

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ MATEMATİKSEL İSPATA YÖNELİK GÖRÜŞLERİ

Muhammet Doruk
Atatürk Üniversitesi
mdoruk20@hotmail.com

Abdullah Kaplan
Atatürk Üniversitesi
akaplan@atauni.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri incelenmiştir. Araştırmanın katılımcılarını, Doğu Anadolu Bölgesi'nde bulunan bir üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üçüncü sınıfında öğrenim gören altı matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri yarı-yapılandırılmış "İspata Yönelik Görüş Mülakat Formu" (İYGMF) yardımıyla elde edilmiştir. Araştırma bulgularına göre, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunun matematiksel ispata yönelik olumlu görüşlere sahip olmalarına rağmen matematiksel ispatı faydasız olarak gördükleri belirlenmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının problem çözme ile ispat arasındaki ilişkiye yönelik yanlışlığı içinde oldukları, kendilerine göre bir ispatlama yöntemlerinin olmadığı ve ispata karşı öz güven eksikliklerinin olduğu tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel ispat, ilköğretim matematik öğretmeni adayı, ispata yönelik görüş

PROSPECTIVE PRIMARY MATHEMATICS TEACHERS' VIEWS ABOUT MATHEMATICAL PROOF

Abstract

In this study, primary prospective mathematics teachers' views have been investigated about mathematical proof. The participant of this study consist of six pre-service mathematics teachers who were enrolled in the third grade in the primary mathematics education department from a university located in the east part of Turkey. The data of this study were gathered by means of semi structured "Proof View Interview Form" (PVIF). According to the findings of this study, it has been founded that even though majority of the prospective teachers participated in the study have positive views on mathematical proof, they consider mathematical proof as useless. Furthermore, it has been determined that they are in error about the relation between problem solving and proof, and they have no any special proof methods for themselves and they have lack of self confidence in proof as well.

Key Words: Mathematical proof, prospective primary mathematics teacher, views about proof.

GİRİŞ

Matematik, düşünmeyi geliştirdiği bilinen en önemli araçlardan biridir. Matematik sayıları, işlemleri, cebiri, geometriyi, orantıyı, alan hesaplamayı ve daha birçok konuyu öğretirken doğası gereği örüntüleri keşfetmeyi, akıl yürütmeyi, tahminlerde bulunmayı, gerekçeli düşünmeyi, sonuca ulaşmayı öğretir (Umay, 2003).

Geçerli fikirlerin kritik edilmesi matematik yapmanın ayrılmaz bir parçasıdır. Eğer bu muhakeme becerisi kazandırılmazsa o zaman matematik bir işlem dizisini takip ve ne anlama geldiğini düşünmeden örnekleri taklit

etmek olur (Ross, 1998). İşte bu durumda matematiksel ispatın önemi ortaya çıkmaktadır. Matematiksel ispatlar bir ifadenin sadece gerçek olduğunu değil aynı zamanda neden gerçek olduğunun anlaşılmasını sağlar. Bu şekilde düşünüldüğünde ispatlar, sonuçların birbiri ile bağdaştırılarak matematiğin sistemleşmesine ve gelişmesine katkıda bulunur (Hanna ve Barbeau, 2009).

Birçok matematikçi ve matematik eğitimcisine göre ispat matematik eğitiminin önemli bir parçası (Güven, Çelik ve Karataş, 2005), matematiğin kalbi (Turner, 2010), matematiğin yapı taşı (Heinze ve Reiss, 2003) ve ileri matematiğin amacı (Weber, 2001) olarak nitelendirilmektedir. Matematiksel ispatın bu denli önemsenmesinin sebepleri incelendiğinde, matematiğe yaptığı katkılar ve öğrencilere matematiksel anlamda kazandırdığı beceriler ön plana çıkmaktadır. Yapılan araştırmalara göre öğrenciler ispat yaparken formüllerin son halleri ile yeterli olmadığını ve açıklanması gerektiğini öğrenirler (Güven, Çelik ve Karataş, 2005). Öğrencilerin matematiksel bilgileri gelişir ve olgunlaşır (Kitcher, 1984). Ayrıca, Fawcett (1938) ispatın öğrencilerin kritik düşünme becerilerini geliştirdiğini belirtmiştir. Bu düşünceyle paralel olarak, Hanna (1991) ispatın matematiksel kavramların daha iyi anlaşılmasına ve matematiksel düşüncenin gelişmesine yardımcı olduğu sonucuna ulaşmıştır. Matematiksel ispatın matematiğin gelişmesindeki rolüne vurgu yapan bazı araştırmacılar ispatın matematiksel bilginin kurulmasında, gelişmesinde ve aktarılmasında etkin rol oynadığını (Stylianides, 2007) ve matematikçilerin yaptıklarının ne anlama geldiğini öğrettiğini belirtmişlerdir (İmamoğlu, 2010).

Rav (1999) ispatın öğrencilere problem çözme için yeni araçlar, stratejiler ve metotlar sunduğunu ifade ederek ispat ile problem çözme arasındaki ilişkiyi vurgulamıştır. Furinghetti ve Morselli (2009) bu ilişkiyi açıklamak için ispatı bir patika yola benzetmiş ve bu patika yolu özel bir problem çözme durumu olarak ifade etmiştir. Shipley (1999) de ispat yapmayı, hipotezlerin formüle edilip test edildiği karmaşık ve sistemli bir problem çözme aktivitesi olarak değerlendirmiştir. Altun (2007) her bir teoremin sıra dışı bir problem çözme aktivitesi olarak görülebileceğini belirtmiştir. Benzer şekilde Weber (2005) de ispat yapma etkinliklerinin, verilen bir ifadenin mantıksal doğruluğunun gösteriminde öğrenciler için problem çözme olarak görülebileceğini belirtmiştir. Problem çözme ile ispat arasındaki ilişkiye yönelik araştırmalar incelendiğinde, araştırmacıların ispatın bir problem çözme aktivitesi olarak değerlendirilebileceği yönünde birleşmişlerdir. Bu bakımdan ispat yaparken Polya (1945)'nin problemi anlama, plan yapma, planı uygulama ve değerlendirme adımlarının takip edilmesi gerekmektedir (Furinghetti ve Morselli, 2009).

Birçok araştırmacı tarafından ispatın matematik ve matematik eğitiminde önemi vurgulanmasına rağmen, matematiksel ispat her düzeyden öğrencilerin ve matematik öğretmeni adaylarının zorlandıkları bir kavramdır (Arslan 2007; Arslan ve Yıldız, 2010; Aydoğdu, Olkun ve Toluk, 2003; Coşkun, 2009; Moore, 1990, 1994). İspat yapma sürecini etkileyen faktörlerden biri öğrencilerin sahip oldukları inanışlardır. İnanışlar sadece tutumlarla ilişkili olmayıp aynı zamanda ispat yapma sürecini doğrudan etkilemektedir. Çünkü inanışlar ispat stratejilerinin seçilmesinde etkilidir (Furinghetti ve Morselli, 2009). Peterson, Carpenter ve Loef (1989) yaptığı bir araştırmada öğrencilerin performansının tamamen öğretmenin düşüncelerine ve bilgilerine bağlı olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ulusal ve uluslararası kuruluşların yaptığı önerilere bakıldığında, ilköğretim öğrencilerinin mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarım yapabilmesi, orta öğretimde ispata gerekli olan önemin verilmesi, ilköğretim çağından itibaren ispat yapmanın teşvik edilmesi ve en önemlisi öğretmen adaylarının ispat konusunda yeterince bilgilendirilmesi ve eğitilmesi şeklinde olduğu görülmektedir (MEB, 2005; NCTM, 2000). Bu ifadelerden anlaşılıyor ki, bu günün öğrencisi ve geleceğin öğretmeni olan öğretmen adayların ispat yapma konusunda bilgili ve yetenekli olmaları önemlidir. Öğretmen adaylarının, matematiksel ispatla ilgili tutumları, görüşleri ve inançları onların matematiksel ispat yapma yeteneklerini doğrudan etkilediği düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin incelenerek var olan durumun ortaya çıkarılması gerekmektedir (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006).

İlgili alan yazın incelendiğinde, bazı araştırmacılar öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini farklı yöntemlerle ölçmeye çalışmışlar ve öğretmen adaylarının ispat hakkındaki görüşlerinin tam oluşmadığı veya sınırlı olduğu sonucuna ulaşmışlardır (Baştürk, 2010; Jones, 1997, 2000; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Raman, 2003; Öçal ve Güler, 2010). Güler ve Dikici (2012) ise nitel bir yaklaşımla, orta öğretim matematik öğretmeni adayların ispata yönelik görüşlerini ispatın anlamı, önemi, amacı, ispat başarılarını etkileyen faktörler ve öğrencilerin başarılı ve başarısız oldukları ispatlar arası farklar bağlamında ortaya çıkarmaya çalışmış ve öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin olumlu olduğu sonucuna ulaşmıştır. Bu

çalışmada ise ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşleri farklı bakış açılarıyla ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşleri ispata yükledikleri anlam, problem çözme ile ispat arasındaki ilişki, ispatın faydaları, ispat yaparken izlenen yol ve favori ispatlar kapsamında incelenmiştir.

Bu araştırmanın amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşlerini ortaya çıkarmaktır. Ülkemizde ispata yönelik çalışmaların oldukça yeni olması sebebiyle, bu alanda yeterli sayıda çalışma bulunmamaktadır. Bu ve benzeri çalışmaların matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik tutumlarının tespiti anlamında, alan yazına katkı sağlayacağı umut edilmektedir.

YÖNTEM

Araştırmanın Modeli

Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı esas alınmıştır. Çünkü nitel araştırmalar, araştırma yapılan ya da yapılması planlanan kişilerin sahip oldukları deneyimlerinden doğan anlamların sistematik olarak incelenebilmesinde tercih edilen bir yaklaşımdır (Ekiz, 2003). Bu araştırma için en uygunda nitel araştırma deseninin olgubilim (fenomoloji) olduğu düşünülmüştür. Çünkü fenomenoloji farkında olduğumuz ancak derinlemesine ve ayrıntılı bir anlayışa sahip olmadığımız olgulara odaklanmaktadır. (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Çalışmada öğretmen adaylarının ispat kavramına yönelik görüşleri ortaya çıkartılmaya çalışılmıştır.

Katılımcılar

Bu çalışma Doğu Anadolu Bölgesi'nde bulunan bir üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören altı matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Öğretmen adayları dört yıllık olan ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün üçüncü sınıfındadırlar. Üçü kız, üçü erkek olan öğretmen adaylarının yaş ortalaması yirmi ikidir. Araştırmada kullanılan isimler öğretmen adaylarının kendi isimleri değildir. Kullanılan isimler araştırmacılar tarafından belirlenen takma isimlerdir. Katılımcılar seçilirken ispatlama mantığının öğretildiği soyut matematik dersini almış ve belli düzeyde matematik tecrübesine sahip olmalarına dikkat edilmiştir. Öğretmen adayları üçüncü sınıfın ikinci dönemi itibarıyla Genel Matematik, Soyut Matematik, Geometri, Analiz-I, Analiz II, Analiz-III, Lineer Cebir-I, Lineer Cebir-II, Kümeler Kuramı, Matematik Ve Yaşam, Analitik Geometri-I, İstatistik ve Olasılık-I, Cebire Giriş ve Bilgisayar Destekli Matematik Öğretimi derslerini almıştır. Aldıkları derslere bakılarak, öğretmen adaylarının ispat ve matematik ile ilgili belli bir düzeyde tecrübeye sahip oldukları söylenebilir.

Verilerin toplanması

Araştırmanın verileri, öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini ortaya çıkarmak amacıyla yarı yapılandırılmış "İspata Yönelik Görüş Mülakat Formu" (İYGMF) yardımıyla elde edilmiştir. Çünkü fenomenoloji araştırmalarında başlıca veri toplama aracı görüşmedir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). İYGMF hazırlanırken nitel araştırma yöntemlerinde uzman iki akademisyenin görüşüne başvurulmuştur. Nitel araştırma yöntemlerinde uzman akademisyenlerin önerileri doğrultusunda formda bulunan sorulardaki mantık ve dil hataları düzeltilip formdaki soruların sırası değiştirilmiştir. Bu aşamalardan sonra İYGMF biçim olarak son halini almış ve katılımcılara uygulanmıştır. Görüşülen öğretmen adayları, kendilerini ifade edebilecek ve kolay ulaşılabile özelliklerine sahip öğretmen adayları arasından gönüllülük esasına göre seçilmiştir. Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden önce araştırmanın tamamen gönüllülük ilkesine göre yürütüleceği, çalışmaya devam etmek istemeyen öğretmen adaylarının istedikleri anda çalışmadan ayrılacakları araştırmacılar tarafından açıklanmıştır. Ayrıca, öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerin ses kaydı altına alınacağı ve bu durumun kendileri için bir sakıncasının olup olmadığı öğretmen adaylarına sorulmuş ve bu konudaki izinleri alınmıştır. Araştırmacılar tarafından öğretmen adaylarının isimlerinin ve bilgilerinin kimseyle paylaşılmayacağı ve araştırma sonucunda makale içerisinde kendi isimleri yerine takma isimler kullanılacağı belirtilmiştir. Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlar 15-20 dakika sürmüştür. Mülakatların tamamı birinci yazar ile öğretmen adayları arasında, öğretmen adaylarının kendilerini rahat hissedebilecekleri bir ortamda gerçekleşmiştir.

Verilerin Analizi

Öğretmen adaylarının görüşlerinden elde edilen verilerin çözümlenmesinde içerik analizi kullanılmıştır. Çünkü içerik analizinde temel amaç, toplanan verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır. Betimsel bir

yaklaşım ile fark edilemeyen kavram ve temalar bu analiz sonucu keşfedilebilir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Çalışmada ilk olarak ses kayıtları yazıya dökülmüştür. Veriler yazıya dökülürken anlaşılabilen ve ifadelerden çıkartılan yorumlar için katılımcılarla görüşülerek anlaşılabilen ifadeler aydınlatılmış ve ifadelerden çıkartılan yorumlardan onay alınmıştır. Mülakat verilerinin yazıya dökülmesi işleminin ardından araştırmacı tarafından ham veriler kod ve kategoriler oluşturulmuştur. Kod ve kategorilerin oluşturulması aşamasından sonra araştırmacının iki meslektaşının tarafından kod ve kategoriler incelenmiştir. Son olarak alınan dönütlerle birlikte kategorilere son hali verilmiştir. Kod ve kategorileri oluşturan öğretmen adaylarının görüşleri üzerinde hiçbir imla ya da yazım düzeltmesi yapılmadan olduğu gibi yansıtılmıştır.

BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde araştırmada elde edilen bulgular, öğretmen adaylarının mülakat sorularına verdikleri yanıtlardan oluşturulan kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasını sağlayan yanıtlarla birlikte tablolaştırılarak sunulmuştur.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yükledikleri Anlamlar ile İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarına göre, matematiksel ispatın ne anlam ifade ettiğini öğrenebilmek için onlara "Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?" sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; Açıklamak, Doğruluk, Sistematiğe oturtmak, Keşfetmek, Ezber, Vize ve Finaller, Gereklilik kategorileri altında toplanmıştır. Tablo 1'de kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte verilmiştir.

Tablo 1: Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatın Anlamına Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adaylarının görüşleri
Açıklamak	Halil: İspat, yani en kaba tabiriyle neyin nereden geldiğini tam olarak söyleyebilmektir. Yiğit: Bir bilgiyi her yönüyle açıklamaktır, yani onun herkes tarafından aynı şekilde anlaşılacak şekilde açıklamaktır. Ve herhangi birinin ona hiçbir şekilde itiraz edemeyeceği bir şekilde açıklamaktır yani.
Doğruluğunu göstermek	Gül: Doğruluğunu göstermek. Yani o teoremi bulan insanların oradan oraya nasıl ulaştığını sonuca nasıl vardıklarını belirtmek yani kanıt.
Sistematiğine oturtmak	Gül: İspat kanıtlamak, yani bu sistematiğine oturtmaktır.
Keşfetmek	Güven: İspat bilinmeyen bir şeyi bilinir hale getirmektir.
Ezber	Belma: İspat deyince ben açıkçası ezber anlıyorum yani direk aklıma ezber geliyor. Mesela bizim şu ana kadar gördüğümüz tüm derslerdeki ispat kısımlarında ne yapıyorduk? Teorem veriliyor özellikle ispat kullanılırken hep sözeldi. Yani hiç matematiksel işlem yaptığımızı hatırlamıyorum tamam analiz 3 dersinde mesela bu şeyler vardı diziler seriler kısmında gördüğümüz ispatlarda işlemler vardı. Onları mantığını kavrayarak yapabiliirdik ama gördüğümüz diğer derslerdeki teoremlerde çok fazla hani mantığımızı kullanarak ben kendi ispat yaptım diyemem, açıkçası ezberdi.
Vize ve finaller	Yiğit: İspat deyince benim aklıma vizeler ve finaller geliyor. Yani, orada çıkabilecek sorular veya sınavda çıkabileceği için ezberlenmesi gereken şeyler olarak aklıma geliyor. Ve sınav bittikten sonra unutulmuş kolay kolay hatırlanmayan bilgiler olarak aklıma geliyor.
Gereklilik	Halil: Aklıma en başta bir matematiksel konunun anlaşılması için aslında belki de her öğrenci tarafında öğrenilmesi gereken bir şeyler geliyor. Ne geliyor mesela. Bir teoremin ispatı. Teoremin ispatını bilmek matematiğin belki de bizim için önemli olan kısmını, uygulama kısmına ciddi fayda sağlayacağını düşünüyorum. Yani çözebileceğimiz örnekler yapabileceğimiz uygulamalar belli bir temele dayanmış oluyor. Matematiksel ispatı bildikten ve gerçekleştirdikten sonra ki gerçekten önemli olduğunu da düşünüyorum. Ayşe: Matematiksel ispat konuların daha iyi anlaşılmasını sağlıyor. Bir ispatı bildiğimiz zaman soruları daha güzel anlıyorsunuz. Daha güzel çözebiliyorum ben ispatını bildiğim şeylerle ilgili soruları.

Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunun, matematiksel ispatın onlar için ne anlam ifade ettiği ile ilgili olumlu görüşe sahip oldukları görülmektedir. Özellikle çalışmaya katılan öğretmen adaylarının matematiksel ispatın açıklama, doğrulama, sistemleştirme ve keşif fonksiyonu üzerinde odaklandıkları görülmektedir. Çoğunluğu yansıtmasa da iki katılımcı ispatın anlamına yönelik olumsuz görüşe sahiptir. Bu katılımcılar için ispatın zor ve korkulan bir kavram olduğu görülmektedir. Bu görüşler “Ezber” ve “Vize ve finaller” kategorileri altında toplanmıştır.

Öğretmen Adaylarının Problem Çözme ile İspat Arasındaki Farka İlişkin Görüşleri ile İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarının problem çözme ile ispat arasındaki farka ilişkin görüşlerini öğrenebilmek için onlara “Sizce, matematiksel ispat ile problem çözme arasında varsa fark nedir/nelerdir?” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; Genel bakış, Kararsızlık, Pratiklik, Hedef, Yönlülük kategorileri altında toplanmıştır. Tablo 2’de kategoriler ve bu kategorilerin oluşturulmasında kullanılan öğretmen adaylarının yanıtları birlikte sunulmuştur.

Tablo 2: Öğretmen Adaylarının Problem Çözme ile İspat Arasındaki Farka İlişkin Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adaylarının görüşleri
Hedef	Güven: İspatta bilinmeyen bir şeyi ispatlarız, problem çözmek de sonucu istenen bir şeydir. Problem çözme bir şeyin sonucunu elde etmektir. Gül: Problem çözme belli değerler üzerinden yapılıyor ama ispat bir sonuç arıyoruz, bir cebirsel ifade gibi ya da diğer problemlerin çözümünde kullanılabilir bir şey.
Genel bakış	Halil: Teoremin ispatı çok daha ciddi anlamda genellemeye dayalı fakat bir problemin çözümünde ise belki o teoremin evet uygulama alanı söz konusudur problem üzerinde fakat o problemin çözülmesi daha küçük bir alanda olabilir. Belli bir takım noktalar ihmal edilerek problem çözülüyor olabilir. Problem daha dar kapsamlıdır fakat teorem ise o konunun, o her neyse artık onunla ilgili genelleştirilebilecek olan hemen hemen her şey genel bir bütündür bence teorem. İspat biraz daha soyuta dayanıyor. Daha genelleyici gibi geliyor ispat kavramı ama problem çözme biraz önce dediğim gibi biraz daha uygulamaya dönük ve ispattan daha da az olabiliyor problemin çözümü.
Kararsızlık	Yiğit: Problem çözmek daha çok uygulamadır yani bildiğini uygulamaktır, ama şey ispat da daha çok ... Tam tersini söyledim. İspat daha çok uygulama problem çözme daha çok pratik mi oluyor? Soru çözmek?...
Pratiklik	Ayşe: Problem çözme her zaman ispatla olmuyor. Ama kestirme yollardan da yapılabilir. Onun ispat ile yapılan çözülen bir şey daha verimli olabilir bence. Yani ispattan yararlanılarak yapıldığı zaman neyin nereden geldiği tam olarak yapılabilir ama problemi çözmeye öyle değildir. Problem çözmeye daha basit kestirme yollardan yapıldığı zaman öğrenci tam anlayabilir de. Farklıdır yani.
Yönlülük	Belma: Problem çözmeye soruyu her açıdan ele almanız gerekiyor. Yani düşünüyoruz, hani en azından bir şekilde önceden bildiğimiz bir şeyleri kullanıyoruz ama ispatta dediğim gibi yani bir kalıp var bana göre ispatta o kalıbın dışına çok fazla çıkamıyoruz. Ama problem çözmeye farklı şekiller kullanabiliyoruz. Farklı kalıplar kullanabiliyoruz bence.

Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının problem çözme ile ispat arasında fark olduğunu ifade etmişlerdir. Katılımcılardan Güven ve Gül problem çözme ile ispat arasında farka ilişkin değerlendirmelerinde birbirinin tam zıttı ifadeler kullanılmıştır. Güven problem çözmeye sonuç odaklı olduğunu belirtirken Gül ise tersine, ispat yapılırken sonuca odaklanıldığını ifade etmektedirler. Bu ifadeler Hedef kategorisinde toplanmıştır. Halil ispatın daha çok genellemeye dayalı olduğunu ifade etmiştir. Belma problem çözmeye birden çok yöntemle ele alınabileceğini ispatın bir kalıbının olduğunu ve farklı yöntemlere kapalı olduğunu ifade etmektedir. Ayşe de problem çözmeye kestirme yollardan yapılabileceğini ifade etmektedir. Yiğit ise problem çözme ile ispat arasında fark olduğuna inanmakta fakat aradaki farkla ilgili görüşünü açıklayamamaktadır.

Öğretmen Adaylarının İspatın Faydalı Olup Olmamasına İlişkin Görüşleri ile İlgili Bulgular

Öğretmen adaylarının ispat yapma becerisi kazanmanın kişiye matematiksel olarak faydalı olup olmaması hakkındaki düşüncelerini öğrenebilmek için katılımcılara “İspat yapabilmeye kişiye matematiksel olarak faydalı olup olmadığı hakkında ne düşünüyorsunuz?” sorusu yöneltilmiştir. Adayların verdikleri cevapların Faydalı,

Faydasız ve Faydalı ama fazlası gereksiz kategorileri altında toplandığı görülmüştür. Tablo 3'de kategoriler ve katılımcıların ifadeleri sunulmuştur.

Tablo 3: Öğretmen Adaylarının İspatın Faydalı Olup Olmamasına İlişkin Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adaylarının görüşleri
Faydalı	Ayşe: Öğrendim hemen faydalı oldu şeklinde değil. Bence bu bir süreç. ispat yapma becerisini elde ettikçe, onu kazandıkça daha geniş düşünme olanağı sağlıyor. Problemlere karşı farklı yollar geliştirebiliyorsunuz. Bence, uzun süreçte etkili olan bir şey. Uzun süreçte yardımcı oluyor. Matematiksel düşünmemi genişletiyor. Gül: Yararlı tabii de yani problem çözerken neden kullanıyoruz? Bu kuralı uyguluyoruz ama nasıl geldi? Yani bu işlemin sonucunda elde edilenler gerçekten doğru mu değil mi?...
Faydasız	Belma: Bence şu ana kadar bana pek bir faydası olmadı yani. Güven: Benim için pek bir önemi yok bir şeyi ispatlamanın. Yiğit: Buna da şöyle cevap vereyim. 3. sınıf öğrencisiyim. Sonuçta birçok sınavlara girdik, sınavlarda karşımıza çıkan şeylerde ispatlardan değil de örneklerden yararlandık. İspatlar çoğu kez bir işimize yaramadı diye düşünüyorum.
Faydalı ama fazlası gereksiz	Halil: İspatın ben faydalı olduğunu düşünürüm ancak bir matematikçinin karşısına çıkan her türlü ispatı öğrenebilecek düzeyde olması onun zaten pek çok basamağı geçtiğini gösterir ki buna ben de çok katılıyorum diyemem. Evet pek çok ispatı bilmek iyidir, özellikle dediğim gibi uygulama alanı bulmak için konunun daha iyi anlaşılması için gerçek anlamda matematikçi olmak için iyidir fakat her türlü ispatın biliniyor olmasını açıkçası ben pek anlamlı bulmam. Çünkü bir noktadan sonra bazı ispatların anlaşılması zorlaşabilir. Bu bakımdan ispatların anlaşılması iyidir bence ama hepsi üzerinde böyle ayrıntılı çalışmayı da ben pek mantıklı bulmuyorum.

Öğretmen adaylarının çoğu ispatın faydasız olduğunu ifade etmişlerdir. Ayşe, Gül ve Halil ispatın faydalı olduğunu belirtmelerine rağmen Halil fazla ispat bilmenin gereksiz olduğunu Gül ise ispatın faydası için, merak unsurunu ön plana çıkartarak ispatın problem çözerken uygulanan yaklaşımın gerçekten bir çözüm olup olmadığını anlamayı sağladığını belirtmiştir. Ayşe ispatın uzun süreçte yararlı olduğunu kendisinin matematiksel düşüncesini geliştirdiğini belirtmektedir.

Öğretmen Adaylarının İspat Yaparken Ne Tür Bir Yol İzlediklerine İlişkin Görüşlerine Ait Bulgular

Öğretmen adaylarının ispat yaparken nelere dikkat ettiklerini anlayabilmek için katılımcılara "Size bir teorem verilir ispatı istendiğinde, ispatı yapmak için ne tür bir yol izlersiniz?" sorusu yöneltilmiştir. Katılımcıların cevapları; Verileri anlama-sembolik ifade-metot seçme, Benzetme-anlama, Metot seçme-içerik- benzetme, Benzetme ve Metot seçme kategorileri altında toplandığı görülmüştür. Bu kategoriler ve katılımcıların ifadeleri tablo 4'te sunulmuştur.

Tablo 4: Öğretmen adaylarının ispat yaparken izledikleri yola ilişkin görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adaylarının görüşleri
Verileri anlama-sembolik ifade-metot seçme	Ayşe: Önce teoremdaki verilere bakarım. Orada anladıklarımı matematiksel sembollerle ifade etmeye çalışırım. Oradan da bildiğim yollardan çeşitli ispat metotları var işte olmayana ergi gibi, doğrudan ispat dolaylı ispat işte gerek ve yeter şartla yapılan ispatlar veya eşitlik yöntemi $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise $A = B$ gibi çeşitli yöntemleri var. Onlardan uygun olanı seçip yapmaya çalışırım. Ama özellikle verilenleri güzel okurum.
Benzetme-anlama	Belma: O zamana kadar gördüğümüz konulardan faydalanırım. Teoremda ne söylemiş öncelikle onu anlamaya çalışırım. Daha sonra ne biliyorum onunla ilgili ne yapabilirim diye bakarım. Zaten gerek ve yeter şart kısmında birinci kısım için ikinci kısım, ikinci kısım için birinci kısmı kullanıyorduk ya hani ne kullanabilirsem ispat yapmak için o zaman onu kullanırım yani.
Metot seçme-içerik-benzetme	Güven: Tümevarım ispat yöntemi olmayana ergi. Omayana ergi ile tümevarım daha çok. Soruların şekline içeriğine bakarım. Nereden benzetmeye çalışacağıma bakarım. Ne yapabiliyoruz diye bakarım daha çok.
Ezber	Yiğit: Ya geçmiş yaşantıma bakarım. O teoremi daha önce görmüş müyüm görmemiş

miyim? Eğer gördüysem hatırlamaya çalışırım ama görmediysem de, ilk defa karşılaştığım bir teorem ise ve biraz zorsa çözebileceğimi sanmıyorum.

Gül: Daha önceden yaptığımız ispatlardan faydalanırım.

Metot seçme **Halil:** En başta bakacağım olmayana ergi metodudur. Eğer tektir diyorsa örneğin teorem biraz daha özelleştirmek gerekirse iki tane olduğunu kabul ederim derim. Kendimce bir olmayana ergi yöntemini kullanmaya çalışırım oradan bir şeyler yapmaya çalışırım. Olmazsa çelişki bulmaya çalışırım. Bu şekilde bir yol izleyebilirim diyebilirim.

Öğretmen adaylarından sadece Ayşe'nin kendine uygun sistematik bir ispatlama yolu belirlediği tespit edilmiştir. Halil ise sadece ispatlama metotlarına bağlı bir yol belirlemektedir. Diğer dört adayda göze çarpan özellik teoremi ispatlamak için daha önceden gördükleri teoremlere benzetme yoluna gitmelerini tercih etmeleridir. Bu durumun sebebi teoremlerin ispatlarını düşünmeden ezberleme yoluna gitmeleri olabilir.

Öğretmen Adaylarının Hangi Özellikteki Teoremleri İspatlamayabileceklerine Yönelik Görüşleri ile İlgili Bulgular
Öğretmen adaylarının hangi özellikteki teoremleri ispatlayabileceklerini anlamak amacıyla katılımcılara "Hangi özellikteki teoremleri ispatlayabileceğinizi düşünürsünüz?" şeklinde soru yöneltilmiştir. Yanıtlar incelendiğinde katılımcıların görüşlerinin; Bilgi ve açıklık, Gerek ve yeter şartlı, Doğrudan ispat, Sayısal, Kolay ve işe yarayan, Mantıklı, Olmayana ergi, Benzetme kategorileri altında toplandığı görülmüştür. Katılımcıların ifadeleri ve hangi kategori altında toplandığı tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5: Öğretmen Adaylarının Hangi Özellikteki Teoremleri İspatlamayabileceklerine Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adaylarının görüşleri
Bilgi ve açıklık	Ayşe: Bence açık ve anlaşılır olmalı. İnsanı ikileme düşürecek bir şey olmamalı ve tabi ki benim de bu konu hakkında hazır bulunuşluğumun olması gerekir. Daha önceden bu konuyla ilgili bir şey bilmiyorsam o teoremle ilgili ispatı yaparken yorum yapamam o zaman, yapamam. Bilgi birikimine sahip olmam gerekir. Yine o teoremden kafamı karıştıracak bir şey olmamamsı lazım. Çok yalın ifadelerle yazılmış olması lazım. Ve çok uzun ve karmaşık olmaması benim için tabi ki daha avantajlı.
Gerek ve yeter şartlı	Ayşe: Gerek ve yeter şartlı teoremleri daha rahat yapıyorum. Zaten bir tarafında verilmiş, bir tarafı verilip diğer tarafı istendiği için oradan yola çıkarak diğer tarafı bulmak daha kolay geliyor. Olmayana ergide biraz kafam karışıyor sonunda mesela. O ispatlar biraz sıkıntılı geliyor bana... Yani genel olarak gerek ve yeter şartlı teoremleri yapmayı daha çok seviyorum, bana daha kolay geliyor. Belma: Mesela daha çok nasıl söylesem? Size bir önerme veriliyor ya gerek ve yeter şart olması için şu olmalıdır diyor. Öncelikle ikinci tarafını gösteriyoruz daha sonra birinci tarafını gösteriyoruz. Daha çok o tarz ispatların üzerinde durduğumuz için şu anda o tarz bir ispat yapabiliyorum gibi geliyor.
Doğrudan ispat	Ayşe: Doğrudan ispatlar daha kolay geliyor. Mesela olmayana ergi gibi daha soyut bir şeyden yola çıkarak, onun olmadığını kabul ederek, sonra olduğunu bulmak biraz daha sıkıntılı. Elimdeki veriler ile bilerek adım adım gittiğimde, daha sağlam gittiğim için daha rahat oluyorum. Mesela, sınavdan çıkarken sonucumdan emin oluyorum.
Sayısal	Belma: Nasıl bir teorem? Mesela, sayısal içerikli olabilir. Hani, direk sözel değildir. Mesela hani analizde görmüştük ya \mathbb{R}^n üzerinde kapalı olması için gerek ve yeter şart A kümesinin açık olması mıydı? Kapalı olması mıydı? Öyle bir teoremler görmüştük ya, işte o tarz teoremleri genel olarak mantıksal açıdan kavrayamıyorum.
Kolay ve işe yarayan	Güven: Daha çok kolay olanlardan olursa yani... Mesela bu gün bize derste yaptılar bir sayının sifıra bölümü neden tanımsız onu gösteriniz. O! neden 1 onu gösteriniz. Öğretmen olduğumda karşıma çıkabilecek böyle kolay şeylerle daha çok ilgilenebilirim.
Mantıklı	Yiğit: Daha çok mantık gerektiren. Tamamen kâğıda bakıp yapabileceğimiz şeyle değil de mantıken yapabileceğimiz şeyleri yapabileceğimi düşünüyorum. Ama tamamen bilgi teoremi sorulan ispat gelirse çözeceğimi düşünmüyorum.
Olmayana ergi	Halil: Sanki önceden bir çalışmış olmam gerekir o teoremle ilgili. Yani, o konu ile ilgili bir şeyler bilmem gerekir. Ama bunun dışında ne olması gerekir? Yani şöyle düşündüğümde, cebir dersindeki teoremler şimdi aklıma geliyor. Olmayana ergi metodunun kullanılabilceği mesela. Ne gibi bir teorem, varlık ve teklik teoremleri diyeceğim aslında bundan da çok emin

değilim de...

Benzetme **Gül:** *Benim tamamen o konu üzerinde bilgi sahibi olmam lazım. Daha önceden bildiğim bir şey olmalı. Mesela cebir dersinde gördüğümüz ispatlar hiç. Yani, sadece ezberlediğimiz ispatlar...*

Öğretmen adaylarının görüşleri incelendiğinde katılımcıların daha çok açık anlaşılır sözel olmayan, daha önceden bildiği konuyla ilgili teoremlerin ispatlarını daha rahat yapabileceklerine inanmaktadırlar. Katılımcılardan ikisi de yapabileceği teoremler için ispatlama metotları üzerinde durarak Gül doğrudan ispatın Halil ise olmayana ergi ispat metodunun kullanıldığı teoremlerin ispatını daha rahat yaptıklarını ifade etmektedirler. Ayrıca, katılımcıların çoğunda (Güven, Halil, Yiğit, Gül) ispat yapmaya karşı güven eksikliği göze çarpmaktadır. Güven yapabileceği ispatın çok kolay olması gerektiğini, Yiğit bilgi gerektiren teoremleri yapamayacağını, Halil ilgili teoremi daha önce çalışmış olması gerektiğini, Gül ise ispatı yapacağı konu hakkında bilgi sahibi olması gerektiğini belirtmiş ve cebir dersindeki teoremleri örnek göstererek onları ezberlediğini ifade etmiştir.

SONUÇ VE TARTIŞMA

Çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu amaçla öğretmen adaylarına sorulan “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” sorusuna alınan yanıtlar; Açıklamak (Halil, Yiğit), Doğruluk (Gül), Sistematiğe oturtmak (Gül), Keşfetmek (Güven), Ezber (Belma), Vize ve Finaller (Yiğit), Gereklilik (Halil) kategorileri altında toplanmıştır. Bununla birlikte araştırmaya katılan öğretmen adaylarından Belma ve Yiğit dışındaki öğretmen adayları için matematiksel ispatın olumlu bir anlama sahip olduğu söylenebilir. Araştırmada elde edilen bu bulgulara göre, çalışmaya katılan matematik öğretmeni adaylarının çoğunluğu için matematiksel ispat ifadelerinin neden doğru olduğunu açıklama, doğruluğunu gösterme, bir sistem içinde belirli sonuçların düzenlenmesi ve yeni sonuçlara ulaşma anlamına gelmektedir. Araştırmada elde edilen bu bulgular ilgili alan yazında yer alan çalışmalarda ispatın açıklama, doğrulama, sistemleştirme ve keşif fonksiyonu ile uyumlu olduğu görülmüştür (Hanna, 2000; Hanna ve Jahnke, 1999). Ancak çalışmaya katılan öğretmen adaylarından matematiksel ispatın matematik eğitimi için anlamsız ve ezberlenmesi gereken bir etkinlik olduğunu düşünenler de bulunmaktadır. Bu şekilde düşünen öğretmen adaylarının görüşleri “Ezber” ve “Vize ve finaller” kategorileri altında toplanmıştır. Bu bulgular ışığında, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunluğunun matematiksel ispata yükledikleri anlamlar olumludur. Bu sonuç Güler ve Dikici (2012) tarafından yapılan araştırma sonucu ile uyumludur. Ancak araştırmaya katılan iki öğretmen adayının ispata yönelik görüşlerinin olumsuz olduğu görülmektedir. Bu durum İspat kavramının, matematik derslerinde öğrenciler tarafından anlaşılması zor, anlamsız ve gereksiz yapılan bir etkinlik olarak algılandıkları yönündeki araştırma sonucu ile uyumludur (Knuth, 2002).

Araştırmaya katılan matematik öğretmeni adaylarına “Sizce, matematiksel ispat ile problem çözme arasında varsa fark nedir/nelerdir?” sorusu sorulmuştur. Öğretmen adaylarının bu soruya verdikleri yanıtlar; Genel bakış (Halil), Kararsızlık (Yiğit), Pratiklik (Ayşe), Hedef (Güven, Gül), Yönlülük (Belma) kategorileri altında toplanmıştır. Araştırmada elde edilen bulgulara göre, öğretmen adayları ispat ile problem çözme arasında fark olduğunu belirtmişlerdir. Katılımcılardan Güven ve Gül’ün ispat ile problem çözme arasındaki farka ilişkin görüşleri birbirleriyle çelişmektedir. Güven problem çözmenin sonucu istenen bir şey olduğunu belirtirken, Gül ise ispatın sonucu istenen bir şey olduğunu belirtmiştir. Belma problemlerin farklı yöntemlerle çözülebileceğini fakat ispatın bir kalıbının olduğunu ve farklı yöntemlere kapalı olduğunu belirtmiştir. Halil ispatın daha çok genellemeye dayalı olduğunu belirtirken, Ayşe problem çözmenin kestirme yollarla yapılabileceğini ifade etmiştir. Yiğit ise problem çözme ile ispat arasında fark olduğunu belirtmesine rağmen aradaki farkı açıklayamamıştır. Bu sonuç, ispatın özel bir problem çözme durumu olduğu ve her bir teoremin sıra dışı bir problem çözme aktivitesi olarak değerlendirilebileceği gerçeği ile çelişmektedir (Furinghetti ve Morselli, 2009; Shipley, 1999). Bu bakımdan, öğretmen adaylarının ispat ile problem çözme arsındaki ilişkiye yönelik düşüncelerinde yanılıya düştükleri görülmektedir.

Öğretmen adaylarının ispat yapma becerisi kazanmanın kişiye matematiksel olarak faydalı olup olmaması hakkındaki düşüncelerini öğrenebilmek için katılımcılara “İspat yapabilmenin kişiye matematiksel olarak faydalı olup olmadığı hakkında ne düşünüyorsunuz?” sorusu yöneltilmiştir. Adayların verdikleri cevapların Faydalı (Ayşe, Gül), Faydasız (Belma, Güven, Yiğit), Faydalı ama fazlası gereksiz (Halil) kategorileri altında toplandığı görülmüştür. Katılımcılardan çoğu ispatın kendilerine faydası olmadığına inanmaktadır. Bu sonuç, birçok öğrenci

ve öğretmenin ispat yapmayı neden öğrenmeleri gerektiğini anlamadığı ve birçoğunun da mecburiyet olarak gördüğü çalışma sonucuyla uyumludur (Mansi, 2003). İspatın faydalı olduğunu düşünen Gül merak unsurunu ön plana çıkartarak, ispatın problem çözerken uygulanan yaklaşımın gerçekten bir çözüm olup olmadığını anlamayı sağladığını belirtmiştir. Gül'ün bu görüşü ispatın problemleri çözmek için matematiksel dizinleri gösterme yolu ve bir probleme çözüm için önerilen yaklaşımın gerçekten bir çözüm olduğunu açıklama gerçeği ile uyumludur (Bahtiyari, 2010). Ayşe ise ispatın uzun süreçte yararlı olduğunu, kendisinin matematiksel düşüncesini geliştirdiğini belirtmektedir. Ayşe'nin bu görüşü de, ispatın matematiksel kavramların daha iyi anlaşılması ve matematiksel düşüncenin gelişmesine yardımcı olma işlevi ile paralellik göstermektedir (Hanna, 1990; Hersh, 1993).

Öğretmen adaylarının ispat yaparken nelere dikkat ettiğini anlayabilmek için katılımcılara “Size bir teorem verilip ispatı istendiğinde, ispatı yapmak için ne tür bir yol izlersiniz?” sorusu yöneltilmiştir. Katılımcıların cevapları; Verileri anlama-sembolik ifade-metot seçme (Ayşe), Benzetme-anlama (Belma), Metot seçme-içerik- benzetme (Güven), Benzetme (Yiğit) ve Metot seçme (Halil) kategorileri altında toplandığı görülmüştür. Bu bulgulara göre sadece Ayşe'nin kendine göre sistematik yol oluşturduğu tespit edilmiştir. Bu sistematik yol Polya (1945)'nin problem çözme basamaklarına benzemektedir. Bu sonuç, Furinghetti ve Morselli (2009)'nin ispat yapma süreci ile problem çözme arasında sıkı bir ilişki olduğu ve bu sürecin Polya'nın problemi anlama, plan yapma, planı uygulama ve değerlendirme adımlarından oluştuğu şeklindeki araştırma sonucu ile uyumludur. Diğer adayların ise sadece belli bir özelliğe göre hareket ettikleri görülmektedir. Öğretmen adaylarının çoğu bir teoremin ispatını yaparken daha önce ezberledikleri ispatlara uydurma yolunu benimsedikleri görülmüştür. Bu durumun sebebi olarak öğrencilerin ispatın mantığını kavramadan ezberlemeyi tercih etmelerinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu bulgu Concradie ve Frith (2000) tarafından yapılan araştırma sonucu ile uyumludur.

Son olarak öğretmen adaylarına “Hangi özellikteki teoremleri ispatlayabileceğinizi düşünürsünüz?” şeklinde soru yöneltilmiştir. Yanıtlar incelendiğinde katılımcıların görüşlerinin; Bilgi ve açıklık (Ayşe), Gerek ve yeter şartlı (Ayşe, Belma), Doğrudan ispat (Ayşe), Sayısal (Belma), Kolay ve işe yarayan (Güven), Mantıklı (Yiğit), Olmayana ergi (Halil), Benzetme (Gül) kategorileri altında toplandığı görülmüştür. Ayrıca, katılımcıların çoğunda (Güven, Halil, Yiğit, Gül) ispat yapmaya karşı güven eksikliği göze çarpmaktadır. Güven yapabileceği ispatın çok kolay olması gerektiğini, Yiğit bilgi gerektiren teoremleri yapamayacağını, Halil ilgili teoremi daha önce çalışmış olması gerektiğini, Gül ise ispatı yapacağı konu hakkında bilgi sahibi olması gerektiğini belirtmiş ve cebir dersindeki teoremleri örnek göstererek onları ezberlediğini ifade etmiştir. Bu sonuç diğer araştırmalardan elde edilen, ispatın başarılı öğrencilerde bile dirençle karşılaşılan ve öğrencilere zor ve anlamsız gelen bir konu olduğu sonucu ile paralellik göstermektedir (Arslan 2007; Arslan ve Yıldız, 2010; Aydoğdu, Olkun ve Toluk, 2003; Coşkun, 2009; Moore, 1994).

Furinghetti ve Morselli (2009) ispata yönelik görüşlerin ispat yapma becerilerini etkilediğini belirtmiştir. Bu bakımdan öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin ileride matematik öğretimi esnasında ispat yapma aktivitelerinin sıklığını etkileyeceği için öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerini olumlu yönde etkileyecek çalışmalar yapılmalıdır. Öğretmen yetiştiren kurumlarda matematik öğretmeni adayları ispat yapmaya teşvik edilmeli ve ispatlara yönelik düşünce sürecine girmeleri sağlanmalıdır. Derslerde, ispatların matematikteki yeri, önemi, kişiye matematiksel anlamda sağladığı faydalar üzerinde durulmalıdır. Bu araştırma nitel bir yaklaşım ile altı ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşlerinin düzeyini belirlemeye yönelik çalışmalar farklı araştırma yaklaşımları ve araştırma grupları ile tekrarlanabilir.

Not: Bu çalışma 07-09 Kasım 2012 tarihlerinde Antalya'da 16 Ülkenin katılımıyla düzenlenen “World Conference on Educational and Instructional Studies - WCEIS-2012”da sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

KAYNAKÇA

Altun, M. (2007). Eğitim fakülteleri ve matematik öğretmenleri için ortaöğretimde matematik öğretimi. Bursa: Aktüel.

Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim Öğrencilerinde Muhakeme Etme ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi*. Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar, *Eğitim ve Bilim*, Cilt 35, Sayı 156.

Aydoğdu, T. Olkun, S. ve Toluk, Z. (2003). İlköğretim öğrencilerinin çözdükleri matematik problemlerini kanıtlama süreçleri, *Eğitim Araştırmaları*, 4(12), 64-74.

Bahtiyari A. Ö. (2010). 8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Baştürk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, 36(3), 283-298.

Conradie, J. ve Frith, J. (2000). Comprehension Tests in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 225-235.

Coşkun, F. (2009). *Ortaöğretim Öğrencilerinin Van Hiele Geometri Anlama Seviyeleri İle İspat Yazma Becerilerinin İlişkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Ekiz, D. (2003). *Eğitim Araştırma Yöntem ve Metodlarına Giriş*, Anı Yayıncılık, Ankara

Fawcett, H. P. (1938). The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof. (NCTM year book 1938). New York: Teachers' College, Columbia University.

Furinghetti, F. ve Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 71-90. doi: 10.1007/s10649-008-9134-4

Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Orta Öğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematik İspat Hakkındaki Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571-590.

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*, 30, 319.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Hingham, MA: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics* 44:5–23.

Hanna, G. ve Barbeau, E. (2009). Proof In Mathematics University Of Toronto, Canada <http://www.math.toronto.edu/barbeau/hannajoint.pdf>.

Hanna, G. ve Jahnke, H. N. (1999). *Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs*. In O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the twenty third conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 3, 73–80. Haifa, Israel.

Heinze, A. ve Reiss, K. (2003). *Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence*. In M.A. Mariotti (Ed.), Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389–399.

İmamoğlu, Y. (2010). Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi. Yayınlanmamış doktora tezi. Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Jones, K. (1997). Student teachers' conceptions of mathematical proof. *Mathematics Education Review*, 9, 21-32.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31, 1, 53-60.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York: Oxford university press.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.

Mansi, K. E. (2003). Reasoning And Geometric Proof In Mathematics Education A Review Of The Literature A thesis submitted to the Graduate Faculty of North Carolina State University in partial fulfillment of the Degree of Master of Science.

MEB (2005). İlköğretim Okulu Matematik Dersi 6-8 Sınıflar Öğretim Programı. Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Moore, R. C. (1990). *College Students' Difficulties In Learning To Do Mathematical Proofs*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Georgia, Georgia.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14, 1, 147-160

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Öçal, M. F. ve Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 318–323

Peterson, P. L., Carpenter, T. C. ve Loef, M. (1989). Teachers' Pedagogical Content Beliefs In Mathematics. *Cognition And Instruction* 6, 1-40.

Polya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method* (5th ed.). Princeton University Press.

Raman, M. J. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 319-325.

Rav, Y. (1999). Why do we proof theorems? *Philosophia mathematica*, 7(1), 5-41.

Ross, K. A. (1998). The place of Algorithms and Proofs in School Mathematics. *Doing and Proving*. March, 252-255

Shiple, A. J. (1999). An investigation of collage students' understanding of proof construction when doing mathematical analysis proofs. Unpublished doctoral dissertation. University of American, Washington.

Stylianides, A. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20.

Turner, J. W. (2010). A Brief Introduction to Proofs. 23.03.2012 tarihinde http://www.google.com.tr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&frm=1&source=web&cd=1&ved=0CCKQFjAA&url=http%3A%2F%2Fpersweb.wabash.edu%2Ffacstaff%2Fturnerw%2FWriting%2Fproofs.pdf&ei=YG5sT6XgLqHW0QWsp6TPBg&usg=AFQjCNHtvXRGppPMiuoIT_edwQa00e_hUw&sig2=obqGpMIyytWp9AmOVwfMA adresinden alınmıştır.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneđi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234–243.

Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119.

Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: the relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction, *Journal of Mathematical Behaviour*, 24, 351-360

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Seçkin Yayınları, Ankara.