SDU Journal of Science (E-Journal), 2016, 11 (2): 109-120

Standart ve Standart Olmayan Theta Metotlarının Bazı Uygulamaları ve Sonuçları

Fatih ER*[1] Mevlüde YAKIT ONGUN[2]

[1]Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D. Doğu Yerleşkesi, Çünür, Isparta

*mathsfatiher@gmail.com

[2]Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Doğu Yerleşkesi, Çünür, Isparta

Alınış: 09 Aralık 2015, Kabul: 22 Eylül 2016

Özet: Bu çalışmada Adi Diferansiyel Denklemlerin nümerik çözüm metotlarından biri olan Theta Metodu araştırıldı. Mickens'in ortaya koyduğu Standart Olmayan Sonlu Fark Metotlarının bakış açısıyla bazı teoremler ve uygulamalar verildi. Bununla beraber, Standart ve Standart Olmayan Thata Metotları diğer klasik metotlar ile karşılaştırılarak güvenilirlikleri test edildi.

Anahtar Kelimeler: Theta Metodu, Diferansiyel Denklemler, Nümerik Metotlar

Some Results and Applications of Standard and Non-standard Theta Methods

Abstract: In this paper, The Theta Method which is one way of the numerical solution method of ordinary differential equations was investigated. Some theorems and applications were given from the point of non-standard finite difference methods discovered by Mickens. Moreover, the performance of the Standard and Non-standard Theta method was tested by comparing with other classical numerical methods.

Keywords: Theta Method, Differential Equations, Numerical Methods

1. Giriş

Günümüzde adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için oldukça fazla çalışma yapılmaktadır. Özellikle lineer olmayan diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulmaktaki güçlük ve bu tip diferansiyel denklemleri çözen tam kesin bir yöntem bulunmamasından nümerik bazı yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Literatürde yer alan bazı klasik yöntemlerin genel durumunu ifade eden ve Theta metodu olarak adlandırılan tek adımlı metotla ilgili Barclay [11], Theta'nın durumlarına göre, çok terimli çözümlerin kararlılıklarını incelemiştir. İlk olarak Mikens [1] tarafından tanımlanan ve standart olmayan sonlu fark metodu olarak adlandırılan (NSFD) yeni bir yöntemle, özellikle lineer olmayan terimlerin, verilen diferansiyel denklemin dinamik özelliklerini koruyacak şekilde keyfi ayrıklaştırılmasına ve denominatör fonksiyonun keyfi seçimine imkan vermesi açısından son yıllarda oldukça fazla çalışmalar yapılmaktadır [2,3,8,9,10].

Roux [5], spektral Theta metotlarını tanımlayıp lineer difüzyon problemlerine uygulamıştır. Roux ve Lubuma [4], Theta ve Mickens yöntemini birlikte kullanarak, standart olmayan Theta metodu olarak adlandırılan yeni yaklaşımın elementary kararlılık (E-stable) durumunu incelemiştir. NSFD yönteminin dissipatifliği ilk defa

Kama [3] tarafından incelenmiştir. Farago [7] ile NSFD nin tutarlılık ve yakınsaklık sabitleri üzerinde durmuştur.

Bu makalede ele alınan adi diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dt} = f(y), y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

şeklindeki başlangıç değer problemidir. Burada $y(0) \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ şeklindedir. Ayrıca f fonksiyonunun Lipschitz koşulunu sağladığını yani (1) eşitliğinin bir tek çözümünün olduğu kabul edilmektedir.

Bu çalışmanın amacı, (1) başlangıç değer probleminin farklı noktalardaki analitik çözümlerine $\theta \in [0,1]$ bir parametre ve Δt adım uzunluğu olmak üzere Standart Theta Metodunu;

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \theta f(y_{n+1}) + (1-\theta) f(y_n) \tag{2}$$

ve $\varphi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty), \varphi(\Delta t) = \Delta t + O((\Delta t)^2)$ koşulunu sağlayan denominatör fonksiyon olmak üzere Standart Olmayan Theta Metodunu;

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\varphi(\Delta t)} = \theta f(y_{n+1}) + (1-\theta) f(y_n) \tag{3}$$

kullanılarak yaklaşık çözümler elde etmektir. Ayrıca çalışmanın genelinde standart olmayan Theta metodunun, standart Theta metoduna oranla daha güvenilir olduğunun gösterilmesi amaçlanmıştır.

2. Tanımlar

Tanım 2.1. $k \geq 1, \alpha_k = 1\ ve |\alpha_k| + |\beta_k| > 0$ olmak üzere

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, n = 0,1,2,\ldots \tag{4}$$

şeklinde tanımlı metoda Lineer çok adımlı (k-step) metot denir.

Lineer çok adımlı metotların birinci ve ikinci karakteristik polinomları sırasıyla

$$\rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j, \sigma(z) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j z^j \tag{5}$$

denklemleri ile tanımlanır [6].

Not 2.2. (4) denklemindeki katsayılara $\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 1, \beta_0 = 1-\theta, \beta_1 = \theta$ değerleri verilip denklem tekrar düzenlenirse, lineer çok adımlı metottan theta metoduna geçiş yapılmış olur. Ayrıca Theta metodunun birinci ve ikinci karakteristik polinomları sırasıyla

$$\rho(z) = z - 1, \sigma(z) = \theta z - 1 - \theta \tag{6}$$

şeklindedir.

Tanım 2.3. $\pi(r,\lambda\Delta t)$ kararlılık polinomunu göstermek üzere

$$\boldsymbol{\pi(r,\lambda\Delta t)=\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\lambda\Delta t\beta_j)r^j} \tag{7}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca lineer çok adımlı metotların birinci ve ikinci karakteristik polinomları kullanılarak

$$\boldsymbol{\pi(r,h)=\rho(r)-h\sigma(r),\qquad h=\lambda\Delta t} \tag{8}$$

şeklinde de gösterilebilir [3].

Tanım 2.4. Eğer (7) kararlılık polinomunun bütün kökleri birim çember içinde kalıyorsa, (4) nümerik metoduna mutlak kararlı (absolute stable ya da A-stable) denir. Aksi taktirde (4) nümerik metodu mutlak kararlı değil (absolute unstable) şeklinde adlandırılır. Ayrıca eğer R_A bölgesindeki her $\lambda\Delta t$ için (4) nümerik metodu A-stable ise, kompleks düzlemin alt kümesi olan R_A bölgesine mutlak kararlılık bölgesi (region of A-stability) denir [3].

Tanım 2.5. (5) denklemindeki birinci ve ikinci karakteristik polinomlar

$$\boldsymbol{\rho(1)=0,\quad \sigma(1)=\rho'(1)\neq 0} \tag{9}$$

şartlarını sağlıyorsa, (4) nümerik metoduna tutarlı (consistent) denir. Ayrıca birinci karakteristik polinom olan $\rho(z)$ nin köklerinin mutlak değerleri bir ve birden küçükse, (4) nümerik metodu zero kararlı (zero-stable) denir [3].

3. Theta Metotları

3.1. Standart Theta Metodu

Tanım 3.1.1. $\theta\in[0,1]$ bir parametre olmak üzere tek adımlı Theta metodu;

$$\boldsymbol{\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta t}=f(\theta y_{n+1}+(1-\theta)y_n)} \tag{10}$$

ve iki adımlı Theta metodu;

$$\boldsymbol{\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta t}=\theta f(y_{n+1})+(1-\theta)f(y_n)} \tag{11}$$

şeklinde tanımlanır [3,4].

Bu eşitliklerde θ'nın özel değerleri için klasik nümerik metotlar elde edilir. Örneğin;

$$\boldsymbol{\theta=0\ \Rightarrow y_{n+1}-y_n=\Delta t f(y_n)} \tag{12}$$

Explicit (açık) Euler Metodu,

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \Rightarrow \boldsymbol{y_{n+1}} - \boldsymbol{y_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\Delta \boldsymbol{t}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y_{n+1}}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y_n})] \tag{13}$$

Trapezoid (yamuk) Method,

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{y_{n+1}} - \boldsymbol{y_n} = \Delta \boldsymbol{t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y_{n+1}}) \tag{14}$$

Implicit (kapalı) Euler metotları elde edilir.

Not 3.1.2. Standart Theta Metodu $\theta = 0$ için explicit (açık), $\theta \neq 0$ için implicit (kapalı) bir metottur.

Aşağıda yer alan Teorem 3.1.3 ile $\theta \neq 0$ ve $\theta \neq 1$ olduğunda tek adımlı ve iki adımlı theta metotları arasındaki ilişki verilmiştir.

Teorem 3.1.3. $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi tek adımlı Theta metodunu (10) sağlasın. O zaman

$$\boldsymbol{y_n} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{v_n} + \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{v_{n+1}} \tag{15}$$

denklemini sağlayan $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi de iki adımlı Theta metodunu (11) sağlar.
Tam tersine, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi iki adımlı Theta metodunu (11) sağlasın. O zaman

$$\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{y_n} - \Delta \boldsymbol{t}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y_n}) \tag{16}$$

denklemini sağlayan $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi de tek adımlı Theta metodunu (11) sağlar [3].

Tek adımlı ve iki adımlı Theta metotlarının lokal kesme hataları sırasıyla

$$\boldsymbol{\tau_n} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{y_{n+1}} - \boldsymbol{y_n}}{\Delta \boldsymbol{t}} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{y_{n+1}} + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{y_n}) \\ \dfrac{\boldsymbol{y_{n+1}} - \boldsymbol{y_n}}{\Delta \boldsymbol{t}} - \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y_{n+1}}) - (\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y_n}) \end{cases} \tag{17}$$

ve asimptotik davranışları ise

$$\boldsymbol{\tau_n} = \begin{cases} \boldsymbol{O}(\Delta \boldsymbol{t}), & \boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{1/2} \\ \boldsymbol{O}((\Delta \boldsymbol{t})^{\mathbf{2}}), & \boldsymbol{\theta} = \mathbf{1/2} \end{cases} \tag{18}$$

şeklindedir. Bu tanımlar $t = t_n$ civarında $y(t_{n+1})$ in Taylor seri açılımı kullanılarak elde edilmiştir [3].

Teorem 3.1.4. (1) başlangıç değer problemine yaklaşmak için kullanılan tek adımlı ve iki adımlı Theta metotları yakınsaktır.

İspat 3.1.4. Theta metodunun birinci ve ikinci karakteristik polinomları (6) denklemiyle verilmişti. (6) denklemi kullanılarak theta metodunun tutarlı ve zero-kararlı olduğu kolayca bulunabilir. Ayrıca eğer bir nümerik metot tutarlı ve zero-kararlı ise yakınsaktır. O zaman standart theta metodu da yakınsaktır [5].

3.2. Standart Olmayan Theta Metodu

Tanım 3.2.1. $D_{\Delta t}y_n = F_{\Delta t}(f; y_n)$ fark denklemi aşağıdaki şartlardan en az birini sağlarsa sonlu fark metodu olarak adlandırılır:

- $D_{\Delta t}y_n$ ayrık türevinde, $\varphi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ denominatör fonksiyon olmak üzere

$$\boldsymbol{\varphi(\Delta t) = \Delta t + O((\Delta t)^2)} \quad (19)$$

şeklindedir.

(Ör. $\varphi(\Delta t) = 1 - e^{-\Delta t}$, $\varphi(\Delta t) = \frac{e^{\Delta t}-1}{\lambda}$)

- $F_{\Delta t}(f; y_n)$ ifadesinde lineer olmayan terimler yerine lokal olmayan terimler kullanılabilir.

(Ör.$y^2(t_n) \sim y_{n+1}y_n$, $y^2(t_n) \sim 2y_n\frac{y_{n+1}+y_n}{2}$, $y^2(t_n) \sim 2y_{n+1}y_n - y_n^2, \ldots$)

Mickens standart olmayan sonlu fark metodu için bazı kurallar tanımlamıştır[1,8]:

1. Ayrık türevlerin mertebeleri, diferansiyel denklemin mertebesi ile aynı olmalıdır.
2. Ayrık türevlerde olan denominatör fonksiyonlar, alışılmış kullanımdan ziyade adım uzunluğuna bağlı daha komplike terimlere açılarak elde edilir.
3. Lineer olmayan terimler genellikle lokal olmayan ayrık gösterimlere sahiptir.
4. Diferansiyel denklemin özel çözümleri aynı zamanda sonlu fark modellerinin özel çözümleri olmalıdır.
5. Sonlu fark denklemlerinin, diferansiyel denklemin çözümlerine benzemeyen çözümleri olmamalıdır.

Denominatör fonksiyonunun bulunmasında kullanılan bazı prosedürler vardır. Bunlar şu şekildedir [2]:

1. Sonlu fark Euler metodu kullanılarak birinci mertebeden türevler sonlu fark modeli olarak yazılır.
2. Taylor açılımı kullanılarak adım uzunluğu olan Δt değeri bulunur.
3. Bulunan bu Δt değeri denominatör fonksiyonu olarak adlandırılır ve üstel, trigonometrik, logaritmik, vb. fonksiyonlardan oluşabilir.
4. Eğer ayrıklaştırdığımız denklem $1 + \alpha\Delta t$ şeklinde ise denominatör fonksiyonu $\varphi(\Delta t, \lambda) = \frac{e^{\Delta t}-1}{\lambda}$ şeklinde seçilebilir.
5. $\lambda = 0$ olduğu durumda denominatör fonksiyonu $\varphi(\Delta t) = \Delta t$ olarak seçilir.

Tanım 3.2.2. $\varphi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$, $\varphi(\Delta t) = \Delta t + O((\Delta t)^2)$ şeklinde tanımlı denominatör fonksiyon ve Δt adım uzunluğu olmak üzere

$$\boldsymbol{\frac{y_{n+1} - y_n}{\varphi(\Delta t)} = \theta f(y_{n+1}) + (1-\theta) f(y_n)} \quad (20)$$

şeklindeki fark denklemine Standart Olmayan Theta Metodu denir.

Tek adımlı ve iki adımlı standart olmayan theta metotlarının lokal kesme hataları sırasıyla

$$\boldsymbol{\tau_n = \begin{cases} \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\varphi(\Delta t)} - f(\theta y_{n+1} + (1-\theta) y_n) \\ \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\varphi(\Delta t)} - \theta f(y_{n+1}) - (1-\theta) f(y_n) \end{cases}} \quad (21)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.3. $\tilde{y}$, (1) başlangıç değer probleminin sabit noktası olmak üzere,
$lim_{t\to\infty}\,\varepsilon(t) = 0$ yada her $\lambda \in \sigma(J)$ için $Re(\lambda) < 0$
şartları sağlanıyorsa, $\tilde{y}$ sabit noktası lineer kararlıdır denir. Aksi taktirde lineer kararlı değildir. Burada $\varepsilon(t)$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = J\varepsilon, \qquad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$$

lineerleştirilmiş sisteminin çözümü, $\sigma(J)$ ise

$$J = Jf(\tilde{y}) = \left(\frac{\delta(f^i(\tilde{y}))}{\delta y^i}\right)_{1\le i,j\le n}$$

jakobyen matrisinin spektrumudur [4].

Tanım 3.2.4. Her Δt adım uzunluğu için, (1) başlangıç değer probleminin lineer kararlılık özellikleri ile (20) standart olmayan Theta metodunun lineer kararlılık özellikleri aynı ise, o zaman (20) standart olmayan Theta metoduna elementary stable (E-kararlı) denir [4].

Teorem 3.2.5. Standart Theta metodu sadece $\theta = 1/2$ için E-kararlıdır.

E-kararlı standart olmayan Theta metodunu şu şekilde tanımlayabiliriz:

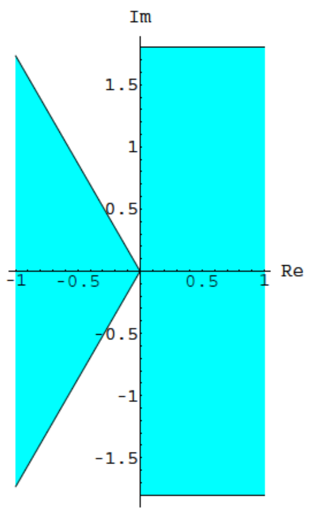
$$\frac{\boldsymbol{y_{k+1} - y_k}}{\frac{\boldsymbol{\varphi(q\Delta t)}}{\boldsymbol{q}}} = \boldsymbol{\theta f_{k+1} + (1-\theta) f_k}, \qquad \boldsymbol{k = 0, 1, 2, \ldots} \tag{22}$$

Burada $\varphi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$, $\cup_{\{\tilde{y}\in\mathbb{R}: f(\tilde{y})=0\}}\sigma(Jf(\tilde{y}))$ ve $\lambda \in E$ olmak üzere $q \ge max|\lambda|$ şeklindedir [3].

Teorem 3.2.6. $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için, eğer $E \subseteq W_l$;

$$W_l = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda < 0, \arg\lambda \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]\right\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > 0\}$$

ise standart olmayan Theta metodu E-kararlıdır[3].

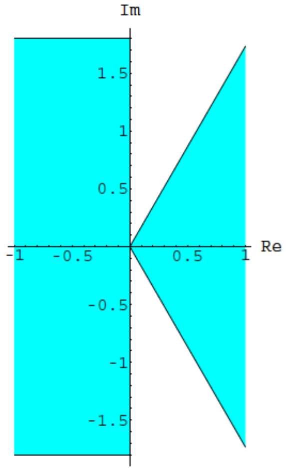


Şekil 1: θ∈[0,1/2) için $\boldsymbol{W_l}$ bölgesi

Teorem 3.2.7. $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ için, eğer $E \subseteq W_r$;

$$W_r = \{\lambda \in \mathbb{C}: Re\lambda < 0\} \cup \left\{\lambda \in \mathbb{C}: Re\lambda > 0, \arg\lambda \in \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]\right\}$$

ise standart olmayan Theta metodu E-kararlıdır [3].



Şekil 2: $\boldsymbol{\theta} \in \left[\frac{1}{2}, \mathbf{1}\right]$ için $\boldsymbol{W_r}$ bölgesi

Tanım 3.2.8. $\lambda \in \sigma(J), Re\lambda < 0, \Delta t > 0$ ile verilen herhangi bir $\lambda\Delta t$ için

$$\boldsymbol{r} = \frac{\mathbf{1} + \frac{\varphi(q\Delta t)}{q}(\mathbf{1} - \boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{1} - \frac{\varphi(q\Delta t)}{q}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\lambda}} \quad (23)$$

olmak üzere $|r| < 1$ şartı sağlanıyorsa standart olmayan Theta metodu absolute elementary kararlıdır denir [3].

Tablo 1: Standart ve Standart Olmayan Theta Metotlarının Bazı Özel $\boldsymbol{\theta}$ Değerlerine Karşılık Kararlılık Durumları

	Açık Theta Metodu ($\theta = 0$)		Kapalı Theta Metodu			
			$\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$		$\theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$	
	Standart	Standart Olmayan	Standart	Standart Olmayan	Standart	Standart Olmayan
Temel Kararlılık	Hayır	Evet	Hayır	Evet	Hayır	Evet
Mutlak Temel Kararlılık	Hayır	Hayır	Hayır	Hayır	Evet	Evet

4. Örnekler

4.1. Lojistik Denklem

Lojistik diferansiyel denklem

$$y' = 25y(1-y), \qquad y(0) = y_0 \tag{24}$$

denklemiyle verilsin. (24) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1-y_0)e^{-25\Delta t}} \tag{25}$$

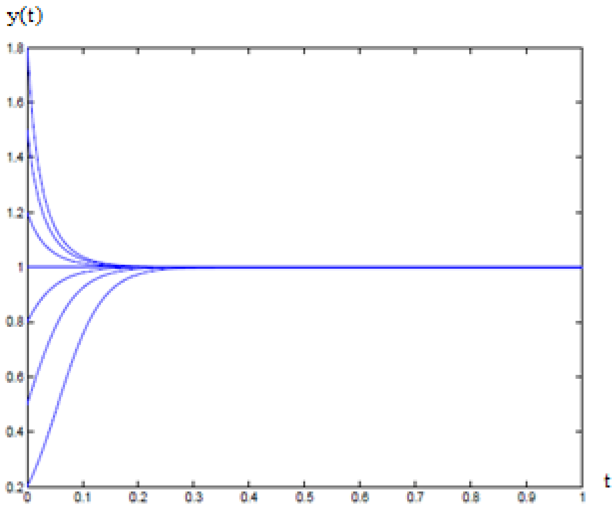
şeklindedir. (11) ve (20) eşitliklerinde $\theta = 0$ yazılıp lojistik başlangıç değer problemine uygulandığında standart Euler metodu

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\varphi(\Delta t)} = 25y_n(1-y_n) \tag{26}$$

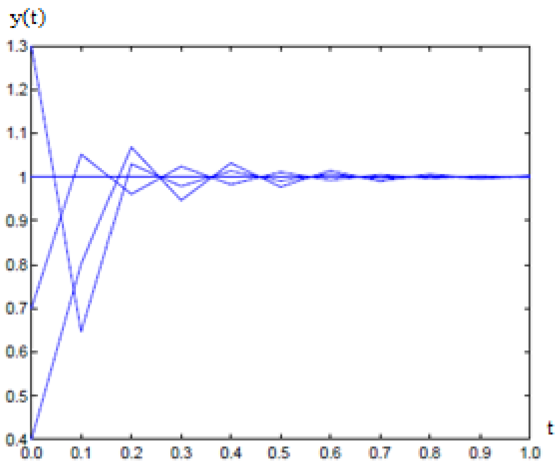
şeklinde, standart olmayan Euler metodu ise

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\frac{1-e^{-25\Delta t}}{25}} = 25y_n(1-y_n) \tag{27}$$

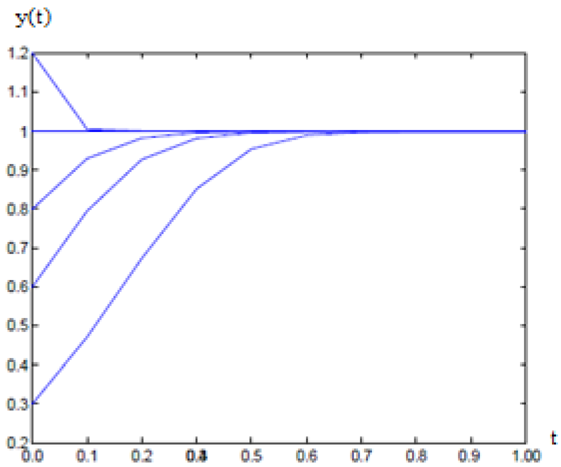
şeklindedir [3].



Şekil 3: Lojistik Diferansiyel Denklemin Farklı Başlangıç Koşulları ile Verilen Çözümlerinin Grafiği



Şekil 4: Lojistik Diferansiyel Denklemin Standart Euler Metodu ile Nümerik Çözümleri



Şekil 5: Lojistik Diferansiyel Denklemin Standart Olmayan Euler Metodu ile Nümerik Çözümleri

4.2. Üstel Büyüme Denklemi

Üstel büyüme denklemi

$$\mathbf{y}' = \mathbf{3y}, \qquad \mathbf{y}(\mathbf{0}) = \mathbf{7} \tag{28}$$

denklemiyle verilsin. (28) denkleminin genel çözümü

$$\boldsymbol{y(t) = 7e^{3x}} \tag{29}$$

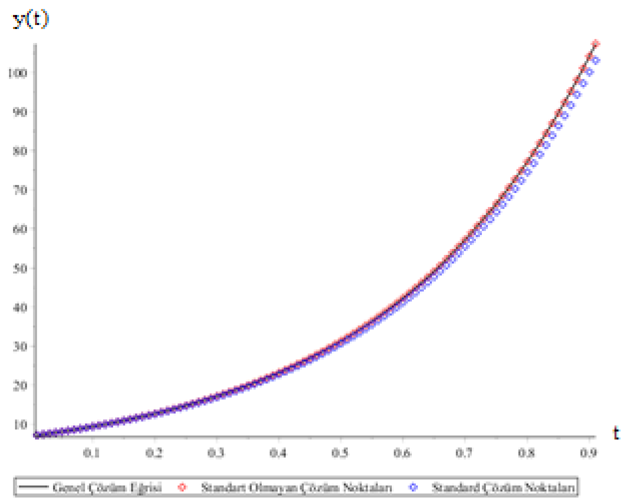
şeklindedir. (28) denklemi (11) ve (20) denklemlerine uygulandığında standart Theta metodunun şeması

$$\boldsymbol{\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = 3\theta y_{n+1} + 3(1-\theta)y_n} \tag{30}$$

şeklinde, standart olmayan Theta metodunun şeması ise

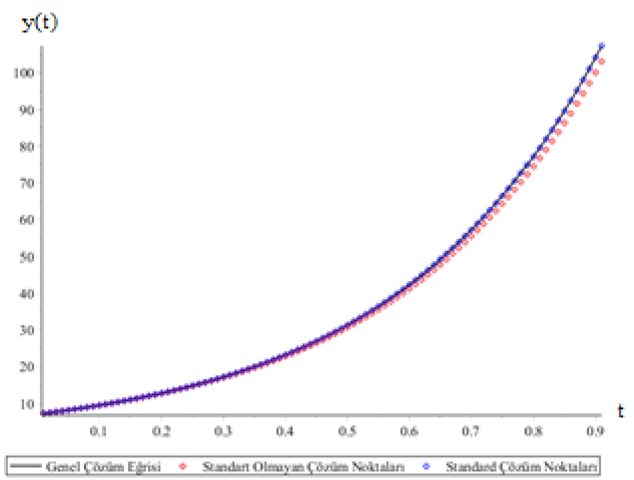
$$\boldsymbol{\frac{y_{n+1} - y_n}{\varphi(\Delta t)} = 3\theta y_{n+1} + 3(1-\theta)y_n} \tag{31}$$

şeklindedir.
$\theta = 0$ için;



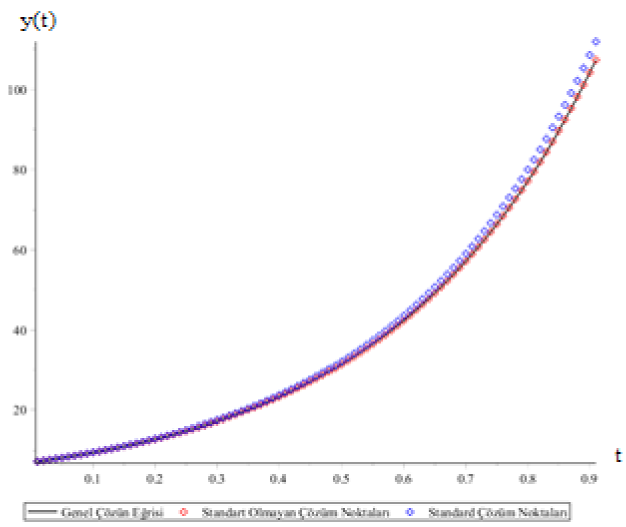
Şekil 6: Δt = 0.01 için Standart ve Standart Olmayan Euler Metotlarının Karşılaştırılması

$\theta = \frac{1}{2}$ için;



Şekil 7: Δt = 0.01 için Standart ve Standart Olmayan Trapezoid Metotlarının Karşılaştırılması

$\theta = 1$ için;



Şekil 8: Δt = 0.01 için Standart ve Standart Olmayan Implicit Theta Metotlarının Karşılaştırılması

5. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada Theta metodu ile ilgili literatürdeki bazı tanım ve teoremlere yer verilip, Mickens'in standart olmayan sonlu fark metotları olarak adlandırılan nümerik yaklaşım yönteminden yola çıkılarak, Standart olmayan Theta metodu tanımlanmış ve bazı teoremlerle kararlılık çeşitleri ile ilgili teoremler verilmiştir. Farklı $\theta \in [0,1]$ değerleri için kararlılık çeşitleri Tablo 1 ile listelenmiştir. Şekil 1 ve Şekil 2 ile standart olmayan Theta metodunun kararlılık bölgelerinin nasıl değiştiği gösterilmiştir.
Şekil 3, Şekil 4 ve Şekil 5 farklı başlangıç değerlerine (y_0) göre çizdirilmiş grafiklerdir. Şekil 4 ve Şekil 5 karşılaştırıldığında; Şekil 5 in yani, standart olmayan Theta metodu ile çizdirilen grafiğin, Şekil 4'ten yani, standart Theta metodu ile çizdirilen grafikten daha hızlı ve daha güvenilir sonuç verdiği net bir şekilde görülebilmektedir.

Şekil 6, Şekil 7 ve Şekil 8 ile üstel büyüme modeline karşılık gelen başlangıç değer probleminin bazı özel Theta değerlerine ait standart ve standart olmayan sayısal çözümlerinin genel çözüm ile karşılaştırmalı grafikleri verilmiştir. Standart olmayan Theta metodu ile çözümlerin genel çözüme daha yakın çözümler verdiği gözlemlenebilir.

Sonuç olarak standart olmayan Theta metodu diye adlandırılan sayısal yaklaşım yönteminin, lineer olmayan başlangıç değer problemlerinin çözümü yapılırken lineer olmayan terimlerin lokal olmayan terimler ile keyfi yer değiştirmesine ve denaminatör fonksiyonun keyfi seçimine bağlı olarak, çözümlerin pozitifliğini sağlayacak şekilde serbestlik tanımasından dolayı diğer klasik sayısal yaklaşım yöntemlerine göre daha çok tercih edilebilir olduğu açıktır.

Teşekkür

Bu çalışmayı SDÜ-BAP 4070-YL1-14 numaralı proje kapsamında maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkürler ederiz.

Kaynaklar

[1] Mickens, R. E., 1994. Nonstandart Finite Difference Models of Differential Equations, World Scientific Publishing Company Inc. River Edge, New Jersey.

[2] Mickens, R.E., 2007. Calculation of Denominator Functions for Non-standard Finite Difference Schemes for Differential Equations Satisfying a Positivity Condition. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 23, pp. 672-691.

[3] Kama, P.,2009, Non-standard Finite Difference Methods in Dynamical Systems. University of Pretoria, Philosophie Doctor, Pretoria, p. 49.

[4] Lubuma, J.M., A. Roux, 2003, An Improved Theta Method for Systems of Ordinary Differential Equations, Journal of Difference Equations and Applications, pp. 1023-1035.

[5] Roux, A., 2002. Fourier Series and Spectral-Finite Difference Methods for the General Linear Diffusion Equation, 28 January 2002, Pretoria, p. 45.

[6] Suli, E., 2010. Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, 12 August 2010, pp. 21-53.

[7] Farago, I., 2013. Convergence and Stability Constants of the Theta Method, Conference Applications of Mathematics, 186, pp. 42-51.

[8] Arslan, D., Ongun, M. Y., Turhan, İ., 2011. Standart Olmayan Sonlu Fark Yönteminin Fuzzy Diferansiyel Denklemlere Uygulanması, III. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksekokulu Tebliğ Günleri, Sayı 3, No:1.

[9] Ongun,M.Y., Turhan,I.,2013, A numerical comparison for a discrete HIV infection of $CD4^{+}T$-cells model derived from non-standard numerical scheme, Journal of Applied Mathematics, Special Issue:Iterative Methods for Nonlinear Equations or Systems and Their Applications (IMNES), Vol.2013, Article ID 375094, 9 pages doi:10.1155/2012/375094

[10] Ongun,M.Y.,Arslan,D.,Garrappa,R., 2013,Non-standard Finite Difference Schemes for fractional order Brusselator system, Advances in Difference Equations,doi:10.1186/1687-1847-2013-102.

[11] Barclay G. J., Griffiths D. F., Higham D.J., 2000, Theta Method Dynamics, LMS J. Comput. Math. 3, pp. 27–43.

Yazarların e-mail Adresleri

mevludeyakit@sdu.edu.tr