t) \le \left\{\Phi(0)^{-r} + r\,k^{-1}[t-1]^{+}\right\}^{-1/r}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 1.2. (Gagliardo-Nirenberg [1]):

$1 \le r < p \le \infty$, $p \ge 2$ ve

$$\theta = (\frac{1}{r} - \frac{1}{p})(\frac{1}{r} + \frac{m}{N} - \frac{1}{2})^{-1}$$

olmak üzere, her $v \in D(A^{m/2}) \cap L^r(\Omega)$ için

$$\|v\|_p \le C_* \left\|A^{m/2} v\right\|^{\theta} \|v\|_r^{1-\theta}$$

eşitsizliği bazı C_* sabitleri için geçerli olup burada $0 < \theta \le 1$ ($1 < q < \infty$ ve $m - N/q$ negatif olmayan tamsayı ise $0 < \theta < 1$) dir.

Lemma 1.3. (Sobolev-Poincaré [1]): $0 < p \le 2N/[N-2m]^+$ $(N = 2m$ ise $0 < p < \infty)$ olmak üzere her $v \in D(A^{m/2})$ fonksiyonu için

$$\|v\|_p \le C_{s-p} \left\|A^{m/2} v\right\|$$

eşitsizliği, bazı C_{s-p} sabitler için geçerlidir.

2. ENERJİ AZALIMI

Enerji azalma kestirimine geçmeden önce , azalmayı hesaplamakta yardımcı olacak bir önermeyi ispatlayalım,

Önerme 2.1.

i) $\alpha < 4/[N-4]^+$ ise W_* kümesi $D(A^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$ uzayında sıfırın bir komşuluğudur ve açık kümedir.

ii) $u \in \overline{W_*}$ ise $d_* = \dfrac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{\alpha - 2\gamma}$ ve $\alpha > 2\gamma$ olmak üzere

$$d_*^{-1} \left\|A^{1/2} u\right\|^{2(\gamma+1)} \le J(u) \quad \left(\le E(u,u')\right) \tag{6}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat:

i) Gagliardo-Nirenberg lemmasında $p = \alpha + 2$, $q = 2$, $r = \dfrac{2N}{N-2}$, $m = 2$ seçilmesiyle $\theta = [(N-2)\alpha - 4]^+ / 2(\alpha+2)$ için

$$\|u\|_{\alpha+2} \le c_* \|Au\|^{\theta} \|u\|_{\frac{2N}{N-2}}^{1-\theta}$$

eşitsizliği elde edilir, $\|u\|_{\frac{2N}{N-2}}^{1-\theta}$ terimine Sobolev-Poincaré eşitsizliği $p = \dfrac{2N}{N-2}$, $m = 1$

olmak üzere uygulanırsa

$$\|u\|_{\alpha+2} \le c_* \|Au\|^{\theta} \left\| A^{1/2} u \right\|^{(1-\theta)}$$

yani;

$$\|u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \le c_*^{\alpha+2} \|Au\|^{(\alpha+2)\theta} \left\| A^{1/2} u \right\|^{(1-\theta)(\alpha+2)}$$

eşitsizliği elde edilir. Başka bir deyişle $\theta = \left[(N-2)\alpha - 4\right]^{+} \big/ 2(\alpha+2)$ ve $(\alpha - 2\gamma) - (\alpha+2)\theta > 0$ olmak üzere

$$\|u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \le c_*^{\alpha+2} \|Au\|^{(\alpha+2)\theta} \left\| A^{1/2} u \right\|^{(\alpha-2\gamma)-(\alpha+2)\theta} \left\| A^{1/2} u \right\|^{2(\gamma+1)}$$

yazılabilir. Buradan

$$K(u) = \left\| A^{1/2} u \right\|^{2(\gamma+1)} - \|u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2}$$

$$\ge \left\| A^{1/2} u \right\|^{2(\gamma+1)} \left(1 - c_*^{\alpha+2} \left\| A^{1/2} u \right\|^{(\alpha-2\gamma)-(\alpha+2)\theta} \|Au\|^{(\alpha+2)\theta}\right)$$

eşitsizliği elde edilir ki bu, $u \neq 0$ ve $D(A^{1/2})$ normunun yeterince küçük olması durumunda $K(u)$ 'nun pozitif ve W_* kümesinin sıfırın komşuluğu olduğunu gösterir.

ii) $u \in \overline{W_*}$ ise $K(u) \ge 0$ olacağından

$$\left\| A^{1/2} u \right\|^{2(\gamma+1)} \ge \|u\|_{\alpha+2}^{\alpha+2}$$

eşitsizliği geçerlidir. (2) eşitliğinden

$$J(u) \ge \frac{1}{\gamma+1} \left\| A^{1/2} u \right\|^{2(\gamma+1)} - \frac{2}{\alpha+2} \left\| A^{1/2} u \right\|^{2(\gamma+1)}$$

$$= \frac{(\alpha-2\gamma)}{(\alpha+2)(\gamma+1)} \left\| A^{1/2} u \right\|^{2(\gamma+1)}$$

yani $d_* = \dfrac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{(\alpha-2\gamma)}$ olmak üzere

$$d_*^{-1}\left\|A^{1/2}u\right\|^{2(\gamma+1)} \le J(u) \quad (\le E(u,u'))$$

elde edilir ve bu sonuç (6) eşitsizliğini ispatlarken $E(u,u')\ge 0$ olduğunu da gösterir.

Önerme 2.2. (Enerji Azalma Kestirimi):

$u(x,t)$ fonksiyonu, (1) probleminin çözümü olmak üzere $0\le t\le T$ için

$$u\in\overline{W_*} \text{ ve } K(u)\ge \frac{1}{2}\left\|A^{1/2}u\right\|^{2(\gamma+1)}$$

koşulları altında $r=\dfrac{2\gamma(\beta+1)+\beta}{2(\gamma+1)}$, $k=\dfrac{1}{2}(2c_0)^{(\beta+2)(2\gamma+1)/2(\gamma+1)}$ ve $E(0)\le 1$

olmak üzere

$$E(t)\le\left\{E(0)^{-r}+r\,k^{-1}\left[t-1\right]^{+}\right\}^{-1/r}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: (4) eşitliğinin $\left[t,t+1\right]$ aralığında integralinin alınmasıyla

$$E(t)-E(t+1)=2\int_t^{t+1}\left\|u'\right\|_{\beta+2}^{\beta+2}ds \ \ (\equiv 2\,D(t)^{\beta+2}) \tag{7}$$

elde edilir. $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ olmak üzere

$$\left\|u\right\|_r\le\left|\Omega\right|^{1/q}\left\|u\right\|_p$$

eşitsizliğinden

$$\left\|u'\right\|_2\le\left|\Omega\right|^{\beta/2(\beta+2)}\left\|u'\right\|_{\beta+2}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin, $\left[t,t+1\right]$ aralığında integrali alınır ve (7) eşitliği kullanılacak olursa

$$\int_t^{t+1}\left\|u'\right\|^2 ds\le\left|\Omega\right|^{\beta/(\beta+2)}\int_t^{t+1}\left\|u'\right\|_{\beta+2}^2 ds$$

$$=\left|\Omega\right|^{\beta/(\beta+2)}\,D(t)^2 \tag{8}$$

elde edilir.

$t_1\in\left[t,t+1/4\right]$ ve $t_1\in\left[t+3/4,t+1\right]$ olmak üzere yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafındaki integrale, integral hesabın ortalama değer teoreminin uygulanmasıyla

$$\left\| u'(t_1) \right\| \le 2 \left| \Omega \right|^{\beta / 2(\beta+2)} D(t) \tag{9}$$

ve

$$\left\| u'(t_2) \right\| \le 2 \left| \Omega \right|^{\beta / 2(\beta+2)} D(t) \tag{10}$$

eşitsizliklerine ulaşılır. (1) denkleminin $u(x,t)$ fonksiyonu ile çarpılmasıyla elde edilen denklemin integralinin Ω üzerinden alınması ve $K(u)$ fonksiyonun tanımının göz önünde tutulmasıyla

$$K(u) - \left\| u' \right\|^2 + \frac{d}{dt}(u,u') = -(\left| u' \right|^{\beta} u', u) \tag{11}$$

eşitliğine ulaşılır bu eşitliğin sağ tarafındaki terime, sırasıyla x ve t 'ye göre Hölder eşitsizliğinin uygulanması ve Sobolev-Poincaré eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\int_{t_1}^{t_2} \| u'(s) \|_{\beta+2}^{\beta+1} \| u(s) \|_{\beta+2} \, ds \le c_* \sup \left\| A^{1/2} u(s) \right\| \left(\int_t^{t+1} \| u'(s) \|_{\beta+2}^{\beta+2} ds \right)^{\beta+1 / \beta+2}$$

eşitsizliği elde edilir. $(u(s), u'(s)) \Big|_{t_1}^{t_2}$ teriminde, sınırların yerine yazılması, Cauchy-Schwarz ve Sobolev-Poincaré eşitsizliklerinin uygulanmasıyla;

$$\int_{t_1}^{t_2} K(u) \, ds \le \int_{t_1}^{t_2} \left\| u' \right\|^2 ds + c_* \sup \left\| A^{1/2} u(s) \right\| \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left\| u'(t_i) \right\| + \left(\int_t^{t+1} \| u'(s) \|_{\beta+2}^{\beta+2} ds \right)^{\beta+1 / \beta+2} \right\} \tag{12}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$K(u) \ge \frac{1}{2} \left\| A^{1/2} u \right\|^{2(\gamma+1)}$$

özelliğinden

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left\| A^{1/2} u(s) \right\|^{2(\gamma+1)} ds \le \int_{t_1}^{t_2} \left\| u' \right\|^2 ds$$
$$+ c_* \sup \left\| A^{1/2} u(s) \right\| \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left\| u'(t_i) \right\| + \left(\int_t^{t+1} \| u'(s) \|_{\beta+2}^{\beta+2} ds \right)^{\beta+1 / \beta+2} \right\} \tag{13}$$

sonucuna varılır. (4) eşitliğinin $[\, t, t_2 \,]$ aralığında integralinin alınmasıyla

$$E(t) = E(t_2) + 2 \int_t^{t_2} \left\| u' \right\|_{\beta+2}^{\beta+2} ds$$

$$\le 2 \int_{t_1}^{t_2} E(s)\,ds + 2\int_{t}^{t_2} \|u'(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}\,ds$$

elde edilir. (2) ve (3) eşitlikleri ve (13) eşitsizliği yardımıyla elde edilen

$$E(t) \le 2\int_{t_1}^{t_2} \|u'(s)\|^2\,ds + \frac{2}{\gamma+1}\int_{t_1}^{t_2} \left\|A^{1/2}u(s)\right\|^{2(\gamma+1)} ds + 2\int_{t}^{t+1} \|u'(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}\,ds$$

$$\le 4\int_{t_1}^{t_2} \|u'\|^2\,ds + 2\,c_* \sup \left\|A^{1/2}u(s)\right\| \left\{ \sum_{i=1}^{2} \|u'(t_i)\| + \left(\int_{t}^{t+1} \|u'(s)\|_{\beta+2}^{\beta+2}\,ds\right)^{\beta+1/\beta+2} \right\} + 2\int_{t}^{t+1} \|u'\|_{\beta+2}^{\beta+2}\,ds$$

eşitsizliğinin (8) eşitsizliği yardımıyla yeniden yazılmasıyla

$$E(t) \le 4|\Omega|^{\beta/\beta+2} D(t)^2 + 2\,c_* \sup \left\|A^{1/2}u(s)\right\| \left\{ \sum_{i=1}^{2} \|u'(t_i)\| + D(t)^{\beta+1} \right\} + 2D(t)^{\beta+2}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (9) ve (10) eşitsizliklerinin kullanılması ile de

$$E(t) \le 4|\Omega|^{\beta/\beta+2} D(t)^2 + 2D(t)^{\beta+2} + 2\,c_* \sup \left\|A^{1/2}u\right\| \left\{ 4|\Omega|^{\beta/2(\beta+2)} D(t) + D(t)^{\beta+1} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. $B_0 = |\Omega|^{\beta/\beta+2}$ (≥ 1) kabulü altında

$$E(t) \le 4\,B_0\, D(t)^2 + 2\,D(t)^{\beta+2} + 2\,c_* \sup \left\|A^{1/2}u\right\| \left\{ 4\,B_0\, D(t) + D(t)^{\beta+1} \right\}$$

şeklinde elde edilen eşitsizliğe (6) eşitsizliğinin uygulanması ile

$$E(t) \le 4\,B_0\, D(t)^2 + 2\,D(t)^{\beta+2} + 2\,c_* \,(d_*\, E(t))^{1/2(\gamma+1)} \left\{ 4\,B_0\, D(t) + D(t)^{\beta+1} \right\}$$

sonucuna varılır. $B_0 \ge 1$, $c_* \ge 1$ ve

$$2\,D(t)^{\beta+2} \le E(t) \le E(0) \le 1 \tag{14}$$

özellikleri hatırlanarak eşitsizlik tekrar düzenlenecek olursa

$$E(t) \le 6\,B_0\, D(t)^2 + 10\, c_* B_0\, D(t)\,(d_*\, E(t))^{1/2(\gamma+1)}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin sol tarafındaki son terime Young eşitsizliği uygulanacak olursa

$$E(t) \le 6\,B_0\, D(t)^2 + \frac{2\gamma+1}{2(\gamma+1)}\, d_*^{1/2\gamma+1} (10\, c_* B_0\, D(t))^{2(\gamma+1)/2\gamma+1} + \frac{1}{2} E(t)$$

elde edilir. $D(t)^2 = D(t)^{\frac{2\gamma}{2\gamma+1}} D(t)^{\frac{2(\gamma+1)}{2\gamma+1}}$ olarak yazılabileceğinden (14)'den elde edilen $D(t)^{\frac{2\gamma}{2\gamma+1}} \leq \left(\frac{E(0)}{2}\right)^{\frac{2\gamma}{(2\gamma+1)(\beta+2)}}$ eşitsizliği yardımıyla

$$c_0 \equiv \left\{ 6\, B_0 \left(\frac{E(0)}{2}\right)^{\frac{2\gamma}{(2\gamma+1)(\beta+2)}} + \frac{2\gamma+1}{2(\gamma+1)}\, d_*^{1/2\gamma+1} (10\, c_* B_0)^{2(\gamma+1)/2\gamma+1} \right\}$$

olmak üzere,

$$E(t) \leq 2\, c_0\, D(t)^{\frac{2(\gamma+1)}{2\gamma+1}}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlik ve (7) eşitliği yardımı ile de

$$E(t)^{1+\frac{2\gamma(\beta+1)+\beta}{2(\gamma+1)}} \leq (2\, c_0)^{\frac{(\beta+2)(2\gamma+1)}{2(\gamma+1)}} \frac{1}{2}\big[E(t) - E(t+1)\big]$$

sonucuna varılır. Burada

$$k = \frac{1}{2}(2\, c_0)^{\frac{(\beta+2)(2\gamma+1)}{2(\gamma+1)}} \quad , \quad r = \frac{2\gamma\,(\beta+1)+\beta}{2\,(\gamma+1)}$$

denilirse, Nakao'nun Lemmasından (Lemma 1.1)

$$E(t) \leq \left\{ E(0)^{-r} + r\, k^{-1} \big[t-1\big]^{+} \right\}^{-\frac{1}{r}} \tag{15}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu, (1) problemi için istenilen enerji azalma kestirimidir.

3. SONUÇ

Burada Kirchhoff denklemiyle konulan (1) başlangıç-sınır değer problemi için enerji azalma kestirimi, M. Nakao' nun bilinen lemması kullanılarak (15) yapısında elde edilmiştir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada desteğini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Gülseren Aydın' a teşekkürü bir borç bilirim. Bu çalışma, M.S.G.S.Ü Bilimsel Araştırma Projeleri Başkanlığı tarafından 200408 nolu proje olarak desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Evans, L.C., “Partial Differential Equations” , American Mathematical Society, Rhode Island, 1998.
[2] Nakao, M., ”Decay of Solutions of Some Nonlinear Evolution Equations”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 60,s.542-549, 1977.
[3] Nakao, M., “A Difference İnequality and Its Application to Nonlinear Evolution Equations”, J. Math. Soc. Japan. 30, s.747-762, 1978.
[4] Nıshıhara, K. and Yamada, Y., ”On Global Solutions of Some Degenerate Quasilinear Hyperbolic Equations with Dissipative Terms”, Funkcial. Ekvac. 33 (1),s.151-519, 1990.
[5] Ono, K., ”Global Existence, Decay and Blow uo of Solutions for Some Mildly Degenerate Nonlinear Krichhoff Strings”, Journal of Differential Equations, 137, s.273-301, 1997.
[6] Ono, K., ”On Global Existence, Asymptotic Stability and Blowing Up of Solutions for Some Degenerate Non-Linear Wave Equations of Kirchhoff Type with a Strong Dissipation”, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 20, s. 151-177, 1997.