KUADRATİK İRRASYONEL SAYILARIN NEWTON YAKLAŞIMLARI

Serpil HALICI[1] , Mehmet KOLSUZ[2]
[1]Sakarya Üniversitesi Fen. Edeb. Fak. Mat. Bl.
shalici@sakarya.edu.tr
[2]M.E.M lisesi

ÖZET

Bu çalışmada, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayılarının, sürekli kesir açılımları kullanılarak, bu açılımlara göre hesaplanan n .yaklaşımlar ile Newton yaklaşımları arasındaki bağıntılar incelendi. Newton yaklaşımları ile sürekli kesir yaklaşımlarının yakınsama hızları karşılaştırıldı.

Anahtar kelimeler: Kuadratik irrasyonel sayı, pür periyodik sürekli kesir, Newton yaklaşımı.

ABSTRACT

In this study, we investigate quadratic irrationals.Some relations between n-th approximations of quadratic irrationals are proved. Results are applird to Newton approximations of quadratic irration quadratic irrational als.

Keywords: Quadratic irrational number, pur periodic continued fractions, Newton Approximations.

1.GİRİŞ

1.1 Temel Tanım ve Özellikler

$n \geq 0$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, ve a_0 hariç hepsi pozitif tamsayı olmak üzere;

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$$

biçimindeki ifadeye, düzgün veya basit sürekli kesir, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ değerlerine de, bu kesrin elemanları denir.
$n \geq 0, m > 0$ olmaküzere,

$\left[b_0, b_1, b_2, ..., b_{n-1}, \overline{c_0, c_1, c_2, ..., c_{m-1}}\right]$ biçiminde gösterilen, sonsuz sürekli kesre, periyodik sürekli kesir denir. Burada alınan en küçük m sayısı sürekli kesrin periyodudur. Ayrıca, a_0 sayısından sonraki tüm elemanları devreden, $\left[a_0; \overline{a_1, a_2, ...a_n}\right]$ biçimindeki sürekli kesre de, pür periyodik sürekli kesir denir$[3]$. D tam kare olmayan pozitif bir tam sayı olmak üzere, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısı, pür periyodik sürekli kesir açılımına sahiptir.

s periyot uzunluğu olmak üzere, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımı bilinen gösterimden farklı olarak, $\sqrt{D} = (a_0; a_1, a_2, ..., a_s)$ biçiminde de gösterilebilir. $\sqrt{7}$ irrasyonel sayısı pür periyodik bir sürekli kesir açılıma sahip olup, $\sqrt{7} = (1;1,1,1,4)$ dır ve periyodu 4 dür. $[a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ...]$ sürekli kesri için hesaplanan;

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \cdots \frac{1}{+a_{n-1}}$$

değerine, sürekli kesrin n.yaklaşımı denir ve n. yaklaşım, $R_n = \frac{P_n}{Q_n}$ şeklinde gösterilir ve istenen sayıyı bulmada kullanılır.

2. NEWTON YAKLAŞIMLARI

D tam kare olamayan pozitif tam sayı olmak üzere, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının periyodik sürekli kesir açılımına göre elde edilen yaklaşımları,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{P_n}{Q_n}+\frac{DQ_n}{P_n}\right)$$

eşitliğinde yerine yazarak, Newton yaklaşımları elde edilir. Newton yaklaşımları, bazı durumlarda normal yaklaşım değerine eşit olurken, bazı durumlarda ise eşit olmamaktadır. Newton yaklaşımının, normal yaklaşım değerine eşit olması, $\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının, periyodik sürekli kesir açılımının periyot uzunluğu olan s sayısı ile ilgilidir[2]. Örneğin periyot uzunluğu 1 olan $\sqrt{2}=(1;2)$ sayısının, herhangi bir yaklaşımına göre hesaplanan Newton yaklaşımı, Newton yaklaşımı hesaplanırken kullanılan yaklaşım değerinden farklı bir normal yaklaşım değerine eşittir. Benzer durum periyot uzunluğu 2 olan $\sqrt{3}=(1;1,2)$ ve $\sqrt{8}=(2;1,4)$ kuadratik irrasyonel sayıları için de geçerlidir.

$\sqrt{D}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımı kullanılarak Newton yaklaşımları

$$\frac{1}{2}\left(r_n+\frac{D}{r_n}\right)=r_{n+1} \tag{2.1}$$

formülüyle hesaplanır. Kuadratik irrasyonel sayıların Newton yaklaşımları, periyod uzunluğuna bağlı olarak kimi zaman sürekli kesire göre yaklaşım değerine eşit olurken, kimi zaman da eşit olmadığı aşağıdaki teoremler yardımıyla da görülebilir.

Teorem 2.1 s, kuadratik irrasyonel sayıyı temsil eden sürekli kesrin periyodu olsun.

$$r=\begin{cases} s, & \text{s tek} \\ \dfrac{s}{2}, & \text{s çift}\end{cases}$$

olmak üzere, her n sayısı için

$$R_{2nr}=\frac{1}{2}\left(R_{nr}+\frac{D}{R_{nr}}\right) \tag{2.2}$$

dır[4].

Aşağıda bu teoremle ilgili çeşitli örnekler incelendi.

Örnek 2.1 $\sqrt{21}$ sayısının Newton yaklaşımları incelenecektir. $\sqrt{21}=(4;1,1,2,1,1,8)$ olup, Tablo 2.1 düzenlenirse, yaklaşımların karşılaştırılması kolaylıkla görülmüş olur.

Aşağıda $\sqrt{21}$ için (2.2) eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir. $\sqrt{21}$ sayısının periyodu $s=6$ olduğu için, $r=3$ alınmalıdır. $r=3$ için ,

$$R_{6n}=\frac{1}{2}\left(R_{3n}+\frac{21}{R_{3n}}\right)$$

Tablo 2.1 $\sqrt{21}$ İrrasyonel Sayısının Yaklaşımları

n	P_n	Q_n
1	4	1
2	5	1
3	9	2
4	23	5
5	32	7
⋮	⋮	⋮

olur. $n=1$, $n=2$, $n=3$ değerleri için, formülün doğruluğu incelenirse,

n = 1 için, $\frac{1}{2}\left(R_3+\frac{21}{R_3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+\frac{21}{\frac{9}{2}}\right)=\frac{55}{12}=R_6$,

iç n = 2 in, $\frac{1}{2}\left(R_6+\frac{21}{R_6}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{55}{12}+\frac{21}{\frac{55}{12}}\right)=\frac{6049}{1320}=R_{12}$,

n = 3 için;

$$\frac{1}{2}\left(R_9+\frac{21}{R_9}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{999}{218}+\frac{21}{\frac{999}{218}}\right)=\frac{665335}{145188}=R_{18}$$

bulunmuş olur. Yani, bu değerler için formül gerçeklenmiş oldu.

Sonuç 2.1: Aşağıdaki örnekte, periyod uzunluğu 5 olan, $\sqrt{53}=(7;3,1,1,3,14)$ kuadratik irrasyonel sayısının, yaklaşımları ile Newton yaklaşımları arasındaki ilişkiyi veren bağıntı verilmiş ve bu bağıntının sağlandığı gösterilmiştir. Fakat bu eşitlik, periyodu 5 olan bütün kuadratik irrasyonel sayılar için geçerli olan bir eşitlik değildir. Örneğin (2.2) eşitliği periyod uzunluğu 5 olan, $\sqrt{13}=(3;1,1,1,1,6)$ ve $\sqrt{53}=(7;3,1,1,3,14)$ sayıları için sağlanırken, $\sqrt{74}=(8;1,1,1,1,16)$ sayısı için sağlanmamaktadır.

$$\frac{1}{2}\left(R_k+\frac{D}{R_k}\right)=\begin{cases}\dfrac{P_{2k}}{Q_{2k}}, & k=5n\\ \dfrac{P_{2k-2}}{Q_{2k-2}}, & k=5n-1\\ \dfrac{P_{2k+2}}{Q_{2k+2}}, & k=5n+1\end{cases} \quad (2.3)$$

Örnek 2.2 Bu örnekte, (2.3) eşitliğini inceleyebilmek için, $\sqrt{53}=(7;3,1,1,3,14)$ kuadratik irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu yapılmıştır.

Tablo 3.2.5 $\sqrt{53}$ irrasyonel sayısının yaklaşımlarının tablosu

n	P_n	Q_n
1	7	1
2	22	3
3	29	4
4	51	7
5	182	25
6	2599	357
7	7979	1096
8	10578	1453
9	18557	2549
10	66249	9100
11	946043	129949
12	2904378	398947
13	3850421	528896
14	6754799	927843
15	24114818	3312425
16	344362251	47301793
17	1057201571	145217804
18	1401563822	192519597
19	2458765393	337737401
20	8777860001	1205731800
21	125348805407	17217982601
22	384824276222	52859679603
23	510173081629	70077662204
24	894997357851	122937341807
25	3195165155182	438889987625
⋮	⋮	⋮

i) $k=5n$ durumu:
$n=1$ için $k=5$ olup, bu değerler (2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\frac{1}{2}\left(R_5+\frac{53}{R_5}\right)=\frac{P_{10}}{Q_{10}}$ elde edilir.

Gerçekten de; $\frac{1}{2}\left(\frac{182}{25}+\frac{53}{\frac{182}{25}}\right)=\frac{66249}{9100}=\frac{P_{10}}{Q_{10}}$ olup, (2.2) eşitliği sağlanır.

$n=2$ için $k=10$ olup, yine bu değerler (2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\left(R_{10}+\frac{53}{R_{10}}\right)=\frac{P_{20}}{Q_{20}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{66249}{9100}+\frac{53}{\frac{66249}{9100}}\right)=\frac{8777860001}{1205731800}=\frac{P_{20}}{Q_{20}}$$

olup (2.2) eşitliği sağlanır.

ii) $k=5n-1$ durumu:
$n=1$ için $k=4$ olup, bu değerler (2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\frac{1}{2}\left(R_4+\frac{53}{R_4}\right)=\frac{P_6}{Q_6}$ elde edilir. Gerçekten,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{51}{7}+\frac{53}{\frac{51}{7}}\right)=\frac{2599}{357}=\frac{P_6}{Q_6}$$

olup, (2.2) eşitliği sağlanır.

$n=2$ için $k=9$ olup, bu değerler (2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\left(R_9+\frac{53}{R_9}\right)=\frac{P_{16}}{Q_{16}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{18557}{2549}+\frac{53}{\frac{18557}{2549}}\right)=\frac{344362251}{47301793}=\frac{P_{16}}{Q_{16}}$$

olup (2.2) eşitliği sağlanmış olur.

iii) $k=5n+1$ durumu**:** $n=1$ için $k=6$ olup, bu değerler (2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\left(R_6+\frac{53}{R_6}\right)=\frac{P_{14}}{Q_{14}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2599}{357}+\frac{53}{\frac{2599}{357}}\right)=\frac{6754799}{927843}=\frac{P_{14}}{Q_{14}}$$

elde edilir ve (2.2) eşitliği sağlanmış olur. $n=2$ için $k=11$ olup, bu değerler (2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\left(R_{11}+\frac{53}{R_{11}}\right)=\frac{P_{24}}{Q_{24}}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{946043}{129949}+\frac{53}{\frac{946043}{129949}}\right)=\frac{894997357851}{122937341807}=\frac{P_{24}}{Q_{24}}$$

olup, (2.2) eşitliği sağlanmış olur.

Sonuç 2.2 Ayrıca , $\sqrt{53}$ irrasyonel sayısı için, (2.2) nolu eşitliğin, $5n\mp 2$ için genişletilemeyeceği de gösterilmiştir.

Örnek 2.3. Bu örnekte, $n=1$ için $(k=5n+2)$, $k=7$ olup, R_7 değerine göre elde edilen Newton yaklaşımının, $\sqrt{53}$ kuadratik irrasyonel sayısı için herhangi bir yakınsaklık olup olmadığı incelendi.

$$\frac{1}{2}\left(R_7+\frac{53}{R_7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7979}{1096}+\frac{53.1096}{7979}\right)=\frac{127328889}{17489968}$$

olup, bu değer $\sqrt{53}$ kuadratik irrasyonel sayısı için herhangi bir yaklaşım değildir. $n=1$ için $(k=5n-2)$, $k=3$ olup, R_3 değerine göre elde edilecek Newton yaklaşımının, $\sqrt{53}$ kuadratik irrasyonel sayısı için, herhangi bir yaklaşım olup olmadığına bakılırsa,

$$\frac{1}{2}\left(R_3+\frac{53}{R_3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{29}{4}+\frac{53.4}{29}\right)=\frac{1689}{232}$$

olup bu değer , $\sqrt{53}$ kuadratik irrasyonel sayısı için herhangi bir yaklaşım değildir.

Sonuç 2.3 $a\succ 1$, $D=a^2+4$ olmak üzere,

$$\frac{1}{2}\left(R_k+\frac{D}{R_k}\right)=\begin{cases}\dfrac{(a-2)P_{2k+1}+P_{2k}}{(a-2)Q_{2k+1}+Q_{2k}}; & \text{k=5n+2}\\[2ex] \dfrac{P_{2k}-(a-2)P_{2k-1}}{Q_{2k}-(a-2)Q_{2k-1}}; & \text{k=5n-2}\end{cases}$$

olduğu ve $D=a^2-4,\ a\succ 3$ biçiminde yazılan sayılara bu sonucun genelleştirilebileceğini [4] de Elezovic göstermiştir.

KAYNAKLAR

[1] McCoy, N.H., *The Theory of Numbers*, Macmillan, New York, 1965

[2]NIVEN,I.,and ZUCKERMAN, H.,S.,*An Introduction to the Theory of* Numbers, Second Edition, Wiley, 1991.

[3] A.Y. KHICHIN, *Continued Fractions*, Chicago, 1964.

[4] ELOZOVIC, N., *A note on continued fraction of quadratic irrationals, Mathematical Communications* , **1**, pp. 27-33 , 1996.