Nötron Transportu için Küresel Geometride Özdeğer Hesaplaması

Fikret ANLI **Faruk YAŞA**
KSÜ, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Kahramanmaraş

ÖZET
Bu çalışmada nükleer fiziğin güncel konularından biri olan transport eşitliğinin özdeğeri incelendi. Analizi zor olan nötronların küresel geometri problemi bizim yaklaşımımızla düzlem geometri problemine indirgenmiştir. Sonrada bu geometride özdeğerler üretilerek çözüme ulaşılmıştır.
Anahtar kelimeler: Nötron Transport, Özdeğer, Akı, Küresel Geometri.

Eigenvalue Calculation for Transport Theory in Spherical Geometry

ABSTRACT
In this study, eigenvalue and eigenvector of transport equation which are current topics of nuclear physics are investigated. Spherical geometry problem of neutron was reduced the slab geometry problem with our approach. This equation is then solved in this slab geometry with producing eigenvalue.
Keywords: Neutron Transport, Eigenvalue, Flux, Spherical geometry.

GİRİŞ

Nükleer reaktörler; nükleer enerjiyi ısı enerjisine dönüştüren, başka bir deyişle içerisinde kontrollü bir şekilde zincirleme fisyon reaksiyonlarının oluşturulabildiği ve bu reaksiyonların şiddetine bağlı olarak, ortamda ısının üretildiği sistemlerdir. Zincirleme fisyon reaksiyonu sonunda oluşan nötron miktarı, reaksiyonun devamlılığı için çok önemlidir. Bir nükleer reaktörün davranışı; reaktördeki nötronların sayısına, enerjisine ve konumlarına bağlıdır. Şüphesiz reaktör teorisinin en önemli problemlerinden biri de nötronların reaktör geometrisine bağlı olarak, reaktör içerisindeki nötronların uzaysal dağılımlarını karakterize eden özdeğerin araştırılmasıdır.

Nötronların reaktör içindeki uzaysal dağılımları bir difüzyon olayı olarak düşünülür. Lineer transport denklemi, reaktör fiziğinin yanı sıra, radyoaktif kaynakların zırhlanması, plazma dinamiği, astrofizik, radiatif transfer problemleri ve gazların kinetik teorisi gibi fiziğin pek çok dalında geniş bir kullanım alanına sahiptir (Duderstadt ve Martin, 1978; Case ve Zweifel, 1967).

Literatürde küresel geometride transport eşitliğinin çözümü yok denecek kadar az olduğundan bu çalışma yapılmıştır. Bu çalışmada dilim geometride transport eşitliği çözümleri için kullanılan Case, P_N ve S_N eşitliğinin çözüm yöntemlerinden yararlanarak küresel geometride özdeğerler üretimi yaklaşımı ile transport eşitliği çözülmüştür. $\psi(r,\mu)$ nötronların dağılımı açısal akı olup, bu çalışmada üstel bir fonksiyon ile temsil edilmiştir. Bu önerilen yeni analitik çözüm yöntemi küresel transport denklemini dilim(düzlem) transport denklemine indirgemektedir (Mitsis,1963; Siewert and Grandjean, 1979).

Transport eşitliğinin özdeğer hesaplamaları değişik yaklaşımlar ile Yavuz

(1997), Woznicki (1998), Siewert and Wright (1999) gibi araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Temel olarak bizim çalışmamızda Boltzman denklemi olarak bilinen kararlı durumdaki nötron transport denkleminin küresel geometride yeni bir çözümlemesini içermektedir.

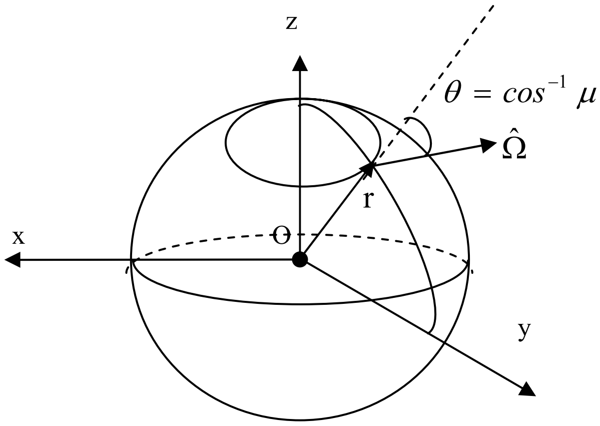
METOT

Önce tek gruplu, izotropik saçılmalı ve dış kaynağın olmadığı homojen bir ortam için küresel koordinatlarda transport eşitliği yazılarak çözüme başlanır. Daha önce de belirtildiği üzere, Şekil (1)' de görüldüğü gibi, bu geometride $\psi(r,\mu)$ nötron açısal akı dağılımı, azimutal açıdan bağımsız olduğundan transport eşitliği şöyle yazılır,

$$\mu\,\frac{\partial\psi(r,\mu)}{\partial r}+\frac{1-\mu^2}{r}\,\frac{\partial\psi(r,\mu)}{\partial\mu}+\sigma_T\psi\,(r,\mu)=\frac{\sigma_{s0}}{2}\int_{-1}^{1}\psi\,(r,\mu')\,d\mu'\ ,\qquad(1)$$

burada, σ_T ve σ_{s0} sırası ile toplam tesir kesiti ve izotropik saçılma tesir kesitidir. Saçılma izotropik kabul edilmiştir. Yani saçılım her yöne eşit ihtimalle saçılıyor. Saçılım açıdan bağımsızdır.

Değişkenlere ayrışım metodu ve küresel harmonik çözüm metodu göz önüne alınarak küresel geometride transport eşitliği çözülebilmektedir(Mitsis,1963; Yıldız, 2001; Kaşkaş ve ark., 1999). Küresel Harmonik çözümlerinde çözüm fonksiyonunun açısal kısmı Legendre polinomları cinsinden düşünülerek, konuma bağlı kısmı Bessel fonksiyonları olarak elde edilmektedir. Bizde açısal kısım herhangi bir fonksiyon olmak üzere konuma bağlı kısım, günümüzde birçok araştırmacı tarafından kullanılan (Yıldız, 2000; Sharma, 2002; Anlı,1994; Aronson, 1984) Bessel fonksiyonları yerine, buna benzer analitik bir yaklaşım geliştirilecektir.



Şekil 1. r ve μ 'ye bağlı nötron akışı.

Bu geometride r konumu, 0 ile ∞ aralığında değiştiği bilinmektedir. Bessel polinomları göz önüne alındığında konuma bağlı kısım eksponansiyel olmalıdır.

Böylece,

$$\psi(r,\mu) \approx e^{-\sigma_T r\, f(\mu)} \tag{2}$$

şeklinde bir analitik çözümün, küresel geometri denklemini sağlayacağını söyleyebiliriz. Burada f(μ) açısal kısmın çözümü olan herhangi bir fonksiyon olarak aranılıyor. Bu çözüm ifadesi Eş.(1)'de yazılırsa,

$$\left(-\mu f(\mu)-(1-\mu^2)\frac{df}{d\mu}+1\right)e^{-\sigma_T r f(\mu)} = \frac{c_o}{2}\int_{-1}^{1} e^{-\sigma_T r\, f(\mu')}d\mu' \tag{3}$$

ifadesi elde edilir. Burada her iki tarafın μ üzerinden integrali alınırsa, bu eşitliğin sağlanabilmesi için eşitliğin sol tarafındaki parantez içi c_0 'a eşit olması gerektiği anlaşılır

$$-(1-\mu^2)\frac{df}{d\mu}-\mu f(\mu)+1=c_0\,. \tag{4}$$

Burada $c_0 = \sigma_{s0}/\sigma_T$ şeklinde tanımlı ortam parametresidir. Sonra bu diferansiyel denklem çözülürse, f(μ) için

$$f(\mu) = \mu(1-c_o) + (1-c_o)\sqrt{1-\mu^2}\,.\mathrm{C} \tag{5}$$

ifadesi elde edilir ve basitlik için Eş.(5)'in ikinci terimindeki C integral sabiti sıfır seçilirse, çözüm ifademiz,

$$\psi(r,\mu) = e^{-\sigma_T r(1-c_o)\mu} \tag{6}$$

şekline gelir. Buradan

$$\frac{\partial\psi(r,\mu)}{\partial\mu} = -\sigma_T r(1-c_o)\,\psi(r,\mu) \tag{7}$$

$$\mu\frac{\partial\psi(r,\mu)}{\partial r}-\sigma_T(1-c_0)(1-\mu^2)\psi(r,\mu)+\sigma_T\psi(r,\mu)=\frac{\sigma_{s0}}{2}\int_{-1}^{1}\psi(r,\mu')d\mu' \tag{8}$$

şeklinde pseudo-slab(sözde-dilim) problemine ulaşılır. Bundan sonra küresel koordinatların sınır şartları bu sözde-dilim probleminde kullanılarak işlemlere devam edilir. Eş.(8) açısal türevsiz transport denklemi şeklindedir. Bu tür bir yaklaşıma sözde-dilim geometri denilmektedir (Mitsis, 1963; Yıldız,2001; Kaşkaş ve ark. 2000; Siewert and Grandjean, 1979). Böylece küresel geometride transport eşitliği, dilim geometri eşitliğine benzetilmiş olur. Burada şu belirtilmelidir ki küresel geometride açısal türevin varlığı problem çözümlemesinde ve özellikle hangi nümerik metodun daha iyi yaklaşıklık vereceğine karar vermekte bir sorun oluşturmaktadır. Bundan dolayı sözde-dilim geometri çözümü kullanılır. Küresel geometride; başlangıç, sınır ve simetri gibi gerekli şartlar kullanılarak çözüme devam edilir.

Eş.(8)'in genel çözümü;

$$\psi = H(\nu,\mu)e^{-\sigma_T r/\nu} \tag{9}$$

olduğu kabulüyle bu Eş.(8)' de yerine yazılırsa,

$$\left[\frac{\sigma_T}{\nu}\mu - \sigma_T(1-c_o)(1-\mu^2) + \sigma_T\right]H = \frac{\sigma_{so}}{2}\int_{-1}^{1} H\,d\mu' \tag{10}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $\int H(\nu,\mu)d\mu = 1$ normalizasyon şartı kullanılırsa,

$$\frac{\nu c_o}{2}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{\nu-\mu-\nu(1-c_o)(1-\mu^2)} = 1 \tag{11}$$

elde edilir. Buradan analitik olarak ν özdeğerleri bulunur. Ancak uygulayacağımız yöntem gereği bu integrali Gauss- Legendre quadratur setleri ile alacağız;

$$\sum_{m=1}^{M} H_m(\nu)w_m = 1, \qquad \text{m=1,2,....N} \tag{12}$$

buna göre ν özdeğerleri Case yönteminde olduğu gibi buradan kolaylıkla bulunur. Bilindiği gibi analitik Case yönteminde bu sürekli ν özdeğerleri singüleriteli integral çözümlerinden elde edilmektedir. Biz bu sürekli özdeğerleri nümerik yaklaşım ile bulmaktayız. Burada w_m ağırlık fonksiyonlarıdır. N'in çift mertebe yaklaşımında μ_m kökleri, 0 orijine göre simetrik olduğundan genelde N sayısının çift durumu kullanılır. N sayısı tek alınırsa, kökün biri orijinde olmak üzere diğer değerler yine simetriktir. μ_m'in mertebesi ν özdeğerlerinin sayısını belirler. Örneğin; N=4 ise, μ_m dört değer ($\mu_1 = -\mu_4$, $\mu_2 = -\mu_3$) alırken ν_k özdeğeri de $\nu_1 = -\nu_4$, $\nu_2 = -\nu_3$ değerlerini alır(ν_k =1,2,...N).

$$\frac{\nu c_O}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{w_n}{\left[\nu-\mu_n-\nu(1-c_0)(1-\mu_n^2)\right]} = 1 \tag{13}$$

Eş.(13) şartında N sayısının çift durumunda ν özdeğerleri için N'ncı dereceden bir polinom elde edilir(Anlı, 2001). Bu polinomun kökleri de k=1,2,...,N olmak üzere ν_k değerleridir. μ_m doğrultu kosinüsleri orijine göre simetrik olduğundan ν_k özdeğerleri de ν =0'a göre simetrik olmaktadır.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Eş.(13) bağıntısı kullanılarak MAPPLE V programı ile ν_k değerleri için hesaplama yapıldı ve Tablo I'de verildi. Dilim geometride, c_0 =0.99 ve N=2 için ν_0 özdeğeri 5.77 civarında iken bizim problemimizde 10.03 civarında çıkmakta.

Burada ν_0 özdeğerleri 10 civarında çıkması beklenilen bir sonuçtur. Çünkü bu değer difüzyon uzunluğu ile orantılıdır. Dilim geometride analitik çözümlemede olduğu gibi burada da ν özdeğerleri, 0 orijin noktasına göre simetrik yayılmakta; ν özdeğerleri sayısı, N yaklaşım mertebesine bağlı, ν_k, k=1,2,...N, şeklinde tanımlı; ve ν'nün hem –1<ν<1 aralığındaki hem de bu aralığın dışındaki asimtotik çözümlere denk gelen ν>1 değerlerini, Eş.(13) dağılım bağıntısı vermektedir. –1<ν<1 aralığındaki özdeğerlere sürekli özdeğerler denir. Bu özdeğerlere karşılık gelen çözümlerine sürekli çözümler denir. Bu çözümler r uzaklığı ile çabuk değiştiklerinden kaynağın yakınlarında ve sınırlarda daha baskındır. Fakat ν>1 özdeğerlerinin tekabül ettiği çözümler r ile yavaş değiştiğinden kaynaktan ve sınırlardan uzak yerlerde baskındır. Bu çözümlere de asimtotok çözümler denir (Bell and Glasstone, 1970). Ayrıca, bu ν özdeğerleri, başka metotlar ile bir program yapılarak hesaplanabilir. Tablo 1'de de görüldüğü gibi c_0>0 olması durumunda asimtotik çözümlerine denk gelen ν>1 değerleri kompleks, diğerleri yine reel sayı olmaktadır.

Tablo 1. ν_k (k=1...N) özdeğerleri

N	c_o=0.2	c_o=0.7	c_o=0.99	c_o=1.3	c_o=1.7
2	± 1.63663	± 2.04124	± 10.0335	± 1.66666i	± 0.98692i
4	± 1.68586 ± 1.09613	± 1.95620 ± 0.65213	± 10.0200 ± 0.51088	± 1.728510i ± 0.414729	1.0648489i ± 0.333875
6	± 1.57335 ± 101185 ± 1.03147	± 1.95602 ± 0.90631 ± 0.42810	± 10.0200 ± 0.81891 ± 0.31505	± 1.728826i ± 0.742095 ± 02456931	± 1.064680i ± 0.663354 ± 0.191347
8	± 1.57567 ± 1.15684 ± 1.03701 ± 0.92065	± 1.95603 ± 0.95729 ± 0.76730 ± 0.31367	± 10.0200 ± 0.90808 ± 0.63205 ± 0.22646	± 1.728828i ± 0.860596 ± 0.531733 ± 0.174574	± 1.064667i ± 0.807123 ± 0.441579 ± 0.134741

İki tane asimtotik özdeğer varsa açısal akı çözümü de

$$\psi(r,\mu) = AH(\nu_1,\mu)e^{\sigma_T r/\nu_1} + BH(\nu_2,\mu)e^{+\sigma_T r/\nu_2} \tag{14}$$

genel çözüm bağıntısında yerine yazılarak bulunur(Anlı ve Güngör, 1996). Burada A ve B, sınır şartlarından bulunacak sabitler ve H(ν) yukarıda tanımlanmıştır. Eğer özdeğer sayısı ikiden fazla ise çözüm

$$\psi\ (r) = \sum_{k=1}^{N} A_k H(\nu_k) e^{\sigma_T r/\nu_k} \tag{15}$$

bağıntısı ile bulunur.

SONUÇ

Küresel geometride transport eşitliğinde açısal türevin varlığı analitik çözümü oldukça zorlaştırmaktadır. Literatürde bilinen iki analitik çözüm yöntemi vardır. Birincisi çok ağır integraller içeren "İntegral" çözüm yöntemidir. İkincisi ise Yıldız(2000), Sharma(2000), Lathrop(2000), Garis(1991) gibi araştırmacıların ele aldığı "P_N Küresel Harmonik analitik yöntemdir.

Sonuç olarak küresel geometride analitik çözüm yöntemi az denecek kadar azdır. Ama dilim(düzlem) geometride birçok çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Bundan dolayı nötronların transport eşitliğinin çözümleri genelde nümerik yaklaşım yöntemlerle çözülmektedir. Böylece bizde küresel geometride çözüm olabilecek özdeğeri araştırmış bulunuyoruz. Sonuçlar güvenilir ve literatürde var olan çalışmalar ile uyum göstermektedir.

KAYNAKLAR

Anlı, F., S. Güngör, 1996. Annals of Nuclear Energy, 23, 669.

Anlı, F., 2001. Spectral Green's Function method for neutron transport. Ann. Nucl. Energy, vol.28, 1033-1042.

Anlı, F., 1994. Üç boyutlu kartezyen geometride diskret ordinat problemlerinin Spectral Green fonksiyonları ile çözümü. Ç. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.

Aronson, R., 1984 a. Critical problems in spherical geometry. Nuclear Science and Engineering, 86, 136-149.

Case, K.M., P.F. Zweifel, 1967. Linear Transport Theory. Wesley company. London.

Duderstadt, J.J., W.R. Martin, 1978. Transport Theory. The unv. of Michigan, Ann Arbor.

Garis, N.S., 1991. One speed neutron transport eigenvalues for reflected slabs and spheres. Nucl. Sci. and Engng., 107, 343-358.

Kaşkaş, A., C. Tezcan, M.Ç. Güleçyüz, 2000. The solution of the third form transport equation using singular eigen functions. JQSRT., 66(2000), 519-528.

Mitsis, G. J., 1963. Transport solutions to the mono energetic critical problems. (Thesis), ANL-6787.

Sahni, D.C., A. Sharma, 2000. Computation of higher spherical harmonics moment of the angular flux for neutron transport problems in spherical geometry. Ann, Nucl. Energy, 27, 411-433.

Sharma, A., 2000. Spherical harmonics moments of neutron angular flux for spherically symmetric systems. Am. Nucl. Energy, 715-721.

Seiwert, C.E., P. Grandjean, 1979. Three basic neutron transport problems in spherical geometry. Nucl. Sci. and Engng., 70, 96-110.

Seiwert, C.E., S. J. Wright, 1999. Efficient eigenvalue calculations in radiative transfer. JQSRT, 62, 685-688.

Yavuz, M., 1997. Methods for computing S_N eigenvalue and eigenvectors of slab geometry transport problems. Ann. of Nucl. Energy, Vol. 25, 149-160.

Woznicki, Z. I., 1998. The nümerical anaalysis of eigenvalue problem solutions in the multigroup neutron diffusion theory. Prog. Nucl. Energy, Vol. 33, 302-391.