SDÜ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
FEN DERGİSİ (E-DERGİ). 2008, 3(1), 60-71

DOUBLE TANJANT DEMET ÜZERİNE YÜKSELTMELER

İsmet AYHAN*, A. Ceylan ÇÖKEN, Şevket CİVELEK*****

* P.A.Ü. Eğitim Fakültesi, Fen Bilgisi Öğretmenliği A.B.D., Denizli, Türkiye
** S.D.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 32260, Isparta, Türkiye
*** P.A.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 20020, Denizli, Türkiye
e-mail: iayhan@pau.edu.tr, ceylan@fef.sdu.edu.tr, scivelek@pau.edu.tr
Alınış: 10 Mayıs 2007, Kabul: 24 Ekim 2007

Özet: Bu çalışmada, diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde tanımlı fonksiyon, vektör alanı ve 1-form gibi temel tensör alanlarının double tanjant demet üzerine yükseltilmişleri elde edildi.

Anahtar kelimeler: Sasaki-Riemann metriği, double tanjant demet, Levi-Civita koneksiyonu

LIFTS ON DOUBLE TANGENT BUNDLE

Abstract: In this paper, it is obtained lifts from a differentiable manifold has basic tensor fields ie function, vector field, 1-form to its double tangent bundles.

Key words: Sasaki-Riemannian metric, the double tangent bundle, Levi-Civita connection

Mathematics Subject Classification Number (2000): 53C07, 53C50

1. GİRİŞ

SASAKİ (1958), diferensiyellenebilir bir manifold üzerindeki vektör alanı, 1-form, (2,0) tipindeki tensör alanlarının tam yükseltilmişlerini genişletilmiş tensörler olarak tanımladı ve manifold üzerinde tanımlı bu vektör alanı ve 1-formun tanjant demet üzerine dikey ve yatay yükseltilmişlerini bileşenler cinsinden verdi. DOMDROWSKİ (1962), TM'nin tanjant uzayından, M'nin tanjant uzayına türev dönüşümlerini kullanarak, TM'nin tanjant uzayını, dikey ve yatay alt uzayların direkt toplamı olacak şekilde tanımladı ve M'deki parelel vektör alanlarının genişletilmişlerinin yatay vektör alanları olduğunu gösterdi. OPROIU & PAPAGHIUC (1988), TM'yi geren baz vektör alanlarının Lie parantez operatörü altındaki değerlerini bulduktan sonra (TM, g^C) (pseudo-)Riemann manifoldunun Levi-Civita koneksiyonu ve Riemann eğrilik tensörünü bileşenler cinsinden hesapladı. YANO & ISHIHARA (1970) da M manifoldunun tensör alanlarının cebrinden, TM'nin tensör alanlarının cebrine dikey, tam ve yatay yükseltmeleri tanımlayarak yapılan tüm çalışmaları özetledi ve genişletti. Manifold üzerindeki fonksiyon, vektör alanı ve 1-formun double tanjant demet üzerine dikey ve tam yükseltilmişleri ESİN & CİVELEK (1989) tarafından ele alındı. (2,0), (1,1), (0,2) tipinden tensör alanlarının double tanjant demet üzerine dikey ve tam yükseltilmişlerini AYHAN (1997, 2006) inceledi.

Bu çalışmada, (TM, g^D) Riemann manifoldu üzerinde g^D Sasaki metriğine bağlı $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonu kullanılarak TM deki temel tensör alanlarının TTM ye yatay yükseltilmişleri tanımlandı. M manifoldu flat kabul edilerek, M manifoldu üzerindeki temel tensör alanlarının TTM'ye yükseltilmişleri elde edildi.

2. TTM ÜZERİNDEKİ İNDİRGENMİŞ LOKAL KOORDİNAT SİSTEMİ

M n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold, TM onun tanjant demeti olmak üzere $p \in M$ nin U açık komşuluğu üzerindeki haritaya bağlı olarak M için bir lokal koordinat sistemi $(x) = \{x^1, ..., x^n\}$ olsun. O zaman $\tau_M(Z_p) = p$ eşitliğini sağlayan $\tau_M : TM \to M$ kanonik izdüşüm olmak üzere $\tau_M{}^{-1}(U) = U^/$ TM deki $\tau_M{}^{-1}(\{p\})$ noktasının bir açık komşuluğudur. Böylece $\forall Z_p \in U^/$ noktası için,

$$(x, y)(Z_p) = (x^1(p), ..., x^n(p), Z_p[x^1], ..., Z_p[x^n]) \tag{1}$$

şeklinde tanımlı (x,y) dönüşümü $U^/$ üzerinde lokal bir harita olup $(x^i, y^i; 1 \le i \le n)$ sistemi TM için indirgenmiş lokal koordinat sistemidir.
Ayrıca $\tau_{TM}(A_Z) = Z$ eşitliğini sağlayan $\tau_{TM} : TTM \to TM$ kanonik izdüşüm olmak üzere $\tau_{TM}{}^{-1}(U^/) = U^{//}$, TTM deki $\tau_{TM}{}^{-1}(\{Z\})$ noktasının bir açık komşuluğudur. Böylece $\forall A_Z \in U^{//} \subset TTM$ noktası için

$$(x, y, z, t)(A_Z) = (x(p), y(Z), z(A_Z), t(A_Z)), \quad (1 \le i \le n) \tag{2}$$

olur. (x,y,z,t) dönüşümünün lokal koordinat fonksiyonları

$$\begin{aligned} x(p) &= x^i(p) \\ y(Z) &= Z_p[x^i] = y^i(Z) \\ z(A_Z) &= A_Z[x^i] = z^i(A_Z) \\ t(A_Z) &= A_Z[y^i] = t^i(A_Z) \quad (1 \le i \le n) \end{aligned} \tag{3}$$

şeklinde tanımlı olup (x,y,z,t), $U^{//}$ için bir haritadır. Böylece $(x^i, y^i, z^i, t^i; 1 \le i \le n)$ sistemi TTM için indirgenmiş lokal koordinat sistemidir (CİVELEK 1988).
TM nin tanjant demeti TTM, TM üzerinde dikey dağılım olarak adlandırılan $VTM = Çek(\tau_M)_*$ integrallenebilen altvektör demetine sahiptir. TM üzerinde bir non-lineer koneksiyon HTM dağılımı ile tanımlı olup VTM nin tamamlayıcısıdır. Bu dağılıma TM üzerinde yatay dağılım denir. Böylece

$$TTM = VTM \oplus HTM \tag{4}$$

dir. Bu direkt toplam ayrışımına uyarlanmış TM deki lokal çatı $\{\delta_i, \partial_i; 1 \le i \le n\}$ dir.
Buradaki

$$\delta_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^H = \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i{}^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \qquad N_i{}^j = y^k \Gamma_{ki}{}^j \tag{5}$$

HTM deki lokal çatı ve

$$\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V = \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{6}$$

VTM deki lokal çatıdır. Ayrıca $\{\delta y^i, dx^i; 1 \le i \le n\}$ lokal 1-formlarının sistemi,

$$\delta y^i = dy^i + N^i{}_j dx^j, \qquad N^i{}_j = y^k \Gamma_{kj}{}^i \tag{7}$$

olmak üzere $\{\delta_i, \partial_i; 1 \le i \le n\}$ çatısının lokal dual çatısıdır.

TM nin tanjant uzayını geren lokal baz vektör alanlarının Lie parantez operatörü altındaki değerleri

$$[\delta_i, \delta_j] = y^l R_{jil}{}^h \partial_h, \tag{8}$$

$$[\delta_i, \partial_j] = \Gamma_{ji}{}^h \partial_h, \tag{9}$$

$$[\partial_i, \partial_j] = 0 \tag{10}$$

dır (OPROIU & PAPAGHIUC 1988).

3. TM ÜZERİNDE g^D SASAKİ METRİĞİNE BAĞLI $\tilde{\nabla}$ LEVİ-CİVİTA KONEKSİYONU

M manifoldu üzerinde g_{ij} bileşenlerine sahip g metrik tensörünün TM üzerinde diagonal yükseltilmişi

$$g^D = g_{ij} dx^i dx^j + g_{ij} \delta y^i \delta y^j \tag{11}$$

olup TM nin uyarlanmış lokal baz vektör alanları üzerinde aldığı değerler

$$\begin{aligned} g^D\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) &= g^D\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = g_{ij} \\ g^D\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) &= g^D\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

şeklindedir. $\Gamma_{ji}{}^h$, g Riemann metriğine bağlı Kristoffel sembolleri ve $R_{jil}{}^h$, Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri olmak üzere TM de g^D Sasaki metriğine bağlı $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonunun bileşenler cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} &\tilde{\nabla}_{\delta_i} \delta_j = \Gamma_{ji}^h \delta_h + \frac{1}{2} y^l R_{jil}^h \partial_h, \quad \tilde{\nabla}_{\delta_i} \partial_j = \frac{1}{2} y^l R_{jil}^h \delta_h + \Gamma_{ji}^h \partial_h, \\ &\tilde{\nabla}_{\partial_i} \delta_j = -\frac{1}{2} y^l R_{jil}^h \delta_h, \qquad \tilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_j = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

dir. TM üzerindeki lokal baz 1-formların kovaryant türevleri de

$$\begin{aligned} &\tilde{\nabla}_{\delta_i} dx^j = -\Gamma_{ji}^h dx^h - \frac{1}{2} y^l R_{hil}^j \delta y^h, \quad \tilde{\nabla}_{\delta_i} \delta y^j = -\frac{1}{2} y^l R_{hil}^j dx^h - \Gamma_{ji}^h \delta y^h, \\ &\tilde{\nabla}_{\partial_i} dx^j = \frac{1}{2} y^l R_{hil}^j dx^h, \qquad \tilde{\nabla}_{\partial_i} \delta y^j = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

dir (YANO & ISHIHARA 1970).

4. M DEKİ TEMEL TENSÖR ALANLARININ TTM YE DİKEY VE TAM YÜKSELTİLMİŞLERİ

M üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun, bir $X = X^h \frac{\partial}{\partial x^h}$ vektör alanının ve bir $\omega = \omega_i dx^i$ 1-formunun TM ye dikey ve tam yükseltilmişleri TM nin indirgenmiş ve uyarlanmış koordinatlarına göre lokal gösterimi sırasıyla;

$$f^V = fo\tau_M, \qquad f^C = y^i (\frac{\partial f}{\partial x^i})^V,$$
$$X^V = \left(X^h\right)^V \frac{\partial}{\partial y^h}, \quad X^C = \left(X^h\right)^V \frac{\partial}{\partial x^h} + y^i \left(\frac{\partial X^h}{\partial x^i}\right)^V \frac{\partial}{\partial y^h} = \left(X^h\right)^V \frac{\delta}{\delta x^h} + y^i \left(\nabla_i X^h\right)^V \frac{\partial}{\partial y^h}, \tag{15}$$
$$\omega^V = \left(\omega_i\right)^V dx^i, \qquad \omega^C = y^j \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\right)^V dx^i + \left(\omega_i\right)^V dy^i = \left(\omega_i\right)^V \delta y^i + y^j \left(\nabla_j \omega_i\right)^V dx^i$$

şeklindedir (YANO & ISHIHARA 1970).

Ayrıca aynı temel tensör alanlarının TTM ye dikey ve tam yükseltilmişleri de TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre sırasıyla;

$$f^{VV} = fo\tau_M o\tau_{TM}, \qquad f^{CV} = y^i (\frac{\partial f}{\partial x^i})^{VV},$$
$$f^{VC} = z^i (\frac{\partial f}{\partial x^i})^{VV}, \quad f^{CC} = y^i z^j (\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j})^{VV} + t^i (\frac{\partial f}{\partial x^i})^{VV}, \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{VV} = \frac{\partial}{\partial t^i}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{VC} = \frac{\partial}{\partial y^i},$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{CV} = \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{CC} = \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{17}$$

$$\left(dx^i\right)^{VV} = dx^i, \quad \left(dx^i\right)^{VC} = dz^i,$$
$$\left(dx^i\right)^{CV} = dy^i, \quad \left(dx^i\right)^{CC} = dt^i \tag{18}$$

şeklindedir (ESİN & CİVELEK 1989).

5. M ÜZERİNDE TANIMLI BİR FONKSİYONUNUN TTM YE YÜKSELTİLMİŞLERİ

Bu bölümde, önce, $\widetilde{\nabla}$, g^D Sasaki Riemann metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere TM üzerinde tanımlı C^∞ bir $\widetilde{f}$ fonksiyonunun, TTM ye yatay yükseltilmişleri tanımlandı. Sonra M üzerindeki f fonksiyonunun TTM ye VH, CH, HH yükseltilmişleri elde edildi.

Tanım 5.1 $\widetilde{f}$ TM üzerinde tanımlı C^∞ fonksiyon olmak üzere,

$$\widetilde{f}^C = z^i \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^i} + t^i \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t^i} \tag{19}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{f}^C$ fonksiyonuna, $\widetilde{f}$ nın TTM ye tam yükseltilmişi denir (ESİN & CİVELEK 1989).

Tanım 5.2 $\widetilde{f}$ TM üzerinde tanımlı C^∞ fonksiyon ve $\widetilde{\nabla}$, g^D Sasaki Riemann metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere,

$$\widetilde{f}^H = \widetilde{f}^C - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{f} \tag{20}$$

eşitliği ile tanımlı $\widetilde{f}^H$ fonksiyonuna $\widetilde{f}$ fonksiyonunun TTM ye yatay yükseltilmişi denir. Bu eşitlikteki, $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{f} = \widetilde{\gamma}\left(\widetilde{\nabla}\widetilde{f}\right)$ olup $\widetilde{\nabla}\widetilde{f}$,

$$\widetilde{\nabla}\widetilde{f} = \left(\widetilde{\nabla}_{\delta_i} \widetilde{f}\right) dx^i + \left(\widetilde{\nabla}_{\partial_i} \widetilde{f}\right) \delta y^i \tag{21}$$

$\tilde{f}$ fonksiyonunun kovaryant diferensiyeli ve $\tilde{\gamma}$ dönüşümü ise

$$\tilde{\gamma}: \quad \Im_1^2(TM) \quad \to \quad \Im_0^2(TTM)$$

$$S = S_i^{jk} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial y^k} \quad \to \quad \tilde{\gamma}(S) = z^i S_i^{jk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V \otimes \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)^V \tag{22}$$

$$S = S_i^{jk} \delta y^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial y^k} \quad \to \quad \tilde{\gamma}(S) = t^i S_i^{jk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^V \otimes \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)^V$$

şeklinde tanımlı lineer bir dönüşümdür.

Teorem 5.1 $\tilde{f}$ TM üzerinde tanımlı C^∞ fonksiyon ve $\tilde{\nabla}$, g^D Sasaki Riemann metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere, $\tilde{f}^H$ nin bileşenler cinsinden ifadesi

$$\tilde{f}^H = z^i y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^h} \tag{23}$$

dir.

İspat: (5), (21) ve (22) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}} \tilde{f} = \tilde{\gamma}(\tilde{\nabla}\tilde{f}) &= \tilde{\gamma}(\left(\tilde{\nabla}_{\delta_i} \tilde{f}\right)dx^i + \left(\tilde{\nabla}_{\partial_i} \tilde{f}\right)\delta y^i) \\
&= \mathrm{z}^{\mathrm{i}} \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \mathrm{x}^{\mathrm{i}}} + t^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i} \\
&= \mathrm{z}^{\mathrm{i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h}\right)(\tilde{f}) + t^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^h} \\
&= \mathrm{z}^{\mathrm{i}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^i} - \mathrm{z}^{\mathrm{i}} y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^h} + t^i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^h}
\end{aligned} \tag{24}$$

elde edilir.

(19), (20) ve (24) deki bağıntılar yardımıyla

$$\tilde{f}^H = \mathrm{z}^{\mathrm{i}} y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^h} \tag{25}$$

bulunur.

Teorem 5.2 M manifoldu üzerinde f, C^∞ fonksiyon, ∇, Levi-Civita koneksiyonu ve f in TM üzerine sırasıyla dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri f^V, f^C, f^H olmak üzere f in TTM üzerine sırasıyla VH, CH, HH yükseltilmişleri,

$i)$ $f^{VH} = 0,$

$ii)$ $f^{CH} = z^i y^j \Gamma_{ji}^h \dfrac{\partial f}{\partial x^h},$

$iii)$ $f^{HH} = 0$

dır.

İspat i) (25) eşitliğinde $\tilde{f}$ yerine f^V alınırsa $f^{VH} = \mathrm{z}^{\mathrm{i}} y^j \Gamma_{ji}^h \dfrac{\partial f^V}{\partial y^h}$ olur. M deki herhangi bir X vektör alanı için $X^V f^V = 0$ bağıntısından (YANO & ISHIHARA 1970),

$$f^{VH} = 0$$

olduğu görülür.

ii) (25) eşitliğinde $\widetilde{f}$ yerine f^C alınırsa $f^{CH} = z^i y^j \Gamma_{ji}^h \dfrac{\partial f^C}{\partial y^h}$ olur. M deki herhangi bir X vektör alanı için $X^V f^C = (Xf)^V$ bağıntısından (YANO & ISHIHARA 1970),

$$f^{CH} = z^i y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial f}{\partial x^h}$$

elde edilir.

iii) M manifoldu üzerinde f, C^∞ fonksiyon, ∇, Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere f in yatay yükseltilmişi $f^H = 0$ olduğundan (YANO & ISHIHARA 1970),

$$f^{HH} = 0$$

olur.

6. M ÜZERİNDE TANIMLI BİR VEKTÖR ALANININ TTM YE YÜKSELTİLMİŞLERİ

Bu bölümde, ilk olarak, TM üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre verilen $\widetilde{X} = \widetilde{X}^i \delta_i + \widetilde{X}^{n+i} \partial_i$ vektör alanının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre TTM ye tam yükseltilmişi bulundu. Sonra M üzerindeki X vektör alanının TTM ye TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre VC, CC, HC yükseltilmişleri elde edildi. İkinci olarak TTM üzerinde $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{X}$ vektör alanı elde edildi. Sonra $\widetilde{X}$ nın yerine sırasıyla X^V, X^C, X^H konularak TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} X^V$, $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} X^C$, $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} X^H$ vektör alanları bulundu. Son olarak M üzerindeki X vektör alanının TTM ye TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre VH, CH, HH yükseltilmişleri elde edildi.

Tanım 6.1 $\widetilde{X}$ TM üzerinde tanımlı C^∞ vektör alanı ve $\widetilde{\nabla}$, g^D Sasaki Riemann metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere,

$$\widetilde{X}^H = \widetilde{X}^C - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{X} \tag{26}$$

eşitliği ile tanımlı $\widetilde{X}^H$ vektör alanına $\widetilde{X}$ vektör alanının TTM ye yatay yükseltilmişi denir.

Teorem 6.1 TM üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre verilen $\widetilde{X} = \widetilde{X}^i \delta_i + \widetilde{X}^{n+i} \partial_i$ vektör alanının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre TTM ye tam yükseltilmişi,

$$\widetilde{X}^C : \begin{pmatrix} \widetilde{X}^i \\ \widetilde{X}^{n+i} - y^j \widetilde{X}^h \Gamma_{jh}^i \\ z^k \left(\dfrac{\partial \widetilde{X}^i}{\partial x^k} \right) + t^k \left(\dfrac{\partial \widetilde{X}^i}{\partial y^k} \right) \\ z^k \left(\dfrac{\partial \left(\widetilde{X}^{n+i} - y^j \widetilde{X}^h \Gamma_{jh}^i \right)}{\partial x^k} \right) + t^k \left(\dfrac{\partial \left(\widetilde{X}^{n+i} - y^j \widetilde{X}^h \Gamma_{jh}^i \right)}{\partial y^k} \right) \end{pmatrix} \tag{27}$$

dir.

İspat: $\widetilde{X} = \widetilde{X}^i \delta_i + \widetilde{X}^{n+i} \partial_i$ vektör alanının tam yükseltilmişi

$$\widetilde{X}^C = \left(\widetilde{X}^i\right)^C \left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)^V + \left(\widetilde{X}^i\right)^V \left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)^C + \left(\widetilde{X}^{n+i}\right)^C \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)^V + \left(\widetilde{X}^{n+i}\right)^V \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)^C$$

$$= \left(\mathrm{z}^{\mathrm{k}} \frac{\partial \widetilde{X}^i}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \widetilde{X}^i}{\partial y^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z^i} - y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial t^h}\right) + \widetilde{X}^i \left\{\frac{\partial}{\partial x^i} - \left(y^j \Gamma_{ji}^h\right)^C \frac{\partial}{\partial t^h} - y^j \Gamma_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h}\right\} +$$

$$+ \left(\mathrm{z}^{\mathrm{k}} \frac{\partial \widetilde{X}^{n+i}}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \widetilde{X}^{n+i}}{\partial y^k}\right)\frac{\partial}{\partial t^i} + \widetilde{X}^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$\widetilde{X}^C = \widetilde{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\widetilde{X}^{n+i} - y^j \widetilde{X}^h \Gamma_{jh}^i\right)\frac{\partial}{\partial y^i} + \left(\mathrm{z}^{\mathrm{k}} \frac{\partial \widetilde{X}^i}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \widetilde{X}^i}{\partial y^k}\right)\frac{\partial}{\partial z^i} +$$

$$+ z^k \left(\frac{\partial\left(\widetilde{X}^{n+i} - y^j \widetilde{X}^h \Gamma_{jh}^i\right)}{\partial x^k}\right) + t^k \left(\frac{\partial\left(\widetilde{X}^{n+i} - y^j \widetilde{X}^h \Gamma_{jh}^i\right)}{\partial y^k}\right)\frac{\partial}{\partial t^i}$$

dir.

Teorem 6.2 M manifoldu üzerinde bir X vektör alanı ve X in TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri sırasıyla X^V, X^C ve X^H olmak üzere X in TTM üzerine VC, CC ve HC yükseltilmişleri sırasıyla

$$X^{VC} : \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \\ 0 \\ z^k \dfrac{\partial X^i}{\partial x^k} \end{pmatrix}, \quad X^{CC} : \begin{pmatrix} X^i \\ y^j \dfrac{\partial X^i}{\partial x^j} \\ z^k \dfrac{\partial X^i}{\partial x^k} \\ y^j z^k \dfrac{\partial^2 X^i}{\partial x^k \partial x^j} + t^k \dfrac{\partial X^i}{\partial x^k} \end{pmatrix}, \quad X^{HC} : \begin{pmatrix} X^i \\ - y^j X^h \Gamma_{jh}^i \\ z^k \dfrac{\partial X^i}{\partial x^k} \\ - y^j z^k \dfrac{\partial\left(X^h \Gamma_{jh}^i\right)}{\partial x^k} - t^k X^h \Gamma_{kh}^i \end{pmatrix}$$

dir.

İspat: X vektör alanının TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri TM nin uyarlanmış koordinatlarına göre

$$X^V : \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix}, \quad X^C : \begin{pmatrix} X^i \\ y^j \nabla_j X^i \end{pmatrix} \text{ ve } X^H : \begin{pmatrix} X^i \\ 0 \end{pmatrix}$$

lokal bileşenlerine sahiptir. Bu vektör alanlarının bileşenlerini (27) eşitliğinde TM deki $\widetilde{X} : \begin{pmatrix} \widetilde{X}^i \\ \widetilde{X}^{n+i} \end{pmatrix}$ vektör alanının bileşenlerinin yerine konulursa teoremin doğruluğu kolayca görülür.

Teorem 6.3 (M,g) flat Riemann manifoldu ve $\widetilde{\nabla}$, TM üzerinde g^D Sasaki metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere, TM üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre verilen $\widetilde{X} = \widetilde{X}^i \delta_i + \widetilde{X}^{n+i} \partial_i$ vektör alanı için $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{X}$ vektör alanının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{X}:\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z^k\left(\dfrac{\delta\widetilde{X}^i}{\delta x^k}+\widetilde{X}^h\Gamma^i_{hk}\right)+t^k\dfrac{\partial\widetilde{X}^i}{\partial y^k} \\ -y^jz^k\left(\dfrac{\delta\widetilde{X}^h}{\delta x^k}+\widetilde{X}^i\Gamma^h_{ik}\right)\Gamma^i_{jh}-y^jt^k\left(\dfrac{\partial\widetilde{X}^h}{\partial y^k}\right)\Gamma^i_{jh}+z^k\left(\dfrac{\delta\widetilde{X}^{n+i}}{\delta x^k}+\widetilde{X}^{n+h}\Gamma^i_{hk}\right)+t^k\dfrac{\partial\widetilde{X}^{n+i}}{\partial y^k}\end{pmatrix} \tag{28}$$

dir.

İspat: (M,g) Riemann manifoldu flat olduğu için, (13) ve (22) deki eşitlikler yardımıyla

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{X}=\widetilde{\gamma}\left(\widetilde{\nabla}_{\delta_k}(\widetilde{X}^i\delta_i+\widetilde{X}^{n+i}\partial_i)dx^k+\widetilde{\nabla}_{\partial_k}(\widetilde{X}^i\delta_i+\widetilde{X}^{n+i}\partial_i)\delta y^k\right)$$

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}}\widetilde{X}=\left(\mathrm{z}^k\left\{\delta_k\left(\widetilde{X}^i\right)+\widetilde{X}^h\Gamma^i_{hk}\right\}+t^k\left(\partial_k\widetilde{X}^i\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}^i}-y^j\Gamma^h_{ji}\frac{\partial}{\partial t^h}\right)+$$

$$+\mathrm{z}^k\left\{\delta_k\left(\widetilde{X}^{n+i}\right)+\widetilde{X}^{n+h}\Gamma^i_{hk}\right\}+t^k\left(\partial_k\widetilde{X}^{n+i}\right)\frac{\partial}{\partial t^i}$$

$$=\left(\mathrm{z}^k\left\{\delta_k\left(\widetilde{X}^i\right)+\widetilde{X}^h\Gamma^i_{hk}\right\}+t^k\left(\partial_k\widetilde{X}^i\right)\right)\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}^i}+\left\{-y^jz^k\left(\frac{\delta\widetilde{X}^h}{\delta x^k}+\widetilde{X}^i\Gamma^h_{ik}\right)\Gamma^i_{jh}-\right.$$

$$\left.-y^jt^k\left(\frac{\partial\widetilde{X}^h}{\partial y^k}\right)\Gamma^i_{jh}+z^k\left(\frac{\delta\widetilde{X}^{n+i}}{\delta x^k}+\widetilde{X}^{n+h}\Gamma^i_{hk}\right)+t^k\frac{\partial\widetilde{X}^{n+i}}{\partial y^k}\right\}\frac{\partial}{\partial t^{\mathrm{i}}}$$

elde edilir.

Teorem 6.4 (M,g) flat Riemann manifoldu, $\widetilde{\nabla}$, TM üzerinde g^D Sasaki metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu, X vektör alanının TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri sırasıyla X^V, X^C ve X^H olmak üzere $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}}X^V$, $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}}X^C$, $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}}X^H$ vektör alanlarının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$i)\ \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}}X^V:\begin{pmatrix}0\\0\\0\\z^k\nabla_kX^i\end{pmatrix},$$

$$ii)\ \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}}X^C:\begin{pmatrix}0\\0\\z^k\nabla_kX^i\\ y^jz^k\left\{\dfrac{\partial\left(\nabla_jX^i\right)}{\partial x^k}-\left(\nabla_kX^h\right)\Gamma^i_{jh}-\Gamma^l_{jk}\left(\nabla_lX^i\right)+\left(\nabla_jX^h\right)\Gamma^i_{hk}\right\}+t^k\nabla_kX^i\end{pmatrix},$$

$$iii)\ \widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}}X^H:\begin{pmatrix}0\\0\\z^k\nabla_kX^i\\-y^jz^k\nabla_kX^h\Gamma^i_{jh}\end{pmatrix}$$

dir.

İspat: X vektör alanının TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri TM nin uyarlanmış koordinatlarına göre

$$X^V : \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix}, \; X^C : \begin{pmatrix} X^i \\ y^j \nabla_j X^i \end{pmatrix} \text{ ve } X^H : \begin{pmatrix} X^i \\ 0 \end{pmatrix}$$

lokal bileşenlerine sahiptir. Bu vektör alanlarının bileşenlerini (28) eşitliğinde TM deki $\widetilde{X} : \begin{pmatrix} \widetilde{X}^i \\ \widetilde{X}^{n+i} \end{pmatrix}$ vektör alanının bileşenlerinin yerine konulursa teoremin doğruluğu kolayca görülür.

Teorem 6.5 (M,g) flat Riemann manifoldu, $\widetilde{\nabla}$, TM üzerinde g^D Sasaki metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu, X vektör alanının TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri sırasıyla X^V, X^C ve X^H olmak üzere X^{VH}, X^{CH}, X^{HH} vektör alanlarının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$i)\;\; X^{VH} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \\ 0 \\ -z^k X^i \Gamma_{ki}^h \end{pmatrix},$$

$$ii)\;\; X^{CH} = \begin{pmatrix} X^i \\ y^j \dfrac{\partial X^i}{\partial x^j} \\ -z^k X^i \Gamma_{ki}^h \\ -y^j z^k \left\{ \dfrac{\partial \left(X^i \Gamma_{ki}^h \right)}{\partial x^k} - \left(\nabla_k X^h \right) \Gamma_{jh}^i - \Gamma_{jk}^l \left(\nabla_l X^i \right) + \left(\nabla_j X^h \right) \Gamma_{hk}^i \right\} \end{pmatrix},$$

$$iii)\;\; X^{HH} = \begin{pmatrix} X^i \\ -y^j X^h \Gamma_{jh}^i \\ -z^k X^h \Gamma_{hk}^i \\ -y^j z^k X^h \left\{ \dfrac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial x^k} - \Gamma_{kh}^i \Gamma_{ji}^h \right\} - t^k X^h \Gamma_{kh}^i \end{pmatrix}$$

dır.

İspat: Tanım 6.1 de verilen denklemde Teorem 6.2 ve Teorem 6.4 deki eşitliklerin kullanılmasıyla X vektör alanının TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri X^V, X^C ve X^H ın TTM ye yatay yükseltilmişleri X^{VH}, X^{CH}, X^{HH} , TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre, bileşenler cinsinden elde edilir.

7. M ÜZERİNDE TANIMLI BİR 1-FORMUN TTM YE YÜKSELTİLMİŞLERİ

Bu bölümde, ilk olarak, TM üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre verilen $\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}_i dx^i + \widetilde{\omega}_{n+i} \delta y^i$ 1-formunun TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre TTM ye tam yükseltilmişi bulundu. Sonra M üzerindeki ω 1-formunun TTM ye TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre VC, CC, HC yükseltilmişleri elde edildi. İkinci olarak TTM üzerinde $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{\omega}$ 1-formu elde edildi. Sonra $\widetilde{\omega}$ nın yerine sırasıyla $\omega^V, \omega^C, \omega^H$ konularak TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} \omega^V$, $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} \omega^C$, $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{\gamma}} \omega^H$ 1-formları bulundu. Son olarak M üzerindeki ω 1-formunun TTM ye TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre VH, CH, HH yükseltilmişleri elde edildi.

Tanım 7.1 $\tilde{\omega}$ TM üzerinde tanımlı C^∞ 1-form ve $\tilde{\nabla}$, g^D Sasaki Riemann metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere,

$$\tilde{\omega}^H = \tilde{\omega}^C - \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}\tilde{\omega} \tag{29}$$

eşitliği ile tanımlı $\tilde{\omega}^H$ 1-formuna $\tilde{\omega}$ 1-formunun TTM ye yatay yükseltilmişi denir.

Teorem 7.1 TM üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre verilen $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i dx^i + \tilde{\omega}_{n+i}\delta y^i$ 1-formunun TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre TTM ye tam yükseltilmişi,

$$\tilde{\omega}^C : \begin{pmatrix} \mathrm{z}^k \dfrac{\partial(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{n+h} y^j \Gamma^h_{ji})}{\partial x^k} + t^k \dfrac{\partial(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{n+h} y^j \Gamma^h_{ji})}{\partial y^k} & \mathrm{z}^k \dfrac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial x^k} + t^k \dfrac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k} & \tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{n+h} y^j \Gamma^h_{ji} & \tilde{\omega}_{n+i} \end{pmatrix}$$

dir.

İspat: $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i dx^i + \tilde{\omega}_{n+i}\delta y^i$ 1-formunun tam yükseltilmişi

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^C &= (\tilde{\omega}_i)^C (dx^i)^V + (\tilde{\omega}_i)^V (dx^i)^C + (\tilde{\omega}_{n+i})^C (\delta y^i)^V + (\tilde{\omega}_{n+i})^V (\delta y^i)^C \\
&= \left(\mathrm{z}^k \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial y^k} \right) dx^i + \tilde{\omega}_i dz^i + \left(\mathrm{z}^k \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k} \right) \left\{ (dy^i)^V + y^j \Gamma^i_{jh} (dx^h)^V \right\} + \\
&+ \tilde{\omega}_{n+i} \left((dy^i)^C + \left[(y^j)^C (\Gamma^i_{jh})^V + (y^j)^V (\Gamma^i_{jh})^C \right] (dx^h)^V + y^j \Gamma^i_{jh} (dx^h)^C \right) \\
&= \left(\mathrm{z}^k \frac{\partial(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{n+h} y^j \Gamma^h_{ji})}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial(\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{n+h} y^j \Gamma^h_{ji})}{\partial y^k} \right) dx^i + \\
&+ \left(\mathrm{z}^k \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial x^k} + t^k \frac{\partial \tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k} \right) dy^i + (\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{n+h} y^j \Gamma^h_{ji}) dz^i + \tilde{\omega}_{n+i} dt^i
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 7.2 M manifoldu üzerinde bir ω 1-formu ve ω nın TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri sırasıyla ω^V, ω^C ve ω^H olmak üzere ω nın TTM üzerine VC, CC ve HC yükseltilmişleri sırasıyla

$$i)\ \ \omega^{VC} = \begin{pmatrix} z^k \dfrac{\partial \omega_i}{\partial x^k} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ii)\ \ \omega^{CC} = \begin{pmatrix} y^j z^k \dfrac{\partial^2 \omega_i}{\partial x^k \partial x^j} + t^k \dfrac{\partial \omega_i}{\partial x^k} & z^k \dfrac{\partial \omega_i}{\partial x^k} & y^j \dfrac{\partial \omega_i}{\partial x^j} & 0 \end{pmatrix}$$

$$iii)\ \ \omega^{HC} = \begin{pmatrix} y^j z^k \left\{ \dfrac{\partial \omega_h}{\partial x^k} \Gamma^h_{ji} + \omega_h \dfrac{\partial \Gamma^h_{ji}}{\partial x^k} \right\} + t^k \omega_h \Gamma^h_{ki} & z^k \dfrac{\partial \omega_i}{\partial x^k} & y^j \dfrac{\partial \omega_i}{\partial x^j} & \omega_i \end{pmatrix}$$

dir.

İspat: ω 1-formunun TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri TM nin uyarlanmış koordinatlarına göre

$$\omega^V : (\omega_i \quad 0),\ \omega^C : (y^j \nabla_j \omega_i \quad \omega_i) \text{ ve } \omega^H : (0 \quad \omega_i)$$

lokal bileşenlerine sahiptir. Bu 1-formların bileşenlerini Teorem 7.2 de TM deki $\tilde{\omega}:(\tilde{\omega}_i \quad \tilde{\omega}_{n+i})$ 1-formunun bileşenlerinin yerine konulursa teoremin doğruluğu kolayca görülür.

Teorem 7.3 (M,g) flat Riemann manifoldu ve $\tilde{\nabla}$, TM üzerinde g^D Sasaki metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere, TM üzerinde uyarlanmış koordinatlara göre verilen $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i dx^i + \tilde{\omega}_{n+i}\delta y^i$ 1-formu için $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}\tilde{\omega}$ 1-formunun TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}\tilde{\omega} : \begin{pmatrix} \begin{matrix} z^k\left\{\delta_k(\tilde{\omega}_i) - \tilde{\omega}_h \Gamma^h_{ki}\right\} + t^k\left(\dfrac{\partial\tilde{\omega}_i}{\partial y^k}\right) + \\ + y^j z^k\left\{\delta_k(\tilde{\omega}_{n+h}) - \tilde{\omega}_{n+i}\Gamma^i_{hk}\right\}\Gamma^h_{ji} + y^j t^k\left(\dfrac{\partial\tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k}\right)\Gamma^h_{ji} \end{matrix} & z^k\left\{\delta_k(\tilde{\omega}_{n+i}) - \tilde{\omega}_{n+h}\Gamma^h_{ik}\right\} + t^k\left(\dfrac{\partial\tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

İspat: (M,g) Riemann manifoldu flat olduğu için, (14) ve (22) deki eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}\tilde{X} &= \tilde{\gamma}\left(\tilde{\nabla}_{\delta_k}(\tilde{\omega}_i dx^i + \tilde{\omega}_{n+i}\delta y^i)dx^k + \tilde{\nabla}_{\partial_k}(\tilde{\omega}_i dx^i + \tilde{\omega}_{n+i}\delta y^i)\delta y^k\right) \\ &= \left(z^k\left\{\delta_k(\tilde{\omega}_i) - \tilde{\omega}_h\Gamma^h_{ki}\right\} + t^k\left(\frac{\partial\tilde{\omega}_i}{\partial y^k}\right) + y^j z^k\left\{\delta_k(\tilde{\omega}_{n+h}) - \tilde{\omega}_{n+i}\Gamma^i_{hk}\right\}\Gamma^h_{ji} + \right. \\ &\quad \left. + y^j t^k\left(\frac{\partial\tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k}\right)\Gamma^h_{ji}\right)dx^i + \left(z^k\left\{\delta_k(\tilde{\omega}_{n+i}) - \tilde{\omega}_{n+h}\Gamma^h_{ik}\right\} + t^k\left(\frac{\partial\tilde{\omega}_{n+i}}{\partial y^k}\right)\right)dy^i \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 7.4 (M,g) flat Riemann manifoldu, $\tilde{\nabla}$, TM üzerinde g^D Sasaki metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu, ω 1-formunun TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri sırasıyla ω^V, ω^C ve ω^H olmak üzere $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}\omega^V$, $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}\omega^C$, $\tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}\omega^H$ 1-formlarının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$i)\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}\omega^V : \left(z^k\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k} - \omega_h\Gamma^h_{ki}\right) \quad 0 \quad 0 \quad 0\right),$$

$$ii)\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}\omega^C : \left(y^j z^k\left\{\frac{\partial(\nabla_j\omega_i)}{\partial x^k} - \Gamma^h_{jk}(\nabla_h\omega_i) - \Gamma^h_{ki}(\nabla_j\omega_h) + (\nabla_k\omega_h)\Gamma^h_{ji}\right\} + t^k(\nabla_k\omega_i) \quad z^k(\nabla_k\omega_i) \quad 0 \quad 0\right),$$

$$iii)\ \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}\omega^H : \left(y^j z^k\nabla_k\omega_h\Gamma^h_{ji} \quad z^k\nabla_k\omega_i \quad 0 \quad 0\right)$$

dir.

İspat: ω 1-formunun TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri TM nin uyarlanmış koordinatlarına göre

$$\omega^V : (\omega_i \quad 0),\ \omega^C : \left(y^j\nabla_j\omega_i \quad \omega_i\right) \text{ ve } \omega^H : (0 \quad \omega_i)$$

lokal bileşenlerine sahiptir. Bu 1-formların bileşenlerini Teorem 7.4 de TM deki $\tilde{\omega}:(\tilde{\omega}_i \quad \tilde{\omega}_{n+i})$ 1-formunun bileşenlerinin yerine konulursa teoremin doğruluğu kolayca görülür.

Teorem 7.5 (M,g) flat Riemann manifoldu, $\widetilde{\nabla}$, TM üzerinde g^D Sasaki metriğine bağlı Levi-Civita koneksiyonu, ω 1-formunun TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri sırasıyla ω^V, ω^C ve ω^H olmak üzere ω^{VH}, ω^{CH} , ω^{HH} 1-formlarının TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden ifadesi

$$i)\ \omega^{VH} = \left(z^k \omega_h \Gamma_{ki}^h \quad 0 \quad \omega_i \quad 0 \right),$$

$$ii)\ \omega^{CH} = \left(-y^j z^k \left\{ \frac{\partial\left(\omega_h \Gamma_{ji}^h\right)}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^h \left(\nabla_h \omega_i\right) - \Gamma_{ki}^h \left(\nabla_j \omega_h\right) + \left(\nabla_k \omega_h\right) \Gamma_{ji}^h \right\} + t^k \omega_h \Gamma_{kh}^i \quad z^k \omega_h \Gamma_{kh}^i \quad y^j \omega_h \Gamma_{jh}^i \quad \omega_i \right),$$

$$iii)\ \omega^{HH} = \left(y^j z^k \left\{ \omega_h \left(\frac{\partial \Gamma_{ji}^h}{\partial x^k} + \Gamma_{kh}^i \Gamma_{ji}^h \right) \right\} + t^k \omega_h \Gamma_{ki}^h \quad z^k \omega_h \Gamma_{ki}^h \quad y^j \omega_h \Gamma_{ji}^h \quad \omega_i \right)$$

dir.

İspat: Tanım 7.1 de verilen denklemde Teorem 7.3 ve Teorem 7.5 deki eşitliklerin kullanılmasıyla, ω 1-formunun TM ye dikey, tam ve yatay yükseltilmişleri ω^V, ω^C ve ω^H ın yatay yükseltilmişleri ω^{VH}, ω^{CH} , ω^{HH} 1-formları, TTM nin indirgenmiş koordinatlarına göre bileşenler cinsinden elde edilir.

KAYNAKLAR

AYHAN İ, 1997. Derivasyonlar ve tensör alanlarının ikinci mertebeden yükseltilmişleri, Yüksek Lisans Tezi, PAÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli, s.67.

AYHAN İ, 2006. Semi-Riemann manifoldların tanjant ve kotanjant demetlerinin geometrisi üzerine, Doktora Tezi, S.D.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta, s.142.

DOMBROWSKI P, 1962. On the geometry of the tangent bundle, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 210, 73-88.

ESİN E, CİVELEK Ş, 1989. The lifts on the second order tangent bundles, *Jour. Math. Stat. Fac. Art. Sc. Gazi Univ.*, Vol.2, 117-135.

OPROIU V, PAPAGHIUC N, 1998. On the geometry of tangent bundle of a (pseudo)-Riemannian manifold, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi*, Ser.Noua, Mat. 36, No.3, 265-276.

SASAKI, SHIGEO, 1958. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds., *Tohoku Mathematical Journal*, II. Ser. 10, 338-354.

YANO K, ISHIHARA S, 1973. *Tangent and Cotangent* Bundles, Marcel Decker. Inc., New York, pp.392.