Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi
Fen Bilimleri Dergisi (CFD), Cilt 36, No 5 (2015)
ISSN: 1300-1949

Cumhuriyet University Faculty of Science
Science Journal (CSJ), Vol. 36, No. 5 (2015)
ISSN: 1300-1949

# Hiperyüzeylerde Optimizasyon Üzerine

Necmettin TANRIÖVER

*Başkent Üniversitesi Mühendislik Fakültesi,*

*Eskişehir Yolu 20.km, Baglica,Etimesgut,Ankara,TÜRKİYE*

Received: 10.10.2014; Accepted: 25.03.2015

**Ozet.** Bu çalışmada, önce bir hiperyüzeyin Hessian formu tanımlandı. Hessian formla, hiperyüzeyin Ikinci Temel formu arasındaki bağıntı verildi. Daha sonra, bu formlarla; bir hiperyüzeyin, verilen bir hiperdüzleme göre lokal ekstremumlarının ve kısıta bağlı ekstremumlarının nasıl hesaplanacağı açıklandı.

**Anahtar Kelimeler:** Hiperyüzey, gradient, kovaryant türev, Hessian form, ikinci temel form, ekstremum.

## Optimization on the Hypersurface

**Abstract.** In this work, we first define the Hessian form of a hypersurface, then we relate it to the Second Fundamental form of the hypersurface. In the remaining part of this work, we use these formulas to show, how to evaluate the local and restricted extreme values of the hypersurface according to a given hyperplane.

**Keywords.** Hypersurface, gradient, covariant derivative, Hessian form, second fundamental form, extremum.

## 1 Giriş

Endüstride, mühendislikte, ekonomide, tarımda, işletmelerde minimun maliyetle, maksimum ve kaliteli üretim yapmak ve maksimum kar etmek hedeflenir ([7] , [8]). Üretim ve maliyet; zaman, yatırım, emek, doğa gibi bir çok etkene, yani parametreye, değişkene bağlı birer çok değişkenli vektörel fonksiyonlardır. Bu gibi fonksiyonların geometrideki karşılıkları birer hiperyüzeydir ([5] , [6]). İşte bu çalışmada, bu amaca uygun bilgiler derlenip toplanıp iyileştirilmesi ve geliştirilmesi hedeflendi. Daha sonra, kısıtlara bağlı bir

* Corresponding author. Email address: ntanriov@baskent.edu.tr

bölgede bir hiperyüzey parçasının, orijinden geçen herhangi bir birim vektöre dik olan bir hiperdüzleme göre lokal maksimum-minimumlarının ve kısıt bölgesinin kenarlarında ve köşelerindeki hiperyüzeyin aldığı değerleri ve bunların ekstremumlarının bulunması için bir algoritma verilmeye çalışıldı. Bulunan bu değerlerin karşılaştırılması ile üretimin en uygun şekilde nasıl planlanması gerektiği belirlenebilir.

## 2 Temel Bilgiler

**Tanım 2.1:** $S$, $E^n$ de bir hiperyüzey olsun. $\forall p \in S$ için $S$,

$H_p^+ = \{q \in E^n : (q-p).N(p) \geq 0\}$ veya

$H_p^- = \{q \in E^n : (q-p).N(p) \leq 0\}$

kapalı yarıuzayları içinde kalırsa, $S$ ye konveks (global konveks)tir denir. Burada $N$, $S$ nin Gauss dönüşümüdür. $E^n$ de $R^n$ metrik uzayıdır.

**Tanım 2.2:** $S$ yönlendirilmiş bir hiperyüzey olsun. Bir $p \in S$ için $p$ yi içeren $E^n$ nin bir $V$ açık alt kümesi varsa, öyleki $(S \cap V) \subset H_p^+$ veya $(S \cap V) \subset H_p^-$ ise, $S$ ye $p$ noktasında konvekstir denir (Küçük bir aralıkta, komşulukta konveks).

**Sonuç 2.1:** Konveks bir hiperyüzey $\forall p \in S$ de konvekstir. Ancak, herhangi bir $p$ noktasında konveks olan bir hiperyüzey konveks olmak zorunda değildir.

**Tanım 2.3:** $S$ konveks bir hiperyüzey ve $\forall p \in S$ için $S \cap H_p = \{p\}$ ise $S$ ye strictly konvekstir denir. Burada $H_p$,

$$H_p = \{q \in E^n : (q-p).N(p) = 0\}$$

hiperdüzlemidir.

Bu $H_p$, $p$ noktasında $S$ ye teğet hiperdüzlem olur.

$S$, $p$ de strictly konveks ise $S$, $p$ de konveks olur.

**Tanım 2.4:** $S$, $p \in S$ de konveks bir hiperyüzey ve bu $p \in S$ için

$$(S \cap V) \cap H_p = \{p\}$$

ise $S$, $p$ de strictly konvekstir denir.

**Tanım 2.5:** $S$, $E^n$ de boş olmayan bir küme olsun. $\forall P, Q \in S$ $(P \neq Q)$ noktası için $\overline{PQ} \subset S$ ise $S$ ye konvekstir denir.

**Teorem 2.1:** $S_1, S_2$ $E^n$ de konveks iki küme ise

1. $S_1 \cap S_2$ konvekstir.
2. $S_1 + S_2 = \{p_1 + p_2;\ p_1 \in S_1,\ p_2 \in S_2\}$ konvekstir.
3. $S_1 - S_2 = \{p_1 - p_2;\ p_1 \in S_1,\ p_2 \in S_2\}$ konvekstir.

**Tanım 2.6:** $Q(x) = x^T.A.x$ bir kuadratik form olsun.
1) $\forall x \neq 0$ için $Q(x) > 0$ ise $Q$ ya pozitif tanımlıdır denir.
2) $\forall x$ için $Q(x) \geq 0$ ise $Q$ ya pozitif yarı tanımlı kuadratik form denir.

**Teorem 2.2:** $Q$ kuadratik formu pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow$ $A$ nın tüm aygen değerleri pozitiftir.

**Teorem 2.3:** Bir simetrik $A$ matrisi pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow$ $A$ nın tüm ana alt matrislerinin determinantları pozitiftir.

**Teorem 2.4:** Bir simetrik $A$ matrisi pozitif yarı tanımlıdır $\Leftrightarrow$ $A$ nın tüm aygen değerleri pozitif veya sıfırdır (negatif değil).

**Teorem 2.5:** $S$, $E^n$ de yönlendirilmiş ve $p \in S$ de konveks bir hiperyüzey ise $S$ nin ikinci temel formu $II$, $p$ de pozitif tanımlıdır. Yani, $II_p(V) > 0$ dır.

**İspat:** Farzedelim ki $p \in S$ de $(S \cap V) \subset H_p^+$ dir. $\exists\ V \subset E^n$ açığı ve $v \in S_p$ için bir $\alpha : I \to S \cap V$ eğrisi alalım öyleki $\alpha(t_0) = p$ ve $\alpha'(t_0) = v$ olsun. Bir $h : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$h(t) = (\alpha(t) - p).N(p)$$

olarak tanımlayalım. $\alpha(t) \in H_p^+$ olduğundan $h(t) \geq 0$ dır. Çünkü, $N(p)$ ile $\alpha(t) - p$ vektörü arasındaki açı dar açı olur.

$h(t_0) = 0$ olduğundan $h$, $t_0$ da mutlak minimuma ulaşır. Çünkü $h$ nin en küçük değeri 0 dır. Böylece 2. Temel Form

$$II(v) = \alpha''(t_0).N(\alpha(t_0)) = h''(t_0) \geq 0$$

bulunur. Zira, $N' = 0$ olduğundan

$$h'(t) = \alpha'(t).N(p) \Rightarrow h''(t) = \alpha''(t).N(p) + \alpha'(t).N'(p) = \alpha''(t).N(p)$$

$$\alpha''(t).N(p) = 0 \Leftrightarrow h''(t) = 0 \Leftrightarrow II(v) \geq 0 \Leftrightarrow S,\ p \text{ de konvekstir.}$$

Eğer $S \subset H_p^-$ ise $\forall v \in S_p$ için eşitsizlik ters döner. Yani $II(v) < 0$ olur.

**NOT:** Bu teoremin karşıtı doğru değildir ($z = x^2 - y^4$ yüzeyinde olduğu gibi).

**Teorem 2.6:** $S$, $p$ de konvekstir $\Longleftrightarrow$ $h$, $p$ de extremum (max veya min) değere ulaşır.

**İspat:** $p \longleftrightarrow t = t_0$ da ekstremum var $\Leftrightarrow h'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha'(t).N(p) = 0 \Leftrightarrow \alpha''(t).N(p) = 0 \Leftrightarrow h''(t) = 0 \Leftrightarrow II(v) \geq 0 \Leftrightarrow S$ $p$ de konvekstir.

**Tanım 2.7 (**Yükseklik Fonksiyonu**):** $S$, $E^n$ de bir hiperyüzey olsun. $p \in S$, $q \in S$ olmak üzere

$$\underset{h(q)=q.N(p)}{h : S \to \mathbb{R}}$$

olarak tanımlı $h$ fonksiyonuna yükseklik fonksiyonu denir. $h$ fonksiyonu değişken $q \in S$ noktasının, $N^{\perp}(p)$ altuzayına olan uzaklığını ya da yüksekliğini verir. $N^{\perp}(p)$, $O$ dan geçen $N(p)$ ye dik olan altuzaydır. Çünkü,

$$h(p) = q.N(p) = \|q\| . \|N(p)\| . \cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{h(q)}{\|q\|}$$

**NOT:** $N(p)$ birim vektörü $S$ nin $p$ deki birim normalinin $O$ ya bağlanmışıdır (Gauss dönüşümü). Bunu $Q = \sqrt{L.K}$ Coob-Douglas üretim yüzeyine uygularken, bu yüzeyi $q = S(L,K) = (L, K, \sqrt{L.K})$ olarak alınıp uygulanması gerekir.

$q = S(x,y) = (x, y, \sqrt{xy})$, $\qquad N = \frac{\nabla(Q - \sqrt{xy})}{\|\nabla(Q-\sqrt{xy})\|}$ dir.

$S$, $\mathbb{R}^3$ de bir yüzey ve $u$, $\mathbb{R}^3$ de bir birim vektör olsun. $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(q) = q.u$ olarak tanımlı $h$, fonksiyonu yükseklik fonksiyonu olur.

**Sonuç 2.2:** Yükseklik fonksiyonu $h$, $q \in S$ noktasının, $S_p\{u\}$ nun ortogonal tümleyeni olan $u^{\perp}$ altuzayı ($n$-boyutlu bir hiperdüzlem) üstündeki yüksekliğini, yani, $q \in S$ nin $u^{\perp}$ düzleminden yüksekliğini ($u^{\perp}$ düzlemine olan uzaklığını) verir.

**Örnek 2.1:** $S$ yüzeyi $Q = S(x,y) = (x, y, \sqrt{xy})$ olsun. $\overrightarrow{u} = (0,0,1) = e_3$ alalım.$q \in S$ ise $q = (x, y, \sqrt{xy})$ dir.

$$h(q) = q.u = (x, y, \sqrt{xy}).(0,0,1) = \sqrt{xy} \text{ olur.}$$

Bu $p \in S$ noktasının; $S_p\{e_3\}$ ün ortogonal tümleyeni olan $e_3^{\perp}$ uzayından; yani $x \circ y$ düzleminden olan yüksekliğini gösterir.

**Örnek 2.2:** $S$ yüzeyi $Q = S(x,y) = (x, y, 2x+3y)$ olsun. $\overrightarrow{u} = e_3 = (0,0,1)$ diyelim. $q \in S$ nin tabandan yani $x \circ y$ düzleminden yüksekliği; $h(q) = q.e_3 = 2x + 3y$ olur. Bu $q$ nun, $x \circ y$ düzleminden olan yüksekliğini gösterir.

$S$, $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir hiperyüzey olsun. $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(q) = q.N(p)$ olarak tanımlı $h$ fonksiyonuna, yükseklik fonksiyonu denmişti.

Bu fonksiyon yönlü bir uzaklık, yükseklik verir. Çünkü, $h$, iç çarpımla tanımlanmıştır.

$h$, $q \in S$ noktasının; $O$ dan geçen ve $P$ deki teğet altuzaya paralel olan altuzaya (hiperdüzleme) uzaklığını ölçer.

**Örnek 2.3:** $q = Q(x,y) = (x, y, \sqrt{xy})$ veya $Q = z - \sqrt{xy} = 0$ ise $h(q) = q.N(p)$ yükseklik fonksiyonunu hesaplayalım.

**ÇÖZÜM:** $\nabla Q = (Q_x, Q_y, Q_z) = \left(\frac{-y}{2\sqrt{xy}}, \frac{-x}{2\sqrt{xy}}, 1\right)$

$\|\nabla Q\| = \sqrt{\frac{y^2}{4xy} + \frac{x^2}{4xy} + 1} = \sqrt{\frac{y^2+x^2+4xy}{4xy}}$

$\|\nabla Q\| = \frac{\sqrt{y^2+x^2+4xy}}{2\sqrt{xy}}$

$N = \frac{\nabla Q}{\|\nabla Q\|} = \left( \frac{-y}{\sqrt{y^2+x^2+4xy}}, \frac{-x}{\sqrt{y^2+x^2+4xy}}, \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{y^2+x^2+4xy}} \right)$ olur.

Bu, $z = \sqrt{xy}$ yüzeyinin birim normal vektör alanıdır.

$q = p = (x, y, \sqrt{xy})$ ise

$$h = q.N = \frac{-y.x}{\sqrt{y^2+x^2+4xy}} + \frac{-xy}{\sqrt{y^2+x^2+4xy}} + \frac{2xy}{\sqrt{y^2+x^2+4xy}} = 0$$

çıkıyor. Ancak;

$$q = (1, 9, \sqrt{1.9}) = (1, 9, 3)$$
$$p = (1, 1, \sqrt{1.1}) = (1, 1, 1)$$

ise

$$N(p) = \left( \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)_0 \qquad \text{(0 da tanjant vektör, Gauss dönüşümü)}$$

$$h(q) = q.N(p) = (1, 9, 3). \left( \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) = \frac{-1}{\sqrt{6}} - \frac{9}{\sqrt{6}} + \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{-4}{\sqrt{6}}$$

bulunur. İç çarpım negatif çıkabilir. Bu yönlü uzaklıktır.

Bu da beklenildiği gibidir. Çünkü, bu $h$ yükseklik fonksiyonu, $q \in S$ noktasının; $S_p \{N(p)\}$ normal uzayının ortogonal tümleyeni olan $p$ deki $S$ nin teğet düzleminden $O$ ya paralel kaymışına olan uzaklığını, yani $(S_p \{N(p)\})^{\perp}$ teğet düzleminin orijine kaymışından yüksekliğini gösterir.

**Tanım 2.7:** $h : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall v \in S_p$ için $D_v h = 0$ ise yani $\alpha(t_0) = p$ olacak biçimdeki her $\alpha \subset S$ eğrisi için $(h \circ \alpha)'(t_0) = 0$ ise, $h$ ya $p$ de stationary(durağan)dır, denir. Burada $D$, kovaryant türev operatörüdür.

**Tanım 2.8:** $S$, $E^n$ de bir hiperyüzey, $h : S \to \mathbb{R}$ düzgün ($C^\infty$ sınıfından) bir fonksiyon olsun.

Yükseklik fonksiyonu $h$ nin gradient vektör alanı $\operatorname{grad} h$;

$$(\operatorname{grad} h)(p) = \nabla \widetilde{h}(p) - \left( \nabla \widetilde{h}(p).N(p) \right).N(p)$$

olarak tanımlanır. Burada $\widetilde{h}$, $h$ nın $S$ yi içeren bir açık alt küme üzerine düzgün bir genişletilmişidir. $N$ de $S$ nin birim normal vektör alanıdır.

**NOT:** $\operatorname{grad} h$, $S$ üstünde düzgün (diferensiyellenebilir) bir teğet vektör olanıdır. Ayrıca, $\operatorname{grad} h$, $\nabla \widetilde{h}$ nın teğetsel bileşenidir.

**Teorem 2.7:** $\operatorname{grad} h$, aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $\forall p \in S$, $\forall v \in S_p$ için $D_v h = (\operatorname{grad} h)(p).v$ dir. ($D_v h$, $E^n$ deki kovaryant türev)

2. $\alpha : I \to S$ herhangi parametrelendirilmiş bir eğri ise,

$$(h \circ \alpha)'(t) = ((\operatorname{grad} h)(\alpha(t))).\dot{\alpha}(t)$$

dir.

3. $(\operatorname{grad} h)(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} (D_{v_i} h).v_i$ dir. Burada $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $S_p$ nin ortonormal bir bazıdır.

4. $(\operatorname{grad} h)(p) = 0 \Leftrightarrow h$, $p$ de stationary(durağan, sabit) dir.

Özellikle, $\operatorname{grad} h$, $\widetilde{h}$ genişletmesinin seçilişinden bağımsızdır. 2. özellik, zincir kuralının bir değişik formudur ([1]).

**İspat:**

1) $D_v h = D_v \widetilde{h} = D\widetilde{h}(p).v = (\operatorname{grad} h)(p).v$ olduğundan 1. özellik doğrudur.

2) $(h \circ \alpha)'(t) = D_{\dot{\alpha}(t)} h$ olduğundan ve 1. den 2. özellik elde edilir.

3) $j \in \{1, 2, ..., n\}$ için $v_j$ ile 2 nin iki tarafını çarparsak

$$v_j.(h \circ \alpha)'(t) = v_j.D_{\dot{\alpha}(t)} h$$

ve 1. kullanılırsa, 3 ün doğru olduğu görülür.

4) 1. ve 3. özellik; birlikte gerektirir ki

$$\forall v \in S_p \text{ için } (\operatorname{grad} h)(p) = 0 \Leftrightarrow D_v h = 0$$

Bu da 4. özelliği oluşturur. (Çünkü, $\forall v \in S_p$ için $D_v h = 0$ ise $h : S \to \mathbb{R}$, $p \in S$ de stationary (durağan)dır. Yani $S$ de $\alpha(t_0) = p$ olmak üzere her parametrelendirilmiş $\alpha$ eğrisi için $(h \circ \alpha)'(t) = 0$ dır.)

**Tanım 2.9:** $h : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bir $p \in S$ noktasında stationary ise yani $(\operatorname{grad} h)(p) = 0$ ise, $p$ ye $h$ nın kritik noktası denir.

Düzgün bir $h : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu kritik noktalarda üç çeşit durum gösterir: Lokal minimum, lokal maksimum, eyer noktası.

# 3 Hiperyüzeylerde Ekstremumlar

**Tanım 3.1:** $W$, $E^n$ nin bir açık alt kümesi, $v = W \cap S$ ise $v \subset S$ ye $S$ nin bir açık alt kümesi denir.

**Tanım 3.2:** $h : S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $p \in v \subset S$ ve $v$, $S$ nin bir açık alt kümesi olsun.

1) $\forall q \in v$ için $h(q) \geq h(p)$ ise $h$, $p$ de lokal minimuma ulaşır denir.

2) $\forall q \in v$ için $h(q) \leq h(p)$ ise $h$, $p$ de lokal maksimuma ulaşır denir.
3) $h$, $p$ de stationary ve extremuma sahip değilse $p$ ye eyer noktası denir.
4) Eşitlikler yoksa, $h$, $p$ de strictly lokal extremuma sahiptir, denir.

$(\operatorname{grad} h)(p) = 0$, $h$ nın kritik bir $p$ noktası için 1. türev testidir.

Kritik noktaların tipini ayırtetmek için 2. türev testine ihtiyaç vardır.

**Tanım 3.4 (**Hessian Form**):** $h : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir kritik noktası $p$ olsun.

$$H_p : S_p \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} H_p(v) &= D_v(\operatorname{grad} h).v \\ &= D_v(\operatorname{grad} h) \end{aligned}$$

formuna, $h$ nin $p$ deki Hessian'i denir [1, 2, 3, 9].

Böylece $H_p$; $v$ yi $D_v(\operatorname{grad} h)$ ya gönderen, $S$ üstünde self-anjoint lineer bir dönüşümle birleştirilmiş bir kuadratik form olur.

$$\forall v \in S_p \text{ için } D_v(\operatorname{grad} h) \in S_p.$$

Çünkü $\operatorname{grad} h = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} D_v(\operatorname{grad} h).N(p) &= D_v((\operatorname{grad} h).N) - (\operatorname{grad} h)(p).D_v N \\ &= D_v(0) - 0.D_v N = 0 \Longrightarrow D_v(\operatorname{grad} h) \in S_p \end{aligned}$$

bulunur.

**Teorem 3.1 (**Lokal Extremumlar için 2. türev testi**):** $S$, $E^n$ de bir hiperyüzey, $h : S \to \mathbb{R}$, $p \in S$ noktasında stationary olan bir düzgün fonksiyon ve $H_p$, $p$ noktasında $h$ nin Hessian'ı olsun.

1) Eğer $h$, $p$ de lokal minimuma sahipse $H_p$ yarı pozitif definittir. Yani;

$$(H_p(v) \geq 0),$$

eğer $h$, $p$ de lokal maksimuma sahipse $H_p$ yarı negatif definittir. Yani;

$$(H_p(v) \leq 0).$$

dır.

2) Eğer $H_p$ pozitif definit $(H_p(v) > 0)$ ise $h$, $p$ de bir strict lokal minimuma sahiptir. Eğer $H_p$ negatif definit $(H_p(v) < 0)$ ise $h$, $p$ de bir strict lokal maksimuma sahiptir [1].

**İspat:**

1) Farzedelim ki $h$, $p$ de lokal minimuma sahip olsun. $v \in S_p$ için $\dot{\alpha}(t_0) = v$ olacak biçimde bir $\alpha : I \to S$ eğrisini alalım. O zaman $\forall t \in I$ için

$$(h \circ \alpha)'(t) = (\operatorname{grad} h)(\alpha(t)).\dot{\alpha}(t)$$

dir. iki tarafın $t$ ye göre türevi alınır ve $t = t_0$ konursa

$$0 \leq (h \circ \alpha)''(t_0) = D_v(\operatorname{grad} h).\dot{\alpha}(t_0) + (\operatorname{grad} h)(\alpha(t)).\dot{\alpha}(t_0) = H_p(v)$$

bulunur. Çünkü $(\operatorname{grad} h)(p) = 0$ dır.

Böylece $H_p$ yarı pozitif definit bulunur.

Lokal maksimum için ispat benzer biçimde yapılır.

2) Bunun ispatı için, eğer $h$, $p$ de strict lokal minimuma sahip değilse $H_p$ nin pozitif definit olamayacağını göstermek yeterlidir. Çünkü $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ dir.

Farzedelim ki $h$, $p$ de strict lokal minimuma sahip olmasın. O zaman $S - \{p\}$ de bir $\{p_k\}$ dizisi olmalıdır, $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = p$ olacak biçimde, öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}^+$ için $h(p_k) \leq h(p)$

Her bir $k$ için $v_k = \frac{(p_k - p)}{\|p_k - p\|}$ diyelim. O zaman $\{v_k\}$, $S^n$ birim küresinde bir dizidir. $S^n$ kompakt olduğundan, $\{v_k\}$ yakınsak bir alt diziye sahip olmalıdır. $v = \lim\limits_{k\to\infty} v_k$ olsun.

$v = (p, v) \in S_p$ ve $H_p(v) \leq 0$ olduğunu göstereceğiz.

$W$, $\mathbb{R}^{n+1}$ de $p$ yi taşıyan bir açık yuvarlak olsun, öyle ki $h$ nin düzgün genişletilmesi $\widetilde{h}$ ve ($S$ de tanımlı düzgün bir fonksiyon $f^{-1}(c)$ olmak üzere) $f$, $W$ üstünde tanımlıdır. O zaman, yeterli büyüklükteki $k$ için $p_k \in W$ olur. $g(t) = f(p + t.v_k)$ ya ortalama değer teoremini uygularsak, $\exists t_k \in (0, \|p_k - p\|)$ için

$$0 = \frac{f(p_k) - f(p)}{\|p_k - p\|} = \frac{g(\|p_k - p\|) - g(0)}{\|p_k - p\| - 0} = g'(t_k) = \nabla f(p + t_k.v_k).v$$

bulunur. Burada $V_k = (p + t_k.V_k, V_k)$ dır. $k \to \infty$ için limit alırsak $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ olduğundan $0 = \nabla f(p).v$ bulunur. Dolayısıyla $v \in S_p$ dir.

Şimdi $H_p(v) \leq 0$ olduğunu gösterelim.

$$(\operatorname{grad} h)(p) = 0 \text{ ve } \lambda = \frac{\nabla \widetilde{h}(p).\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|^2}$$

olduğundan $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ için $\nabla \widetilde{h}(p) = \lambda \nabla f(p)$ dir. $\alpha_k(t) = p + t.v_k$ olmak üzere Taylor teoremini $g_k(t) = \left(\widetilde{h} - \lambda f\right)(\alpha_k(t))$ ye uygulayalım.

$$g_k'(t) = \nabla\left(\widetilde{h} - \lambda f\right)(\alpha_k(t)).\dot{\alpha}_k(t) = \left(\nabla\widetilde{h} - \lambda\nabla f\right)(\alpha_k(t)).(\alpha_k(t), v_k)$$

ve

$$g_k''(t) = \nabla_{\dot{\alpha}_k(t)}\left(\nabla\widetilde{h} - \lambda\nabla f\right)(\alpha_k(t), v_k)$$

olduğundan $\exists t_k \in (0, \|p_k - p\|)$ için

$$\begin{aligned} g_k(\|p_k - p\|) &= g_k(0) + g_k'(0)\|p_k - p\| + \frac{1}{2}g_k''(t_k)\|p_k - p\|^2 \\ &= g_k(0) + \left(\left(\nabla\widetilde{h} - \lambda\nabla f\right)(p).(p, p_k)\right).\|p_k - p\| \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\nabla_{\dot{\alpha}_k(t)}\left(\nabla\widetilde{h} - \lambda\nabla f\right)\right)(\alpha_k(t), v_k).\|p_k - p\|^2 \end{aligned}$$

bulunur.

$\nabla\widetilde{h}(p) = \lambda\nabla f(p)$ olduğundan, orta terim 0 dir.

Böylece

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{h(p_k) - h(p)}{\|p_k - p\|^2} = \frac{\widetilde{h}(p_k) - \widetilde{h}(p)}{\|p_k - p\|^2} \qquad (f(p_k) = f(p) = c \text{ olduğundan}) \\ &= \frac{\left(\widetilde{h} - \lambda f\right)(p_k) - \left(\widetilde{h} - \lambda f\right)(p)}{\|p_k - p\|^2} \\ &= \frac{g_k(\|p_k - p\|) - g_k(0)}{\|p_k - p\|^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(D_{\dot{\alpha}_k(t)}\left(\nabla\widetilde{h} - \lambda\nabla f\right)\right).(\alpha_k(t_k), v_k) \end{aligned}$$

elde edilir.

$k \to \infty$ için limit alınırsa,

$$0 \geq \frac{1}{2}D_v\left(\nabla\widetilde{h} - \lambda\nabla f\right).v \quad ... \ (1)$$

bulunur. Oysa,

$$
\begin{aligned}
H_p(v) &= D_v\left(\operatorname{grad} h\right).v \\
&= D_v\left(\nabla\widetilde{h}-\left(\nabla\widetilde{h}-N\right)N\right).v \\
&= D_v\left(\nabla\widetilde{h}-\frac{\nabla\widetilde{h}.\nabla f}{\left\|\nabla f\right\|^2}.\nabla f\right).v \\
&= D_v\left(\nabla\widetilde{h}\right)v-\nabla_v\left(\frac{\nabla\widetilde{h}.\nabla f}{\left\|\nabla f\right\|^2}\right)\nabla f(p).v-\left(\frac{\nabla\widetilde{h}.\nabla f}{\left\|\nabla f\right\|^2}\right)(p).\nabla_v\left(\nabla f\right).v \\
&= D_v\left(\nabla\widetilde{h}\right).v-\lambda\nabla_v\left(\nabla f\right).v \\
&= D_v\left(\nabla\widetilde{h}-\lambda\nabla f\right).v
\end{aligned}
$$

dir. Buna göre, (1) den $H_p(v)\leq 0$ elde edilir [1].

O halde, $h$, $p$ noktasında strict lokal minimuma sahip değilse $S$ nin Hessian'ı $H_p$ pozitif definit olamaz.

$h$, $p$ de strict lokal maksimuma sahip değilse, $H$ nin negatif definit olamayacağı benzer biçimde ispatlanır.

$H_p(v)$ nin işareti incelenerek, $p$ noktasının lokal extremum nokta olup olmadığı belirlenir.

**Örnek 3.1:** $q=Q(x,y)=\left(x,y,\sqrt{xy}\right)$, $(x,y>0\ )$ ve $z-\sqrt{xy}=0$ yüzeyi $S$ olsun. $u=(0,0,1)=e_3$ için $h(q)=q.u=\sqrt{xy}$ olur.

$$
\operatorname{grad} h=\left(\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y}\right)=\left(\frac{y}{2\sqrt{xy}},\frac{x}{2\sqrt{xy}}\right)=\left(\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}},\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\right)=(Y_1,Y_2)
$$

olur. $\operatorname{grad} h=0$ ın kökü yok. O halde $S$ nin kritik noktası yoktur.

$h$ nin Hessian'ı $H_p(v)=D_v\left(\operatorname{grad} h\right).v$ den hesaplanır.

$$
\begin{aligned}
D_v\left(\operatorname{grad} h\right) &= \left(v.\operatorname{grad} Y_1, v\operatorname{grad} Y_2\right) \\
&= \left(v.\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x},\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right),v.\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x},\frac{\partial Y_2}{\partial y}\right)\right)
\end{aligned}
$$

dir.

$S$ üstüne $x=t$, $y=1-t$, $z=\sqrt{t\left(1-t\right)}$ eğrisini

$$
\alpha(t)=\left(t,1-t,\sqrt{t-t^2}\right)
$$

olarak alalım.

$$v = \alpha'(t) = \left(1, -1, \frac{1-2t}{2\sqrt{t-t^2}}\right)$$

olur.

$S_p$ teğet uzayın bir baz $B = \{Q_x \mid_p, Q_y \mid_p\}$ dir.

$Q_x = \left(1, 0, \frac{y}{2\sqrt{xy}}\right)$, $Q_y = \left(0, 1, \frac{x}{2\sqrt{xy}}\right)$ vektör alanları $\alpha$ eğrisi boyunca, $x = t$, $y = 1-t$ olduğundan, $Q_x = \left(1, 0, \frac{1-t}{2\sqrt{t(1-t)}}\right)$, $Q_y = \left(0, 1, \frac{t}{2\sqrt{t(1-t)}}\right)$ ye dönüşür. Bu $B$ bazına göre $v$ vektörü $v = 1.Q_x - 1.Q_y = (1, -1)_B$ olur.

$$v.\mathrm{grad}\, Y_1 = 1.\frac{\partial Y_1}{\partial x} - 1.\frac{\partial Y_1}{\partial y}$$

$$v.\mathrm{grad}\, Y_2 = 1.\frac{\partial Y_2}{\partial x} - 1.\mathrm{grad}\, Y_2 \partial y$$

olduğundan

$$\begin{aligned} D_v\left(\mathrm{grad}\, h\right) &= \left(v.\mathrm{grad}\, Y_1, v.\mathrm{grad}\, Y_2\right) \\ &= \left(\frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_1}{\partial y}, \frac{\partial Y_2}{\partial x} - \frac{\partial Y_2}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

olur.

$h$ nın Hessian'ı

$$H_p(v) = D_v\left(\mathrm{grand}\, h\right).v = 1.\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x} - \frac{\partial Y_1}{\partial y}\right) - 1.\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x} - \frac{\partial Y_2}{\partial y}\right)$$

$$H_p(v) = -\frac{\sqrt{y}}{4x\sqrt{x}} - \frac{1}{6\sqrt{xy}} - \frac{\sqrt{x}}{4y\sqrt{y}}$$

bulunur. $x.y > 0 \Longrightarrow H_p(v) < 0$. Ancak, $\mathrm{grad}\, h = 0$ ın kökü olmadığından $p$ kritik nokta değildir. O halde $S$ nin lokal extremumu yoktur.

**Teorem 3.2:** $u$, $E^n$ de birim vektör ve $p$, $S$ nin bir kritik noktası ise

$$H_p(v) = \mp II_p(v)$$

dir.[1]

**İspat:** $u$, $E^n$ nin bir birim vektörü olsun. $h : S \to \mathbb{R}$ yükseklik fonksiyonu için

$$h_u(q) = q.u$$

olarak tanımlı $h_u$ yükseklik fonksiyonunu alalım. Bu $q$ nun $u^{\perp}$ hiperdüzlemine olan uzaklığını (yüksekliğini) verir.

$\forall p \in E^n$ ve $\forall v \in T_{E^n}(q)$ için

$$\widetilde{h}_u(q) = q.u$$

$$D\widetilde{h}_u(q) = (q, u)$$

$$D_v\left(\nabla\widetilde{h}_u\right) = 0$$

dır. $\widetilde{h}_u\mid_s = h_u$ dir.

$p \in S$, $h_u$ nun kritik noktasıdır $\Longleftrightarrow (p,u) = \lambda\nabla f(p),\quad \lambda \in \mathbb{R}$. $u$ birim vektör olduğundan

$$|\lambda| = \frac{1}{\|\nabla f(p)\|}$$

olmalıdır. Böylece $p$ kritik noktadır $\Longleftrightarrow (p,u) = \mp N(p)$

Eğer, $p$, $h_u$ nun kritik noktası ve $v \in S_p$ ise

$$\begin{aligned} H_p(v) &= D_v\left(\nabla\widetilde{h}_u - \left(\nabla\widetilde{h}_u.N\right)N\right).v \\ &= \left(\nabla\widetilde{h}_u.N\right)(p)\left(-\nabla_v N.v\right) \\ &= (u.N(p))\, II_p(v) \\ &= \mp 1.II_p(v) \end{aligned}$$

bulunur [1].

**Teorem 3.3:** $S$, $E^n$ de yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve $S$ nin ikinci temel formu $II$, $p$ de pozitif veya negatif definit ise $S$, $p$ de strictly konvekstir.

**İspat:** $S$ nin $p$ de strictly konveks olması için gerek ve yeter koşul, $h_{N(p)} : S \to \mathbb{R}$ yükseklik fonksiyonunun $p$ de strict lokal extremumma sahip olmasıdır. Bu ise $h_{N(p)}$ nin $p$ de stationary olması halidir.

$$H_p = \mp II_p$$

olduğundan $II_p$ definit olur ($II_p > 0$ veya $II_p < 0$).

Bu durumda $S$, $p$ noktasında bir extremum değere sahiptir. Dolayısıyla $S$ nin extremum noktalarını bulmak için ikinci temel formdan da yararlanılabilinir.

# 4 Hiperyüzeylerde Optimizasyon

1) Optimizasyon problemlerinde, optimum (ekstremum) uygun noktaları bulmak için önce, hiperyüzeyin kritik noktaları bulunur. Hessian'ın bu noktalarda aldığı değerlere bakarak noktaların maksimum veya minimum oldukları ayırtedilebilir. Bunlar lokal ekstremum noktalardır.

2) Kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde ise, kısıtlılık bölgesinin köşelerinde aldığı değerlerle, kısıt altuzay parçalarında fonksiyonun aldığı ekstremum değerler araştırılır.

Bunun için, kısıt bölgesinin yüzlerini oluşturan alt uzay parçaları ile (ayırtlar, şimdilik lineer yarı alt uzay parçaları) asıl hiperyüzeyin alt hiperyüzeyleri alınır. Bunların tümünün ekstremumları aynı yöntemle hesaplanır. Bunlar, lokal ekstremum değerler ile karşılaştırılır. En büyük değer veya en küçük değer, çözüm için istenen optimum değerlerdir.

3) Daha sonra bulunan tüm ekstremum değerler bir kümede toplanır. Bu kümenin en büyük elemanı veya en küçük elemanı istenen optimum değerlerdir.

**NOT:** Bu hesaplamalarda, Simpleks yönetimi gibi bilgisayar programlarından yararlanılabilir. Kısıtlar lineer olmadığı takdirde, Lagrange çarpanı yönteminden de yararlanılabilir [7, 8].

Şimdi, yukarıda verilen teorik bilgilerin, uygulamalarda nasıl yapılacağını gösteren birkaç örnek verelim.

**Örnek 4.1:** $S$ yüzeyi $q = Q(x,y) = (x, y, \sqrt{xy})$ parametrizasyonu ile verilsin. $B = \{x \geq 0,\ y \geq o,\ x + y \leq 1\}$ kısıtlayıcısına göre $u = (0,0,1)$ yönünde $u^{\perp}$ uzayına göre ($x \circ y$ düzlemine göre) ekstremum noktalarını ve değerlerini bulalım.

1) Yükseklik fonksiyonu $h(q) = \sqrt{xy}$ idi. $\operatorname{grad} h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = (0,0) \Rightarrow$ $\frac{y}{2\sqrt{xy}} = 0$, $\frac{x}{2\sqrt{xy}} = 0$ için $x, y \in \mathbb{R}$ yoktur. Dolayısıyla $B$ bölgesinde lokal ekstremumlar yoktur.

2) $B$ bölgesinin köşe noktaları $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ dir.

$Q(0,0) = (0,0,0)$, $\quad Q(1,0) = (1,0,0)$, $\quad Q(0,1) = (0,1,0)$ dır.

Buradaki yükseklikler 0 dır.

3) $B$ bölgesinin sınır altuzay parçaları $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ ve $\overline{AC}$ doğru parçalarıdır. $\overline{OA}$ ya karşılık gelen yüzey parçası $Q(x,0) = (x, 0, \sqrt{x.0}) = (x,0,0)$ doğrusudur. Buradaki yükseklik 0 dır. $\overline{OC}$ ye karşılık gelen yüzey parçası $Q(0,y) = (0, y, \sqrt{0.y}) = (0,y,0)$ doğrusudur. Buradaki yükseklik de 0 dır. $\overline{AC}$ ye karşılık gelen yüzey parçası $Q(t, 1-t) = (1, 1-t, \sqrt{t - t^2})$ eğrisidir. Yük-

sekliği $h = \sqrt{t - t^2}$ dir.

$$h'(t) = \frac{1-2t}{2\sqrt{t-t^2}} = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ için } h = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{ çıkar.}$$

Bu maksimum değerdir. Maksimum nokta $Q(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ noktasıdır.

Bütün bunlar gözönüne alınırsa, $S$ nın $B$ üstünde maksimum noktasının $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ noktası olduğu, maksimum değerinin de $\frac{1}{2}$ olduğu anlaşılır.

**Örnek 4.2:** $S$ yüzeyi $q = Q(x,y) = \left(x, y, x^2 + y^2 + 1\right)$ yani $z - x^2 - y^2 - 1 = 0$ olsun. $u = (0,0,1) = e_3$ için $h(q) = q.u = x^2 + y^2 + 1$ olur. Ekxtremumları bulalım.

$\operatorname{grad} h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = (2x, 2y) = (Y_1, Y_2) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ y = 0 \Longrightarrow$ $(0,0,1) = p \in S$ noktası $S$ nin kritik noktasıdır. $h$ nin Hessian'ı

$$\begin{aligned} H_p(v) &= D_v(\operatorname{grad} h).v \\ &= (v.\operatorname{grad} Y_1, v.\operatorname{grad} Y_2) \\ &= \left(v.\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x}, \frac{\partial Y_1}{\partial y}\right), v.\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x}, \frac{\partial Y_2}{\partial y}\right)\right) \end{aligned}$$

den hesaplanır.

$S$ üstünde $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1$ eğrisini, yani

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1)$$

çemberini alalım.

$$v = \alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

olur. $S_p$ teğet uzayının bir bazı $B = \{Q_x, Q_y\}$ dir.

$Q_x = (1, 0, 2x)$, $\quad Q_y = (0, 1, 2y)$ vektör alanlarını $\alpha$ eğrisini kısıtlarsak $Q_x = (1, 0, 2\cos t)$, $\quad Q_y = (0, 1, 2\sin t)$ olur. Bu $B$ bazına göre $v$ vektörü $v = (-\sin t, \cos t)_B$ olarak yazılır.

$v.\operatorname{grad} Y_1 = (-\sin t, \cos t)\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x}, \frac{\partial Y_1}{\partial y}\right) = (-\sin t, \cos t).(2, 0) = -2\sin t$

$v.\operatorname{grad} Y_2 = (-\sin t, \cos t)\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x}, \frac{\partial Y_2}{\partial y}\right) = (-\sin t, \cos t).(0, 2) = 2\cos t$ çıkar.

$D_v(\operatorname{grad} h) = (v.\operatorname{grad} Y_1, v.\operatorname{grad} Y_2) = (-2\sin t, 2\cos t)$ olur.

$h$ nin Hessian'ı $H_p(v) = D_v(\operatorname{grad} h).v = 2\sin^2 t + 2\cos^2 t = 2 > 0$

$\forall x, y$ için $H_p = 1 > 0 \Longrightarrow p = (0,0,1)$ lokal minimumdur.

**2.YOL:** $\quad z = x^2 + y^2 + 1$

$z_x = 2x \qquad z_y = 2y \qquad z_{xx} = 2 \qquad z_{yy} = 2 \qquad z_{xy} = 0$ olduğundan

$H = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Longrightarrow x = 0, y = 0$ de lokal minimum var.

Şimdi $S$ nin $p(0,0,1)$ noktasında 2. temel formunu bulalım.

$$Q(x,y) = \big(x, y, x^2 + y^2 + 1\big)$$

idi.

$Q_x = (1,0,2x), \quad Q_y = (0,1,2y) \implies \|Q_x\| = \sqrt{1+4x^2},\ \|Q_y\| = \sqrt{1+4y^2}$

$Q_{xx} = (0,0,2), \quad Q_{yy} = (0,0,2), \quad Q_{xy} = (0,0,0) = Q_{yx}$

$Q_x.Q_y \neq 0 \implies$ Şekil operatörünün matrisi

$$W = \begin{bmatrix} \frac{-\det(Q_{xx},Q_x,Q_y)}{\|Q_x\|^3\|Q_y\|} & \frac{-\det(Q_{xy},Q_x,Q_y)}{\|Q_x\|^2\|Q_y\|^2} \\ \frac{-\det(Q_{xy},Q_x,Q_y)}{\|Q_x\|^2\|Q_y\|^2} & \frac{-\det(Q_{yy},Q_x,Q_y)}{\|Q_x\|^3\|Q_y\|} \end{bmatrix}$$

dir.

$\det(Q_{xx}, Q_x, Q_y) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = 2;$

$\det(Q_{yy}, Q_x, Q_y) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = 2$ olduğundan

$W = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{(1+4x^2)^3}\sqrt{1+4y^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{(1+4x^2)^3}\sqrt{1+4y^2}} \end{bmatrix}$ olur.

$x = 0, \quad y = 0$ için $W\,|_p = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ çıkar.

$p = (0,0,1)$ deki İkinci Temel form: $W_p(v).v$ dir.

$$W_p(v) = (2\sin t, -2\cos t)$$

olur.

$$II_{p(v)} = W_p(v).v = -2\sin^2 t - 2\cos^2 t = -2$$

bulunur.

$p = (0,0,1)$ deki Hessian'da $H_p(v) = 2$ bulunmuştu.

O halde, gerçekten $H_p(v) = \mp II_p(v).v$ dir.

$S$ yüzeyi $q = Q(x,y) = \big(x, y, x^2 + y^2 + 1\big)$ in Gauss dönüşümünü bulalım.

Bu yüzeyin herhangi bir $p$ noktasında normal vektör alanı $N$,

$$N = Q_x \wedge Q_y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)$$

dir. $\|N\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$

Birim normal vektör alanı

$N = \frac{N}{\|N\|} = \left( \frac{-2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{-2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \right)$ dir.

$p = (1, 1, 3)$ için $N_p = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)_p$ dir. Bunun orijine yani $O$ ya paralel taşınmışı olan tanjant vektör (Gauss dönüşümü yapılmış oluyor) $N(p) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)_O$ veya $N(p) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ olur.

Değişken $q \in S$ noktası için $h$ yükseklik fonksiyonu

$$h(q) = q.N(q) = \left(x, y, x^2 + y^2 + 1\right) . \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$h(q) = \frac{-2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{1}{3}$$

olur. Bu, $h$ fonksiyonunun değişken $q \in S$ noktasının $N^{\perp}(p) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)_O^{\perp}$ dik uzayına göre yüksekliğini verir.

Özel olarak $h(p) = h(1,1) = -\frac{1}{3}$ değeri $p$ nin $N^{\perp}(p)$ altuzayına olan yönlü uzaklığı gösterir. Bu altuzaya mutlak uzaklığı $\frac{1}{3}$ demektir.

Bu hesaplamalar, herhangibir vektör yönünde ve herhangibir düzleme göre, benzer biçimde yapılabilir. Ancak, hesaplar biraz daha karışık olur.

## 5 Sonuç ve Tartışma

Endüstride ve ekonomide üretim, toplam maliyet gibi kavramlar en önemli kavramlardır. Bazı durumlarda bunların matematiksel olarak birer fonksiyon oldukları görülür.[4]. Çok boyutlu üretim ve bunların toplam maliyet fonksiyonları $n$-değişkenli, $m$-boyutlu lineer veya nonlineer vektörel fonksiyonlar olarak karşımıza çıkar. Bunların analitik ifadeleri, yani formülüzasyonları belirlenmişse; gelecekte emek, yatırım, zaman gibi parametrelerin değişiminde üretimin ne olacağı, toplam maliyetin ne olacağı tam olarak olmasa da yaklaşık olarak kestirilebilir. Belli kısıtlar altında üretim fonksiyonu, toplam maliyet fonksiyonu gibi fonksiyonların ekstremum noktalarının veya en uygun noktalarının bilinmesi; üretim planlaması, dolayısıyla işletmelerin, kurumların, fabrikaların, imalathanelerin daha verimli çalışabilmeleri için çok önemli katkılar sağlar.

# 6 Kaynaklar

[1] Jonh A. Thorpe. Elementary Topics in Differential Geometry. Springer-Verlag, New York. 1979. pp. 95-100

[2] Stephen Nash, Ariela Sofer, Linear and Nonlinear Programming. The McGraw-Hill Companies Inc., New York, 1996. pp: 338-650

[3] Mokhtrar S. Bazaran, C.M. Shetty. Nonlinear Programming Theory and Algorithms. John Wiley & Sons, New York, 1979. pp:252

[4] Jafolich C. Arya, Robin W. Lardner. Mathematical Analysis, Prentice Hall, Inc. New York 1993 pp :768

[5] Boothby M. William. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry Academic Press. New York, 1995. pp:363-369

[6] Kobayashi S. , Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. vol:2. Interscience Publishers, New York, 1967. pp:40-46

[7] A. A. Groenwold. Positive definite separable quadratic programs for non-convex problems, Structural Multidisciplinary Optimization, (2012) 46:795–802, DOI 10.1007/s00158-012-0810-8

[8] Zh. B. Zhu, J. B. Jian. An Improved Feasible QP-free Algorithm for Inequality Constrained Optimization, Acta Mathematica Sinica, English Series, Dec., 2012, Vol. 28, No. 12, pp. 2475–2488, DOI: 10.1007/s10114-012-0561-x

[9] M. Petrache, Meaning of the Hessian of a function in a critical point, February 1, 2012, http://www.math.ethz.ch/~petrache/hessian.pdf