MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ TEK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA LİMİT KAVRAM BİLGİLERİNİ KULLANARAK YÜRÜTTÜKLERİ BAZI GENELLEME VE SOYUTLAMALAR

Abdullah Çağrı BİBER
T.C.Ziraat Bankası A.Ş., Eğitim Bölüm Başkanlığı, Ankara.

Ziya ARGUN
Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitimi Fakültesi, OFMAE Bölümü, Matematik Eğitimi ABD, Ankara.

İlk Kayıt Tarihi:22.01.2012 *Yayına Kabul Tarihi: 27.03.2012*

Özet

Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonların limiti kavram bilgisi yardımı ile yürüttükleri soyutlama ve genellemelerin nasıl geliştiğini tespit etmektir. Bunun için bir devlet üniversitesinin orta öğretim fen ve matematik alan eğitimi bölümü matematik öğretmenliği anabilim dalı 2. sınıfında öğrenim gören 52 öğrenciye açık uçlu sorulardan oluşan bir yazılı anket uygulanmıştır. Bu makale çerçevesinde konu ile doğrudan ilişkili olan 3 soruya öğrencilerin verdikleri cevapların analizine yer verilmiştir. Sonuçlar göstermektedir ki, adaylar mevcut bilişsel yapılarını ve fikirlerini değiştirmeden yürüttükleri genellemelerde oldukça başarılı olabilmektedirler. Ancak adayların tek değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limitini tespit etmek için kullandıkları hiç bir yöntemin, iki değişkenli bir fonksiyonun limitinin incelenen nokta etrafında yapılacak her türlü yaklaşım şeklinden bağımsız olması gerektiği fikrine ulaşmada adaylara yardımcı olmadığı tespit edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Limit, genelleme ve soyutlama,*

SOME GENERALIZATION AND ABSTRACTIONS WHICH CANDIDATE MATHEMATIC TEACHERS USE LIMIT CONCEPT INFORMATION IN SINGLE VARIABLE FUNCTIONS

Abstract

The purpose of this research is to determine that how the abstraction and generalization developed, with the help of having the knowledge of the concept of limit of a single variable functions that the mathematics teacher candidates have. For this, in a written *questionnaire consisting of open-ended questions, has asked to 52 students, who are in their second year, studying at the department of a State University's of Science and Math, High School Math Teacher Education Department. In this article, three questions' answers which are directly related to the subject are analyzed. The results show that the candidates can be very successful in generalizations, by not replacing their existing cognitive structures and ideas. However, the candidates used to determine the limit of single variable functions at a point in a method, called the limit of a function of two variables point around the shape of all kinds in the approach should be independent, could not help concluding that the candidates.*

Key Words: *Limit, generalization and abstraction,*

1. Giriş

Üniversitede öğrencilerin matematiksel tecrübelerinin gelişimi ile genelleme ve soyutlama yetenekleri de gelişir. Eğer bir öğrenci matematiksel genelleme ve soyutlama yapma yeteneğini geliştirirse matematiksel düşünmenin ileri seviyelerine ulaşır. Bu genelleme ve soyutlama yeteneğini kazanma, ileri matematiksel eğitimin tek ve en önemli hedefidir (Tall, 1991).

Soyut kavramların kazanılması zordur. Matematiğin öğrencilere zor gelmesinin sebebi belki burada yatmaktadır. Okul matematiği, doğru olduğu bilinen sabit kurallar ve teknikler bütününün içselleştirilmesi ile edinilen bir sistem olarak görülmektedir (Beurk, 1982). Orta öğretimde öğretilen matematik ile üniversite matematiği arasında net bir ayrım söz konusu olmasa da üniversite matematiği, tanımların soyutlanmasına ve çıkarımlara daha fazla odaklanır (Tall, 1991).

Carlson, matrislerin çarpımlarının hesaplanması, tanımların yapılması ve lineer denklem sistemlerinin çözümü gibi basit algoritmik işlemlerde öğrencilerin hata yapmadıklarını ifade ediyor. Fakat biraz daha soyut kavramlar olan; lineer bağımsızlık, uzay, alt uzaylar ve lineer dönüşümlere geldiklerinde, öğrencilerin hata yapmaya başladıklarını belirtmiştir. Öğrenciler için asıl zor olan algoritmik hesaplamaların öğrenilmesinden ziyade, anlatılan konularla ilgili kavramların öğrenilmesidir (Sabella ve Redish, 1995).

Başka bir araştırmada; ankete katılan öğrenciler, üniversite matematiğini "gerçek matematik" olarak niteliyorlar, orada "niçin" sorusunun önemli olduğunu ve detaylı bir matematik yapıldığını belirtiyorlar. Öğrencilere göre, dershane ve liselerdeki matematik, detaya inmeden soruları çözmekten ve doğru cevabı bulmaktan ibaret olduğu için kendilerine sadece gerekli formüllerin ve temel bilgilerin nasıl ezberleneceğinin öğretildiğini belirtiyorlar. Üniversite öğrencileri ise; bu tip bir eğitimin yükseköğrenimde kendilerine problemler çıkardığını, üniversitede matematik başarılarının düştüğünü ve üniversite matematiğini çok soyut bulduklarını, ispatlayınız, yorumlayınız, gösteriniz şeklinde sorulardan hiç hoşlanmadıklarını ifade ediyorlar (Baştürk, 2005).

Dolayısıyla üniversite matematiğinin gerektirdiği soyutlamalara, çıkarımlara yani genellemelere orta öğretimde öğrenciler pek alışık olmadıkları için üniversitede gördükleri matematiğin kendilerine zor geldiğini düşünmektedirler.

Soyutlama bilişsel yapının yeniden inşası süreci, matematiksel yapılardan zihinsel yapıların oluşturulmasıdır. Matematiksel nesneler arasındaki ilişki zihinde soyutlama faaliyeti ile kurulur. Soyutlama süreci genelleme ile yakından ilgilidir. Matematiksel genellemede bireysel bilgi yapısının gelişimi söz konusu iken, soyutlama zihinsel yapının yeniden kurulmasını gerektirir (Dreyfuss, 1991).

Bir zihinsel faaliyet olan soyutlama olgusunun en önemli aşaması matematiksel genelleme sürecidir. Genelleme matematikte ileri adımlar atılmasına imkân sağlar. Matematiksel genellemede mümkün olduğu kadar az temsille mümkün olduğu kadar çok şey anlatmak hedeftir. Dolayısıyla genelleme, bilginin yeniden yapılanması ve genişlemesi demektir (Morman, 1981).

"Genelleme" ve "soyutlama" terimleri, matematikte kavramların oluşum süreçlerini ve bu süreçlerin sonucu olan ürünü belirtmek için kullanılır. Örneğin vektör uzayı kavramı, iki veya üç boyutlu lineer denklem çözümlerinin, n boyuta genişlemesinin bağlamdan soyutlanması ile ortaya çıkmıştır. Bunu yaparken çok farklı zihinsel objeler üretilir. Dolayısıyla süreç, R^n genellemesi ve bir F cismi üzerindeki bir V vektör uzayı soyutlaması şekilde özetlenebilir. R^n genellemesine her biri tekrarlanan aritmetik süreçlerin uygulanmasıyla açıklanan R^1'den R^2'ye, R^2'den R^3'e ve böyle devam eden koordinat genişlemeleriyle ulaşılabilir. V vektör uzayı soyutlaması aksiyomlarla tanımlanan farklı bir zihinsel objedir (Molodsij, 1977). Dolayısıyla genellemede sadece anlaşılmış süreçlerin bir genişlemesi yapılırken, soyutlamada yoğun bir zihinsel reorganizasyona (yeniden şekillenme) gereksinim vardır.

Bir fonksiyonun bir nokta etrafında nasıl davrandığını, o nokta etrafındaki noktalarda aldığı değerlerle gözlemleyebiliriz. Burada limiti anlama ve öğrenmedeki temel zorluk, iki nokta aynı olmadıkça birbirlerine ne kadar yakın olabileceğini zihninde canlandırma sorunudur. Bu sorunun cevabını çıplak gözle vermek mümkün değildir, çünkü büyütmenin veya küçültmenin sonu yoktur. Geleneksel olarak, fonksiyonun incelenen nokta etrafında mümkün olduğunca fazla noktada aldığı değerler belirlenip, bu değerlerin hangi sayı etrafında yığıldığını sezip, sezilen bu sayının gerçekten limit olup olmadığı test edilerek limit tespit edilir. Ayrıca fonksiyonun incelenen noktada tanımlı olması da gerekmez. Bütün fonksiyonlar için limit kavramının incelenmesinde ana fikir budur. Aslında bir fonksiyonun bir noktadaki limitinden bahsedildiğinde öğrencilerin aynı şeyi düşünüp düşünmediğini tespit etmek, öğrencilerin limit kavramını nasıl yapılandırdıklarını görmek açısından önemlidir. Öğrenci limit ile lgili yukarıdaki düşünceyi bütün fonksiyonlar için kullandığında, bu kavramların anlaşılmasında sıkıntı çekilmeyeceği matematikçiler ve matematik eğitimcileri tarafından sıkça beyan edilir.

Matematik eğitimi araştırmacıları, özellikle üst düzey matematiği anlama süreçleri-nin bileşenlerini ve bunların birbirini etkilemesinin önemini fark etmişlerdir (Dreyfus, 1989). Dreyfus (1989) matematikte elementer süreçler ile ileri matematiksel düşünme arasında net bir ayrım söz konusu olmasa da, üst düzey matematikte tanımların soyutlanmasına ve genellemelere daha fazla odaklanmaya ihtiyaç duyulduğunu ifade etmektedir.

Özellikle matematik eğitimi alan üniversite öğrencileri lisedeki öğrenimleri boyunca hep tek değişkenli fonksiyonların limiti ile meşgul olmuşlardır. Öğrencilerin çoğu çok değişkenli fonksiyonlar ve bu fonksiyonların limiti ile yüksek öğrenimin ilk dönemlerinde tanışacakları için, adaylar sahip oldukları tek değişkenli fonksiyonların limiti yardımı ile yürüttükleri soyutlama ve genellemelerin nasıl geliştiğini tespit etmek önemlidir.

Böylelikle limit kavramından dikey geçişte, örneğin «türev» ve «süreklilik» gibi üst kavramlara geçişler daha kolay olabilecektir. Bunun sonucunda öğrencilerin «limit kavramını» doğru yorumlayıp, diğer kavramlara geçişte edindikleri yeni öğrenmeleri rahat bir şekilde kullanabilecekleri düşünülmektedir (Bukova, 2006).

Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmen adaylarının sahip oldukları tek değişkenli fonksiyonların limiti kavram bilgisi yardımı ile yürüttükleri soyutlama ve genellemelerin nasıl geliştiğini tespit etmektir. Burada adayların konu hakkındaki zorluk ve engellerinin belirlenmesi sağlanarak, araştırmanın limit kavramının öğretiminin geliştirilmesine katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

2. Yöntem

Nicel ve nitel yöntemlerin bir arada kullanıldığı bu çalışmada karma desenden faydalanılmıştır. Araştırma var olan bir durumu kendi koşulları içinde olduğu gibi betimlemeye çalıştığından tarama modelinde bir araştırmadır (Karasar, 2000). Taramaya, konu ile ilgili yapılan bilimsel çalışmalar dahil edilmiştir.

2.1. Evren ve Örneklem

Araştırma, Ankara'da yerleşik bir devlet üniversitesinin orta öğretim fen ve matematik alan eğitimi bölümü matematik öğretmenliği anabilim dalı 1. ve 2. sınıfında öğrenim gören aynı 52 öğrenci ile sınırlandırılmıştır.

2.2. Veri Toplama Aracı ve Uygulama

Araştırma için adayların öncelikle Analiz-1 kapsamında ele alınan tek değişkenli fonksiyonların limiti konulu dersleri ve yaklaşık 6 aylık bir aranın ardından da aynı adayların Analiz-2 kapsamında ele alınan çok değişkenli fonksiyonların limiti konulu dersleri takip edilmiştir. Analiz-1 kapsamında ilgili ders işlendikten sonra adayların konuyu ne derece yapılandırdıklarını incelemek amacıyla adaylara konu hakkında açık uçlu sorular sorulmuş, açık uçlu sorulara verdikleri cevaplar incelendikten sonra, verdikleri cevapların sebeplerini daha detaylı araştırabilmek için araştırmaya katılan 7 öğrenci ile mülakat yapılmıştır. Bu mülakatta adaylara grafiği verilen iki değişkenli bir fonksiyon hakkında da sorular yöneltilmiştir. 6 aylık bir aranın ardından Analiz-2 kapsamında yürütülen çok değişkenli fonksiyonların limiti konulu derslere başlamadan önce öğretmen adaylarına tek değişkenli reel fonksiyonların limiti hakkında tekrarlar verilmiş, çok değişkenli fonksiyonlar ve grafikleri tanıtılmıştır. Daha sonra adaylara sahip oldukları kavram bilgileri yardımı ile ne derece genelleme yapabildiklerini görebilmek amacıyla Analiz-2 konusu olan iki değişkenli fonksiyonların limiti hakkında açık uçlu sorular yöneltilmiştir.

Hazırlanan açık uçlu sorular ve mülakat soruları uygulamalardan önce matematik öğretimi konusunda uzman 3 kişiye gösterilerek soruların araştırmanın amacına uygunluğu konusunda onay alınmıştır. Öğrencilerin ankete verdikleri cevaplar analiz edildikten sonra genel ve alt kategorilere göre düzenlenmiş ve işlenmesi için kavramsal bir yapı oluşturulmuştur. Daha sonra, her bir kategorinin hangi sıklıkla tekrar ettiği (frekansı) bulunmuştur. Böylece, nitel veriler nicelleştirilmiştir. Nitel verilerin nicelleştirilmesindeki temel amaç; güvenirliği arttırmak, yanlılığı azaltmak ve kategoriler arasında karşılaştırmalar yapmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 1999).

Tüm çalışmalarda toplam 15 soru yer almaktadır. Ancak bu makale çerçevesinde araştırma problemiyle doğrudan ilgili olan 3'üne verilen cevapların analizinin bulgularına yer verilecektir.

2.3. Anket Sorularının Analizi

Bu makale çerçevesinde, matematik öğretmen adaylarının sahip oldukları tek değişkenli reel fonksiyonların limiti kavram bilgileri yardımı ile yürüttükleri soyutlama ve genellemeler üzerinde durulmuştur. Bulguların tanıtımına geçmeden önce, bu üç soruda öğrenciden nelerin beklendiği kısaca betimlenecek olursa;

Soru 1:

$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon ve a da A cümlesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için eğer $0 < |x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x)-L| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε sayısına bağlı bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a'ya yaklaştığında ya da başka bir ifadeyle "x, a'ya giderken" f'nin limiti L'dir denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

yazılır (Balcı, 1996).

Yukarıda tek değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limitinin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilmiş tanımını kullanarak iki değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limit tanımını yazabilir misiniz?

Birinci soruda, öğrencilerden Analiz 1 dersinden alışık oldukları tek değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limitinin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilmiş tanımını kullanarak, iki değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limit tanımını yazmaları istenmiştir. Dolayısıyla burada adaylardan kendilerine verilen bir tanımdan yola çıkarak bir genelleme yapmaları beklenmektedir.

Soru 2:

Tek değişkenli bir fonksiyonun bir noktada limitinin var olup olmadığına karar verebilmek için fonksiyonun hangi ayırt edici özelliklerinden yararlanılır?

İkinci soru ile adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti hakkındaki genel bilgileri alınarak, adayların sahip oldukları bilgiyi ne derece soyutlayabildikleri, nasıl içselleştirdikleri hakkında bilgi edinmek istenmiştir.

Soru 3:

İki değişkenli bir fonksiyonun belirli bir noktada limitinin var olup olmadığına karar verebilmek için fonksiyonun hangi ayırt edici özelliklerinden yararlanılabilir?

Üçüncü soruda öğrencilerden tek değişkenli fonksiyonların limiti hakkındaki bilgilerini kullanarak, iki değişkenli fonksiyonların limiti hakkında yorum yapmaları istenmiştir. Yapacakları yorumların öğrencilerin yürüttükleri soyutlama ve genelleme süreçleri hakkında fikir vermesi beklenmektedir.

3. Bulgular

Bu bölümde araştırmaya katılan öğretmen adaylarının yukarıda bahsedilen sorulara verdikleri cevapların analizinden elde edilen bulgulara yer verilecektir.

Birinci soruda adaylardan tek değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limitinin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilmiş tanımını, iki değişkenli fonksiyonların limiti için genelleştirmeleri istenmiştir. Bu soru ile ilgili bulgulara geçmeden önce iki değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limitinin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilmiş tanımını aşağıda verelim.

Tanım: $A \subset R^2$ (a,b) A kümesinin bir yığılma noktası ve f de A üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \text{ için } \exists\delta > 0 \text{ öyle ki } |x-a| < \delta \text{ ve } |y-b| < \delta$$

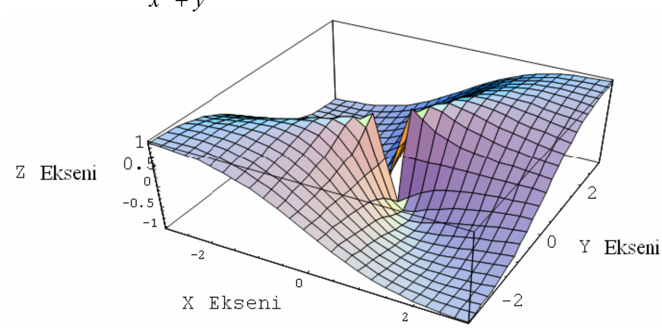
bağıntısını sağlayan, tanım kümesindeki tüm (x,y) noktaları için $|f(x,y) - l| < \varepsilon$ dur (Balcı, 1996).

Tablo 1. Öğretmen Adaylarının Birinci Soruya Verdikleri Cevapların Yüzde-Frekans Dağılımı

GRUPLANDIRILMIŞ CEVAPLAR (İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA LİMİT)	ÖĞRENCİ SAYISI	YÜZDELİK DAĞILIM
$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \lambda > 0$ vardır, öyle ki $\forall (x,y) \in R^2$ ikilileri için $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ iken $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$ o.ş. bir $\delta > 0$ sayısı bulanabiliyorsa, $L \in R$ limiti vardır.	33	%64
. $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$ olacak şekilde $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ min((ℓ_1, ℓ_2) seçilmelidir. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \ell > 0$ bulunur.	7	%13
$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \lambda > 0$ vardır öyle ki $\lvert x-a \rvert < \delta$, $\lvert y-b \rvert < \delta$, $\lvert z-c \rvert < \delta$ iken $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta$ olmalı.	3	%6
Cevap vermeyen.	9	%17
TOPLAM	52	%100

Tablo 1'den de görüleceği üzere çalışmaya katılan 52 adaydan 33'ü (%64), kendilerine verilen tek değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limitinin $\varepsilon - \delta$ tekniği ile verilmiş tanımı genelleyerek, yukarıda verilen iki değişkenli fonksiyonların limit tanımına yakın bir tanım vermişlerdir. Ancak buna rağmen adaylarla yapılan mülakatlarda yapılan gözlemlerde adayların 3 boyutlu grafiklere yabancı oldukları, grafiği verilen iki değişkenli bir fonksiyonun belirli bir noktadaki değerini bulmakta ve grafik üzerinde göstermekte zorlandıkları gözlemlenmiştir. Bunu ilişkin bazı görüşme örnekleri aşağıda verilmiştir (Öğretmen Adayı= ÖA olarak kodlanmıştır).

Araştırmacı: f(x,y) = $\dfrac{2y}{x^2 + y^2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 1: Soruda belirtilen fonksiyonun grafiği

Yukarıda verilen fonksiyonun (1,1) noktasında aldığı değeri, fonksiyonun grafiği üzerinde gösterebilir misiniz?

ÖA1.*:* ((1,1) noktasını fonksiyonda yerine koyarak (1,1,1) değerini elde ediyor) "*x-eksininde 1 burada, y ekseninde burada, z ekseninde ise burada. O halde burada olabilir.* (Yanlış yeri gösteriyor)"

ÖA2.: "*Ben 2 boyutlu düşünebiliyorum. O yüzden, tam bir fikrim yok, 3 boyutlu olduğu için tam bilmiyorum.*" (Fonksiyonun (1,1) noktasındaki değerini hesaplama cesareti gösteremedi).

ÖA3.: *"Daha önce böyle bir şeyle* (fonksiyonu ve grafiğini kastediyor) *sanırım sadece bir kere karşılaşmıştım ama hiç üzerinde durmamıştık, hemen geçmiştik. O yüzden bir fikir yürütemeyeceğim."*

2. ve 3. sorularda adaylara tek ve iki değişkenli fonksiyonların bir noktada limitinin var olup olmadığına karar verebilmek için fonksiyonların hangi ayırt edici özelliklerinden yararlanılabiliceği sorulmuştur.

Aşağıdaki tabloda adayların 2. ve 3. soruya verdikleri cevaplar bir arada verilmiştir, böylece 2. soruya cevap veren bir adayın aynı zamanda 3. Soruya ne cevap vermiş olduğu rahatlıkla görülebilmektedir.

Tablo 2. 2. ve 3. Sorulara verilen cevapların gruplandırılmış hallerinin matrisi

		3.soruya verilen cevapların gruplandırılmış hali				
		Sağ ve sol limiti eşitse limit vardır.	Herhangi bir yorumda bulunmamış.	Aranan nokta etrafında alınan değerlerin görüntüleri belirli bir nokta etrafında yoğunlaşıyorsa, o nokta fonksiyonun istenen noktadaki limitidir.	Üç boyutlu olduğu için grafiği dik eksenlere bölerek limit incelenir. Seviye eğrilerinin limitine bakılır.	**Genel Toplam**
2.soruya verilen cevapların gruplandırılmış hali	Aranan noktada sağ ve sol limitler eşit ise "limit vardır" denir.	14	12	4	1	**31**
	Aranan nokta etrafında alınan değerlerin görüntüleri belirli bir nokta etrafında yoğunlaşıyorsa, o nokta fonksiyonun istenen noktadaki limitidir.		8	2	1	**11**
	Herhangi bir yorumda bulunmamış.		5			**5**

		3.soruya verilen cevapların gruplandırılmış hali				
		Sağ ve sol limiti eşitse limit vardır.	Herhangi bir yorumda bulunmamış.	Aranan nokta etrafında alınan değerlerin görüntüleri belirli bir nokta etrafında yoğunlaşıyorsa, o nokta fonksiyonun istenen noktadaki limitidir.	Üç boyutlu olduğu için grafiği dik eksenlere bölerek limit incelenir. Seviye eğrilerinin limitine bakılır.	**Genel Toplam**
2.soruya verilen cevapların gruplandırılmış hali	Belirli bir aralıkta tanımlı bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için o noktanın tanım aralığında olup olmadığına bakarız ve bu noktada grafik kopmamalıdır. Yani elimizi kaldırmadan grafiği çizmeliyiz.		1		1	**2**
	Limiti var olabilmesi için limiti hesaplanan nokta civarında fonksiyon tanımlı olmalı ve yalnızca bir teğet çizilebilmeli.		2			**2**
	Grafik belirli bir noktaya yaklaşıyor fakat o noktada değer almıyorsa o noktada limiti vardır.			1		**1**
	Genel Toplam	**14**	**28**	**7**	**3**	**52**

Tabloya göre 2.soru için; adayların %60'ı (31 aday) aranan noktada sağ ve sol limitlerin eşit olması durumunda limitin varlığından bahsedilebileceğini iddia etmiştir. %21'i (11 aday) ise "Aranan nokta etrafında alınan değerlerin görüntüleri belirli bir nokta etrafında yoğunlaşıyorsa, o nokta fonksiyonun istenen noktadaki limitidir." ifadesini kullanmıştır. Bu cevaplar toplam katılımcılar arasında %81'lik (toplam 42 aday) bir oran teşkil etmektedir.

Yukarıdaki tabloya göre; tek değişkenli fonksiyonlar için "Aranan noktada sağ ve sol limitler eşit ise "limit vardır denir." şeklinde cevap verenlerin 14'ü (%45), çok değişkenli fonksiyonlar için de aynı şeyin olması gerektiğini ifade etmiştir. 12 öğrenci (%39) ise bu konuda bir fikir beyan etmemiştir.

2.soruda tek değişkenli bir fonksiyonun bir noktadaki limiti için kısaca "değerlerin yoğunlaştığı bir nokta" olarak cevap veren 11 öğrenciden 8'i (%73) çok değişkenli fonksiyonların limiti için herhangi bir yorumda bulunmazken, yine aynı mantıkla çok değişkenli fonksiyonlarda limite ulaşılabileceğini savunan sadece 2 (%18) öğrenci vardır.

Sadece 3. soruya verilen cevaplar değerlendirildiğinde yorum yazmayanların sayısının 28'e yükselerek %54'lük payla ilk sırada oldukları görülmektedir. İki değişkenli fonksiyonlarda limitin tespitinin, tek değişkenli fonksiyonlarda yapıldığı gibi olması gerektiğini savunan 14+2=16 öğrenci (%31) vardır. İki grup toplam %85'lik bir paya sahiptir. Burada 3 öğrencinin diğerlerinden farklı olarak seviye eğrilerinden bahsetmesinden yola çıkarak, bu öğrencilerin daha önce bu dersi aldıkları ihtimalinden söz edilebilir.

4. Sonuç, Tartışma Ve Öneriler

Matematik öğretmen adaylarının sahip oldukları tek değişkenli fonksiyonların limiti kavram bilgisinden yola çıkarak iki değişkenli fonksiyonlar için limit kavramını yapılandırırken yürüttükleri soyutlama ve genellemelerin nasıl geliştiğini tespit etmek amacıyla yapılan bu araştırmada, öğrencilere yazılı bir anket uygulanmış ve adaylarla mülakat yapılmıştır. Bu çalışmalarda yer alan ve bu makaleye konu olan 3 soruya verilen cevaplar analiz edilerek sonuçları değerlendirilmiştir. Sonuçlar göstermektedir ki, adaylar mevcut bilişsel yapılarını ve fikirlerini değiştirmeden yürüttükleri genellemelerde oldukça başarılı olabilmektedirler. Adaylar limitin $\varepsilon-\delta$ tekniği ile verilmiş tanımını hiçbir ön bilgiye sahip olmaksızın iki değişkenli fonksiyonlar için genelleştirebilmişlerdir. Ancak tek değişkenli fonksiyonların bir noktadaki limitini tespit ederken fonksiyonların sağ ve sol limitlerinin varlığını ve bu limitlerin eşitliğini inceleyen adayların çoğu, benzer bir düşünce ile iki değişkenli fonksiyonların limiti için de limitin arandığı noktada sağ ve sol limitlerin varlığına bakmak gerektiğini savunmuşlardır. Fakat tek değişkenli fonksiyonlar için izledikleri hiç bir yöntem, iki değişkenli bir fonksiyonun limitinin aranan nokta etrafında yapılacak her türlü yaklaşım şeklinden bağımsız olması gerektiği sonucuna varmada adaylara yardımcı olmamıştır. Bu durum soyutlama ve genellemenin bilişsel bir gelişme olduğunu ve bu gelişmenin kolaylıkla gerçekleşmediği düşüncesini desteklemektedir (Mitchelmore, M.C.& White, P.,2000).

Adayların tek değişkenli fonksiyonların limiti konusunda sahip oldukları kavram bilgilerinin zayıf olduğu söylenebilir. Dolayısıyla zayıf olan kavram bilgilerinin üzerine adaylardan genellemeler ve soyutlamalar yaparak iki değişkenli fonksiyonların limiti konusunu anlamaları beklenmektedir.

Dolayısıyla bu noktada öğrencilerin genelleme yaparken sahip oldukları bilişsel yapının ne kadar sağlam olması gerektiği net bir şekilde ortaya çıkmaktadır. Benzer bir tespiti Alkan ve Bukova (2005) dile getirmişlerdir. 64 öğretmen adayı ile yürüttükleri çalışmada, adaylardan "tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, betimleme, genelleme, örnekleme, biçimsel ve biçimsel olmayan usa vurma, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşim kümesi (Liu Po-Hung, 2003)" olarak tanımlanan matematiksel düşünme güçlerinin tespiti için, "Türev Kavramı" ile üstten sınırlandırılan ve önceden belirlenen "matematiksel düşüncenin ölçütleri (Greenwod, 1993)" temel alınarak hazırlanmış, test edilmiş ve denetlenmiş problemleri çözmeleri istenmiştir. Deneklerin ölçme aracında yer alan problemlerde sergiledikleri genelleme becerileri matematiksel düşünme güçleri ile birlikte değerlendirilmiştir. Sonuç olarak öğretmen adaylarının Analiz I-II derslerinde başarıyı etkileyen genelleme yapabilme puanları ile matematiksel düşünme düzeyleri arasında belli ölçüde doğrusal bir bağıntı olduğunu tespit etmişlerdir (r=0.71).

Özetle; matematiksel düşünme gücünü oluşturan kavramsal bilgileri, adayların matematiksel genelleme yapabilme becerileri ile yakın ilişkilidir. Bu yüzden adayların, tek değişkenli fonksiyonların limiti hakkında var olan kavram bilgilerini sağlamlaştırılmadan, bu bilgilerinin üzerine genelleme ve soyutlama gerektiren iki değişkenli fonksiyonların limiti kavramını yapılandırmaya geçmelerinin uygun olmayacağı izlenimi oluşmuştur. Ayrıca adayların iki değişkenli fonksiyonlara ve onların grafiklerine aşina olmadıkları gözlemlenmiştir. Dolayısıyla adaylardan tek değişkenli fonksiyonların limiti bilgisi yardımı ile iki değişkenli fonksiyonlarda genelleme yapmalarını beklerken, iki değişkenli fonksiyonlar hakkında bilgilerinin kısıtlı olduğu görülmüştür.

Bu araştırmada ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının tek ve iki değişkenli fonksiyonların limiti ile ilgili kavram bilgileri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Benzer bir araştırma pür matematik eğitimi alan lisans öğrencileri ile de yürütülebilir. Zira pür matematik eğitimi alan lisans öğrencilerinin matematik öğretmen adaylarından farklı olarak "Öğretmeyi öğrenmeye yönelik bilgi, beceri ve eğilimleri geliştirmek" konusuna daha az odaklandıkları için matematiksel alan uzmanlığına sahip olma kaygısını daha fazla taşıdıkları düşünüldüğünden, benzer bir araştırmada farklı sonuçlar elde edilebilir.

5. Kaynakça

Balcı, M. (1996). Analiz I, Balcı Yayınları, Cilt-I, 1.Baskı, Ankara.

Baştürk S. (2005). "Üniversite Matematik Bölümü öğrencilerinin Türkiye'deki matematik eğitimi hakkındaki çağrışımları: lise, dershane ve üniversite boyutunda", Yeditepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, sayı 1.

Beurk, D. (1982). An experience with some able women who avoid mathematics. For the Learning of Mathematics, 3, 19–24.

Bukova E. (2006). Öğrencilerin limit kavramını algılamasında ve diğer kavramlarla ilişkilendirmesinde karşılaşılan güçlükleri ortadan kaldıracak yeni bir program geliştirme. Yayımlanmış doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Bukova E., Alkan H. (2005), Öğretmen Adaylarında Matematiksel Düşünmenin Gelişimi, GÜ, Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, Cilt 25, Sayı 3 (2005) 221-236, Ankara.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 25-41).

Greenwood J. J. (1993), Teaching and Assessing Mathematical Power and Mathematical Thinking, The Aritmetic Teacher, Nov 1993, 41,3: ProQuest Education Complete pg.144.

Karasar, N. (2000). Bilimsel Araştırma Yöntemi, Nobel Yayın Dağıtım, 12. Basım, Ankara.

Liu P. H (1996), Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching?, The Mathematics Teacher. Reston: Sep .Vol.96, Iss. 6; pg. 416.

Mitchelmore, M. C., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. Educational Studies in Mathematics, 41, 209-238.

Molodsij, Vlademir.N., (1977). Studien zur philosophischen Problemen der Mathematik (Ocerki po filosofskim vobramasam matematiki) Berlin: Dt. Verl. d. Wissenschaften.

Morman Thomas (1981), Argumentieren, Begründen, Verallgemeinern. Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Königstein/Ts.: Scriptor.

Sabella, M.S., Redish, E. F., (1995). Student understanding of topics in linear algebra, Physics Education Research Group Unıversity of Maryland Physics Departmant College Park,16.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. Journal for Research in Mathematics Education, 20, 356-366.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2000). Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri. Ankara Seçkin Yayınevi.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction: The behaviour of a function around a point could be observed with the values it take around its points. The main difficulty in terms of understanding and learning limit is the imagination in brain the way how two points could be close to each other if these two points are not the same. It is not possible to give the answer of this question with naked eye, because there is not an end of upsizing or minimizing. Traditionally, the values are determined around the function as much as possible, it is imagined around which number these values are in major, it is tested whether the imagined number is really limit or not. Also, it is not required that the function should be defined on the point which it is analysed. The main idea of the analyse of limit conception for all functions is that. When the limit of a point of a function is mentioned, the determination of whether the students think the same issue is important in terms of how students structured the concept of limit. It is generally declared by the mathematicians and mathematic trainers that the understanding of these concepts will not be problematic when the student uses the above idea regarding the limit for all functions.

The researchers of Mathematics Training recognized the importance of understanding the components of the process of high level mathematics and affecting each other. (Dreyfus, 1989). Dreyfus (1989) states that the abstraction of concepts and generalization in high level mathematics is more required to be focused even if there is not a discrimination between the elementary processes and high thinking of mathematics.

Especially the students who receive mathematics training in the universities have been busy with the limit of single variable functions during their high school training. Since most of the students will meet the multivariate functions and the limit of these functions during the first schools terms, it is important to determine the development of abstraction and generalization via the limit of single variable functions which the candidates have.

The Purpose of the Study: The purpose of this research is to determine that how the abstraction and generalization developed with the help of having the knowledge of the concept of limit of a single variable functions which the mathematics teacher candidates have. It is desired that this research will contribute the development of teaching the concept of limit by determining the difficulties and obstacles about the subject.

The Instruments and Sample : The research is restricted with 52 students in the 1st and 2nd classes of mathematics teachers discipline studying at the department of a State University's of Science and Math, High School Math Teacher Education Department.

For the research, the lessons of the candidates on the limit of the single variable functions which are covered throughout Analyse-1 was followed. After a 6 months period, before the lessons of the candidates on the limit of multivariate functions started, the repeats were given to the candidates of teachers regarding the limit of single variable reel functions, multivariate functions and graphics were introduced. Afterwards, open-end questions were asked to the candidates regarding the limit of double variable functions which is the subject of Analyse-2 for the purpose of how they can generalize by the concept information they have.

In all studies, there are 15 questions including the open-end and test questions. However, in this Article, the findings of the analysis of the answers of the 3 questions will be handled which the candidates answered regarding the subject.

Conclusıon, Dıscussıon And Recommendatıons: A written questionnaire was implemented to the students and they were interviewed in this research for the purpose of determining how the abstraction and the generalization developed while structuring the limit concept for double variable functions, setting out from the concept information of the limit of single variable functions which the candidates of Mathematics Teachers have. The answers of 3 questions which take place in these studies and subject to this Article were analysed and the results were evaluated. The results indicate that the candidates are successful enough in the generalizations which they carried out without changing their cognitive structure and ideas. The candidates could generalize the definition of limit with $\varepsilon - \delta$ technique without having any preliminary information. However, most of the candidates who analyzed the existence of right and left limits of the functions while determining the limit of a point of the single variable functions and the equality of these limits, with a similar idea, advocated that it should be looked for the existence of right and left limits where the limit is searched on a point for the limit of double variable functions. But, any methodology which they followed for a single variable function were not helpful to the candidates regarding the necessity of being independent for any approach style for the limit of a double variable function around a searched point. This situation supports the idea that abstraction and generalization are cognitive development and this development is not performed easily. (Mitchelmore, M.C.& White, P.,2000).

It can be concluded that the concept information which the candidates have regarding the limit of single variable functions is weak. Therefore, the candidates are expected to understand the limit of double variable functions by generalizations and abstractions upon the weak concept information.

In summary, the concept information which composes the strength of mathematical thinking is closely related with the capability of candidates' mathematical generalization. Consequently, the impression has been constituted that it is not appropriate for the candidates that they constitute the limit of double variable functions which require generalization and abstraction without strengthening their concept information on the limit of single variable functions.

In this research, the relationships between the concept of the limit of single and double variable functions were reviewed among the candidates of mathematics teachers. A similar research might be carried out for the undergraduate students who take pure mathematics education. Different results might be obtained in a similar research since the undergraduate students who receive pure mathematics training different from the candidates of mathematics teachers have less focused on "Development of knowledge, skill and tendencies for the purpose of learning teaching" as they have more concerns on having mathematical field expertise.