



Hiyerarşik İşgücü Çizelgeleme Problemi İçin Tamsayılı Programlama Modeli

Banu SUNGUR¹

Alınma Tarihi: Ekim-2008, Kabul Tarihi: Haziran-2009

Özet

Bu çalışmada sunulan model hiyerarşik işgücü çizelgeleme problemi için geliştirilmiş Billionnet Modeli'ni esas almaktadır. Billionnet Modeli'nde işçi maliyetlerinde haftalık çalışma saatleri dikkate alınmazken, önerilen modelde işçilerin haftalık maliyetleri haftalık çalışma saatlerine orantılı olarak hesaplanmıştır. Önerilen model Billionnet'nin çalışmasındaki örnek problem üzerinde uygulanmıştır. Söz konusu modellerin aynı örnek problem için elde edilmiş çözümleri karşılaştırma yapılarak değerlendirilmiştir. Önerilen model ile toplam maliyette azalma sağlanmıştır.

Anahtar Kelime: İşgücü Çizelgeleme; Tamsayılı Programlama; Hiyerarşik İşgücü

Jel Sınıflandırma Kodu: C02

An Integer Programming Model For Hierarchical Workforce

Abstract

The model presented in this paper is based on the model developed by Billionnet for the hierarchical workforce problem. In Billionnet's Model, while determining the workers' weekly costs, weekly working hours of workers are not taken into consideration. In our model, the weekly costs per worker are reduced in proportion to the working hours per week. Our model is illustrated on the Billionnet's Example. The models in question are compared and evaluated on the basis of the results obtained from the example problem. A reduction is achieved in the total cost by the proposed model.

Keywords: Workforce Scheduling; Integer Programming; Hierarchical Workforce

Jel Classification: C02

1.Giriş

İşgücü çizelgeleme literatüründe çalışma haftasının beş gün olduğu çalışmalar çoğunlukta, çalışma haftasının üç gün veya dört gün olduğu çalışmalar da mevcuttur.

Hung (1994a), Burns ve diğerleri (1998), Narasimhan (2000) işçilerin üç gün ve dört gün çalıştığı, Hung (1994b) işçilerin haftada dört gün çalıştığı

¹ Erciyes Üniversitesi İ.İ.B.F. İşletme Bölümü, e-posta: bitgenb@erciyes.edu.tr

işgücü çizelgelemesi için algoritma geliştirmişlerdir. Alfares (2003) haftada dört gün çalışan işçilerin çizelgelemesini yapmak için tamsayılı programlama modeli kurmuştur. Haftalık çalışma süresinin dört ya da üç gün olduğu diğer çalışmalar ise şöyledir: Hung (1991), Billionnet (1999), Alfares (2000), Seçkiner ve diğerleri (2007).

Billionnet (1999), işçilerin bir haftada üç, dört ya da beş gün ve gün içinde de tam zamanlı olarak (sekiz saat) çalıştığı bir organizasyon için çizelgeleme yapmak üzere tam sayılı programlama modeli geliştirmiştir. Seçkiner ve diğerleri (2007) Billionnet Modeli'nden hareketle yeni bir model önermişlerdir. Seçkiner modelinin Billionnet Modeli'nden farkı işçilerin tamamının günlük çalışma saatinin aynı olmamasıdır. Haftada beş gün çalışanlar günde sekiz saat, haftada dört gün çalışanlar günde on saat ve haftada üç gün çalışanlar günde 12 saat çalışmaktadır yani hızlandırılmış çalışma haftası söz konusudur. Her iki çalışmada da işçiler hiyerarşik olarak üç farklı tipe ayrılmışlardır. Hiyerarşik işgücü problemleri daha nitelikli bir işçinin daha az nitelikli bir işçinin yerine geçebileceği ama tersi bir durumun mümkün olmadığı problemlerdir. Hiyerarşik işgücü Emmons ve Burns (1991), Narasimhan (1996), Billionnet (1999), Narasimhan (2000), Seçkiner (2007) tarafından çalışılmıştır.

Bu çalışmada Billionnet Modeli'nden hareketle geliştirilmiş bir model önerilecektir. Billionnet'nin çalışmasında olduğu gibi yine günde sekiz saat ve haftada beş gün, dört gün veya üç gün çalışan hiyerarşik işgücü söz konusudur. Ancak, Billionnet Modeli'nde işçilerin ücretleri haftalık çalışma saatlerine göre değil de sadece hiyerarşik olarak ayrıldıkları tiplere göre değişmekteyken önerilen modelde işçi maliyetleri işçilerin hem hiyerarşik olarak tiplerine hem de haftalık çalışma saatlerine göre değişmektedir. Önerilen model, Billionnet'nin çalışmasındaki örnek bir problem için kurulacak ve çözülecektir. Çözüm sonuçları Billionnet Modeli'nin aynı örnek problem üzerindeki çözümüyle karşılaştırılarak değerlendirilecektir.

2.Billionnet'nin Problemi ve Tamsayılı Programlama Modeli

Modelin uygulandığı karar problemi aşağıdaki gibi tarif edilmektedir:

(1) İşletme pazartesinden pazara kadar haftada yedi gün çalışmaktadır. Günler 1,2,3,4,5,6 ve 7 olarak adlandırılmaktadır.

(2) Bütün işçiler tam zamanlı çalışmaktadır. İşçiler, birinci tip işçiler en nitelikli, ikinci tip işçiler daha az nitelikli şeklinde sıralanmak üzere m tip olarak sınıflandırılmaktadır. k. tip işçinin maliyeti c_k 'dir ($c_1 > c_2 > \dots > c_m$).

(3) 1. tip işten j gün d_{lj} kadar yapılmalıdır. Her bir iş bir işçi tarafından yapılmaktadır ve $l \geq k$ olmak şartıyla l. tip işi k. tip işçi yapabilmektedir.

(4) Her bir işçi her bir hafta n (n= 2,3,4) gün izin yapmalıdır. Haftada beş gün çalışanlar iki gün, dört gün çalışanlar üç gün ve üç gün çalışanlar da dört gün izin yapmalıdır.

(5) Amaç toplam işgücü maliyetinin minimize edilmesidir.

Modelin indisleri, parametreleri ve karar değişkenleri aşağıdaki gibidir:

İndisler:

k= işçi tipleri (k=1,...,m)

l= iş tipleri (l=1,...,m)

j=günler (j= 1,...,7)

Parametreler:

n= işçilerin bir haftalık izin günleri sayısı (n=2,3,4)

c_k =k. tip işçinin maliyeti

Karar Değişkenleri:

w_k : k. tip işçi sayısı (k=1,...,m)

x_{klj} : k. tip işçilerden l. ($l \in \{1, \dots, m\}, l \geq k$) tip işi j. (j= 1,...,7) gün yapmak üzere atananların sayısı (k=1,...,m)

y_{kj} : k. tip işçilerden j. (j= 1,...,7) gün izinde olanların sayısı (k=1,...,m)

Billionnet Model'inin Genel Gösterimi de aşağıdaki gibidir:

$$\text{Minimize } Z = \sum_{k=1, m} c_k w_k$$

Subject to

$$\sum_{l \geq k} x_{klj} + y_{kj} = w_k \quad (k=1, \dots, m; j=1, \dots, 7) \quad (I)$$

$$\sum_j y_{kj} \geq w_k n \quad (k=1, \dots, m) \quad (II)$$

$$\sum_{k \leq l} x_{klj} = d_{lj} \quad (l=1, \dots, m; j=1, \dots, 7) \quad (\text{III})$$

$$x_{klj}, y_{kj}, w_k \text{ tamsayı} \quad (k=1, \dots, m; l=1, \dots, m; j=1, \dots, 7)$$

Kısıtlar kümesi (I) k. tip işçilerin j. gün ya l. tip işi yapmak üzere çalışıyor ya da izinli olmalarını, kısıtlar kümesi (II) işçilerin bir haftada en az iki gün izin yapmalarını ve kısıtlar kümesi (III) ise l. tip işin j gün ihtiyaç duyulan kadar yapılmasını garantilemektedir. Amaç fonksiyonu ise toplam işgücü maliyetlerinin minimize edilmesi esasına göre yazılmıştır.

3.Önerilen Tamsayılı Programlama Modeli

Modelin çözüm aradığı karar probleminin Billionnet'nin modelini uyguladığı karar probleminden farkları aşağıdaki gibidir (Diğer varsayımlar aynı olduğu için tekrar verilmeyecektir):

(1) Bütün işçiler günde sekiz saat çalışmaktadır ama haftalık çalışma düzenleri (h=1,2,3) farklıdır. Birinci düzene (h=1) göre çalışanlar haftada beş gün, ikinci düzene (h=2) göre çalışanlar haftada dört gün ve üçüncü düzene (h=3) göre çalışanlar da haftada üç gün çalışmaktadır.

(2) İşçilerin haftalık çalışma süreleri farklı olduğundan maliyetleri (c_{hk}) hiyerarşik olarak ayrıldıkları tiplere göre değiştiği gibi bu süreye göre de değişir. İşçilerin maliyetleri hesaplanırken, birinci çalışma düzenine göre yani haftada beş gün çalışan işçilerin maliyetleri temel alınır. Haftalık çalışma günü sayıları nispetinde, diğer çalışma düzenlerine göre çalışan işçilerin maliyetleri hesaplanır. Birinci çalışma düzenine göre çalışan işçilerin niteliklerine göre değişen maliyetleri c_{11}, c_{12}, c_{13} 'tür. İkinci ve üçüncü çalışma düzenine göre çalışan işçilerin maliyetleri de haftada çalıştıkları gün sayısına göre şöyle hesaplanır: $c_{21}=c_{11}-(c_{11}/5)$, $c_{22}=c_{12}-(c_{12}/5)$, $c_{23}=c_{13}-(c_{13}/5)$, $c_{31}=c_{11}-2(c_{11}/5)$, $c_{32}=c_{12}-2(c_{12}/5)$, $c_{33}=c_{13}-2(c_{13}/5)$

(3) Amaç işçi maliyetleri toplamının minimize edilmesidir.

Billionnet modeline ilave edilmiş olan indisler parametreler ve değişkenler aşağıda verilecektir. Billionnet modelindekilerle aynı olanlar tekrar edilmeyecektir.

İndisler:

h= işçilerin haftalık çalışma düzenleri (h=1.2.3)

Parametreler:

n_h = İşçilerin çalışma düzenlerine göre değişen haftalık izin günleri

$n_1=2, n_2=3, n_3=4$

Karar Değişkenleri:

w_{hk} : h. (h= 1,2,3) haftalık çalışma düzenine göre çalışacak k. (k=1,...,m) tip işçi sayısı

x_{hklj} : h. (h= 1,2,3) haftalık çalışma düzenine göre çalışacak k. (k=1,...,m) tip işçilerden l. ($l \in \{1, \dots, m\}, l \geq k$) tip işi j. (j= 1,...,7) gün yapacakların sayısı

y_{hkj} : h. (h= 1,2,3) haftalık çalışma düzenine göre çalışacak k. (k=1,...,m) tip işçilerden j. (j= 1,...,7) gün izinde olanların sayısı

Önerilen Modelin Genel Gösterimi ise şöyledir:

$$\text{Minimize } Z = \sum_{h=1..H} \sum_{k=1..m} c_{hk} w_{hk}$$

Subject to

$$\sum_{l \geq k} x_{hklj} + y_{hkj} = w_{hk} \quad (h=1,2,3; k=1, \dots, m; j=1, \dots, 7) \quad \text{(I)}$$

$$\sum_j y_{hkj} = n_h w_{hk} \quad (h=1,2,3; k=1, \dots, m) \quad \text{(II)}$$

$$\sum_{h=1, \dots, 3} \sum_{k \leq l} x_{hklj} \geq d_{lj} \quad (l=1, \dots, m; j=1, \dots, 7) \quad \text{(III)}$$

$$x_{hklj}, y_{hkj}, w_{hk} \text{ tamsayı} \quad (h=1,2,3; k=1, \dots, m; l=1, \dots, m; j=1, \dots, 7)$$

Kısıtlar kümesi (I) h. çalışma düzenine göre çalışan k. tip işçilerin j. gün ya l. tip işi yapmak üzere çalışıyor ya da izinli olmalarını, kısıtlar kümesi (II) işçilerin çalışma düzenlerine göre bir haftada iki, üç ya da dört gün izin yapmalarını ve kısıtlar kümesi (III) ise l. tip işin j gün ihtiyaç duyulan kadar yapılmasını garantilemektedir. Kısıtlar kümesi (II) ile haftalık izin günleri sayısına alt sınırın yanında bir de üst sınır getirilmiştir. İşçiler bir haftada en az 2 en çok 3 gün izin yapabilecektir. Billionnet Modeli'nde izin günü sayılarında sadece alt sınır olduğundan, istenmemesine rağmen işçilerin haftada beş gün hatta altı gün izin yapmalarına bir engel yoktur. Amaç fonksiyonu ise toplam işgücü maliyetlerinin minimize edilmesi esasına göre yazılmıştır. Amaç

fonksiyonunda işçilerin ücretleri Billionnet Modeli'nde olduğu gibi sadece tiplerine göre değil ayrıca çalıştıkları gün sayılarına göre de yukarıda anlatıldığı gibi hesaplanarak yer almıştır.

4.Örnek Problem Üzerinde Modellerin Çözümü Ve Çözümlerin Değerlendirilmesi

Önerilen model Billionnet'nin çalışmasında modelini uyguladığı bir örnek probleme uygulanacaktır ve modellerin bu problem için elde edilmiş çözüm sonuçları karşılaştırılacaktır

4.1.Örnek Problem

Billionnet'nin örnek probleminde üç tip işçinin ($m=3$) ve bu işçilerin bir haftada 2, 3 ve 4 gün izin yapabilmelerinin ($n=2,3,4$) söz konusu olduğu yedi günlük hiyerarşik işgücü çizelgeleme senaryosu düşünülmüştür.

İşçilerin hiyerarşik olarak ayrıldıkları tiplerine göre maliyetleri ve günler itibariyle her bir işçi tipinden ihtiyaç duyulan işçi sayıları aşağıdaki gibidir:

$$c_1 = 12, c_2 = 8, c_3 = 6$$

$$d_{11} = 4 \quad d_{12} = 0 \quad d_{13} = 5 \quad d_{14} = 3 \quad d_{15} = 3 \quad d_{16} = 3 \quad d_{17} = 3$$

$$d_{21} = 0 \quad d_{22} = 3 \quad d_{23} = 5 \quad d_{24} = 4 \quad d_{25} = 5 \quad d_{26} = 2 \quad d_{27} = 2$$

$$d_{31} = 5 \quad d_{32} = 0 \quad d_{33} = 4 \quad d_{34} = 2 \quad d_{35} = 0 \quad d_{36} = 0 \quad d_{37} = 1$$

Örnek problem, önerilen modele uygulanırken sadece problemdeki işçi maliyetleri işçilerin haftalık çalışma düzenlerine göre değişecektir. Problemin diğer verileri aynıdır.

İşçi maliyetleri çalışma düzenlerine ve tiplerine göre 3. başlıkta anlatıldığı gibi hesaplanarak aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$c_{11}=12 \quad c_{12}=8 \quad c_{13}=6, \quad c_{21}=9.6 \quad c_{22}= 6.4 \quad c_{23}=4.8, \quad c_{31}= 7.2 \quad c_{32}=4.8 \quad c_{33}=3.6$$

4.2. Modellerin Çözümü Ve Çözümlerin Değerlendirilmesi

Önerilen Model örnek problem için kurulmuş ve LINDO ile çözülmüştür. Billionnet Modeli'nin ve önerilen modelin yukarıda anlatılan örnek problem üzerindeki çözüm sonuçları Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1: Billionnet Modeli'nin ve Önerilen Modelin Çözüm Sonuçları

	Billionnet Modeli	Önerilen Model
Haftada 5 Gün Çalışan 1. Tip İşçi Sayısı	3	0
Haftada 4 Gün Çalışan 1. Tip İşçi Sayısı	2	3
Haftada 3 Gün Çalışan 1. Tip İşçi Sayısı	0	3
Haftada 5 Gün Çalışan 2. Tip İşçi Sayısı	5	0
Haftada 4 Gün Çalışan 2. Tip İşçi Sayısı	0	6
Haftada 3 Gün Çalışan 2. Tip İşçi Sayısı	0	0
Haftada 5 Gün Çalışan 3. Tip İşçi Sayısı	0	0
Haftada 4 Gün Çalışan 3. Tip İşçi Sayısı	0	0
Haftada 3 Gün Çalışan 3. Tip İşçi Sayısı	0	3
Haftada 2 Gün Çalışan 3. Tip İşçi Sayısı	2	0
Haftada 1 Gün Çalışan 3. Tip İşçi Sayısı	2	0
Toplam İşçi Sayısı	14	15
Toplam Maliyet	124	91.2

Örnek problemin Billionnet Modeli ile çözümünde toplam işçi sayısı 14 ($w_1=5$, $w_2=5$, $w_3=4$) çıkmıştır. Bu işçilerin beş tanesi birinci, beş tanesi ikinci ve dört tanesi de üçüncü tip işçilerdendir. Birinci tip beş işçiden ikisi haftada dört gün çalışıp üç gün izin yapmakta, üçü ise beş gün çalışıp iki gün izin yapmaktadır. İkinci tip beş işçinin tamamı ise haftada beş gün çalışmaktadır. Üçüncü tip dört işçiden ikisi haftada iki gün çalışıp beş gün izin yapmakta, diğer ikisi ise bir gün çalışıp altı gün izin yapmaktadır. Billionnet Modeli'nin uygulandığı genel problemin tarifinde sadece beş, dört ve üç günlük haftalık çalışma sürelerinden bahsedilmişti. Buna rağmen örnek problemin çözümünde üçüncü tip işçilerin ikiser ve hatta birer gün çalışıp haftanın diğer günleri izin yaptıkları görülmektedir. Bunun nedeni ise Billionnet Modeli'nin ikinci

kısıtlayıcılar kümesinin \geq biçiminde olmasıdır. İşçilerin haftada en az iki gün izin yapmaları garantilenmiştir ama haftalık izin günü sayısına bir üst sınır getirilmemiştir.

Önerilen modelin örnek probleme uygulanması sonucunda ise toplam işçi sayısı 15 ($w_{11}=0, w_{21}=3, w_{31}=3, w_{12}=0, w_{22}=6, w_{32}=0, w_{13}=0, w_{23}=0, w_{33}=3$) çıkmıştır. Bu işçilerin altısı birinci tip, altısı ikinci tip ve üç tanesi de üçüncü tip işçilerdendir. Birinci tip altı işçiden üçü haftada dört gün, diğer üçü ise haftada üç gün çalışmaktadır. İkinci tip altı işçinin tamamı haftada dört gün çalışıp üç gün izin yapmaktadır. Üçüncü tip üç işçi de haftada üç gün çalışmaktadır. Çözümde de görüldüğü gibi önerilen modelde problemde bahsedilenin aksine haftalık çalışma süresi üç günün altına düşmemiştir. Çünkü model haftalık çalışılacak en fazla gün sayısının beş ve en az gün sayısının da üç olduğu esasına göre kurulmuştur. Ancak önerilen modelin örnek problem üzerinde çözümünde de haftada beş gün çalışan işçi çıkmamıştır. Modelin haftalık çalışma süresinin beş gün olduğu çalışma düzenine atama yapması mümkünken minimum maliyeti elde etmek adına buraya atama yapılmamıştır. Haftada beş gün çalışan işçilerin bulunma zorunluluğu olduğu durumlarda ilgili değişkenler istenen pozitif bir sayıya eşitlenerek bu çalışma düzenine atama yapılması sağlanabilir.

Tablo 1’de görüldüğü gibi toplam işçi sayısı Billionnet Modeli’nde 14’ken önerilen modelde 15’e çıkmıştır. Toplam maliyet ise 124 ‘ten 91.2’ ye düşmüştür. Önerilen modelde toplam işçi sayısı 14’e eşitlendiğinde ise toplam maliyet 92.8 çıkmıştır ($w_{11}=0, w_{21}=5, w_{31}=1, w_{12}=0, w_{22}=6, w_{32}=0, w_{13}=0, w_{23}=1, w_{33}=1$). 14 işçiden altısı birinci tip, altısı ikinci tip ve ikisi de üçüncü tip işçilerdir. Birinci tip işçilerden beşi haftada dört gün, biri üç gün çalışmaktadır. İkinci tip altı işçinin tamamı haftada dört gün çalışıp üç gün izin yapmaktadır. Üçüncü tip iki işçinin de biri haftada dört gün diğeri ise haftada üç gün çalışmaktadır.

5. Sonuç

Bu çalışmada haftalık çalışma süresi 5-gün, 4-gün ya da 3-gün olan bir hiyerarşik işgücü çizelgeleme problemi için tamsayı programlama modeli geliştirilmiştir. Model Billionnet’nin (1999) tamsayı programlama modelini temel almıştır. Her iki modelde de tam zamanlı tek vardiya ve üç tipe ayrılmış hiyerarşik işgücü söz konusudur. İşçiler haftada beş gün, dört gün ve üç gün çalışmaktadır. Billionnet Modeli’nde işçi maliyetleri işçi tiplerine göre

belirlenirken, önerilen modelde işçi maliyetleri hem işçi tiplerine hem de haftalık çalışma sürelerine göre hesaplanmıştır.

Billionnet'nin (1999) çalışmasında modelini uyguladığı bir örnek problem önerilen model ile de çözülmüş ve her iki modelin çözüm sonuçları karşılaştırma yapılarak değerlendirilmiştir.

Sonuç olarak örnek problemin önerilen model ile çözümünde Billionnet Modeli'ne kıyasla daha düşük maliyetli bir sonuç elde edilmiştir.

Kaynakça

- Alfares, H. K. (2000), "Dual-Based Optimization of Cyclic three-day Workweek Scheduling" , *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 17, 137-148.
- Alfares, H. K. (2003), "Flexible 4-Day Workweek Scheduling with Weekend Work Frequency Constraints", *Computer and Industrial Engineering*, 44, 325-338.
- Billionnet, A. (1999), "Integer Programming to Schedule A Hierarchical Workforce with Variable Demands", *European Journal of Operations Research*, 114, 105-114.
- Burns, R. N., R. Narasimhan ve L. D. Smith (1998), "A Set-Processing Algorithm for Scheduling Staff on 4-Day or 3- Day Work Weeks", *Naval Research Logistics*, 45, 839-853.
- Emmons, H ve R. N. Burns (1991), "Off-Day Scheduling with Hierarchical Worker Categories", *Operations Research*, 39, 484-495.
- HUNG, Rudy (1991), "Single Shift Workforce Scheduling Under A Compressed Workweek", *Omega*, 19, 494-497.
- Hung, R. (1994a), "A Multiple-Shift Workforce Scheduling Under the 3-4 Workweek with Different Weekday and Weekend Labor Requirements", *Management Science*, 40, 280-284.
- Hung, R. (1994b), "A Multiple-Shift Workforce Scheduling Model Under the 4-Day Workweek with Weekday and Weekend Labour Demands", *Journal of Operational Research Society*, 45 (9), 1088-1092.
- Narasimhan, R. (1996), "An Algorithm for Single Shift Scheduling of Hierarchical Workforce", *European Journal of Operational Research*, 96, 113-121.
- Narasimhan, R. (2000), "An Algorithm for Multiple Shift Scheduling of Hierarchical Workforce on Four-Day or Three-Day Workweeks", *INFOR*, 38 (1), 14-32.
- Ulusam Seçkiner S., H. Gökçen ve M. KURT (2007), "An Integer Programming Model for Hierarchical Workforce Scheduling Problem", *European Journal of Operational Research* 183, 694-699.