BİNOM BÖLÜNMESİNDEN POİSSON VE NORMAL BÖLÜNMELERE KOLAY BİR GEÇİŞ

Doç. Dr. Kenan URAL

Binom ihtimal bölünmesi diğer bilinen bazı bölünme çeşitlerini içine alan genel bir bölünme olma özelliğini arzeder. Belirli şartların gerçekleşmesi halinde Poisson ve Normal bölünmeler Binom bölünmesinin birer özel hali olarak tarif edilirler. Genellikle Binom'dan Poisson veya Normal bölünmeye geçiş uzun formüllerle yapılmakta, anlaşılması ve takibi oldukça güç olmaktadır. Biz burada her iki geçiş için daha kolay ve kısa bir yolun mevcudiyetine işaret edeceğiz.

1. Poisson bölünmesine geçiş:

Binom bölünmesinde ilgilenilen olayın ihtimali $p < 0{,}05$ ve deney sayısı $n \to \infty$ olursa (X) tesadüfi değişkeninin alacağı $x = 0, 1, 2, \cdots \infty$ değerleri için gerçekleşme ihtimalleri Poisson ihtimal formülüne göre hesap edilir. Bu formülün nasıl elde edileceğini Binom ihtimal formülünden hareket ederek göstermeğe çalışalım.

Yapılacak n deney arasından değişmeyen p ihtimaliyle sadece x deneyin ilgilenilen sonucu verme ihtimali $\varphi(x)$ sembolü ile gösterilsin. Bu ihtimalin :

$$\varphi(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad (1)$$

olduğu bilinmektedir. Eğer şimdi de n deneyden $(x+1)$ deneyin gerçekleşme ihtimalini hesaplarsak :

$$\varphi(x+1) = \binom{n}{x+1} p^{x+1} q^{n-x-1} \qquad (2)$$

buluruz. Her iki ihtimal için aşağıdaki oranı hesap edelim :

$$\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)} = \frac{(n-x)}{(x+1)} \cdot \frac{p}{q} \qquad (3)$$

ve

$$\varphi(x+1) = \frac{(n-x)\,p}{(x+1)\,q}\,\varphi(x) \tag{4}$$

formülleri elde ederiz.

Son formül (X) tesadüfi değişkeninin alacağı x değerinden bir sonraki (x+1) değerine geçişte ilgili $\varphi(x+1)$ ihtimalinin $\varphi(x)$ ihtimali cinsinden hesap edilmesini mümkün kılar. Bu geçiş formülü çalışmalarımızda esas olacaktır. Ayrıca $np=\lambda$ nin $n \to \infty$ için belli bir değere varacak bir parametre olduğunu da belirtelim.

Geçiş formülünün $p \to 0$, yâni $q \to 1$ için limitini hesaplamadan önce aşağıdaki gibi yazılışını temin edelim:

$$\varphi(x+1) = \frac{np}{(x+1)\,q}\,\varphi(x) - \frac{xp}{(x+1)\,q}\cdot\varphi(x) \tag{5}$$

Ve limitte, $np \to \lambda$ ile:

$$\lim_{p \to 0} \varphi(x+1) = \frac{\lambda}{x+1}\cdot\varphi(x) \tag{6}$$

olur.

Bu formül yardımıyle (X) tesadüfi değişkeninin alacağı $x=1, 2, \cdots$ değerlere tekâbül eden ihtimaller bir evvelki tesadüfi değişkenler $x=0, 1, 2, \cdots$ e tekâbül eden ihtimaller yardımiyle ifade edilebilirler, yâni:

$x=1$ e tekâbül eden ihtimâl: $\varphi(1) = \dfrac{\lambda}{1}\,\varphi(0)$

$x=2$ » » » $\lambda(2) = \dfrac{\lambda}{2}\,\varphi(1) = \dfrac{\lambda^2}{2.1}\cdot\varphi(0)$

$x=3$ » » » $\lambda(3) = \dfrac{\lambda}{3}\,\varphi(2) = \dfrac{\lambda^3}{3.2.1}\cdot\varphi(0)$

ve buradan genel olarak:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{x}\cdot\varphi(x-1) = \frac{\lambda^x}{x(x-1)(x-2)\cdots 1}\cdot\varphi(0)$$

$$\varphi(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\cdot\varphi(0) \tag{7}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan bu ihtimal bölünmesi için $\sum_{x=0}^{\infty} \varphi(x) = 1$ şartı mevcut olacağından:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \varphi(x) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(x) \cdots$$

veya $\varphi(x)$ lerin yukarıda ifade edilen değerlerini göz önünde tutarak:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \varphi(x) = \varphi(0) \left[1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^x}{x!} + \cdots\right] = 1 \qquad (8)$$

ıfadesine varılır.

Ayrıca son bağıntıda [ ] içinde bulunan ifadenin e^{λ} nin seri halinde açılımı olduğu bilindiğine göre:

$$\sum_{x=0}^{\infty} \varphi(x) = \varphi(0) \cdot e^{\lambda} = 1$$

olacaktır. Böylece $x = 0$ değeri için bilinmeyen ihtimal:

$$\varphi(0) = \frac{1}{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \qquad (9)$$

olarak hesaplanır. Nihayet $\varphi(0)$ değeri de formül (7) de yerine konulursa:

$$\varphi(x) \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \qquad (10)$$

aranılan Poisson ihtimal formülü elde edilmiş olur.

2. Normal bölünmeye geçiş:

Eğer binom bölünmesinde bilinen ihtimal, 0 veya 1 e yakın olmazsa, yâni $p \not\to 0$ veya $q \not\to 1$ şartına uyar ve müşahede sayısı çok fâzla, yâni $n \to \infty$ olursa (X) tesadüfi değişkeni, dolayısiyle tekabül eden ihtimaller normal bölünme kanununa uyar.

Eğer (X) tesadüfi değişkenini karteziyen koordinatlar sisteminde eksen ve birim değişikliği amaciyle yeni bir t değişkeni haline

$$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \qquad (11)$$

dönüşümü yardımiyle getirirsek çok büyük değerler yerine küçük değerler elde edebiliriz.

Binom bölünmesinden hareket edeceğimize göre önce sözü edilen t değişkeninin x in fonksiyonu olarak hangi değere tekâbül edeceğini görelim. Binom bölünmesinde ortalamanın $\bar{x} = np$ ve standart inhirafın $\sigma = \sqrt{npq}$ olduğu bilindiğinden yeni t tesadüfî değişkeni aşağıdaki gibi yazılabilecektir:

$$t = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} \tag{12}$$

Ayrıca binom ihtimal bölünmesi için daha önce gördüğümüz geçiş ifadesi formül (4) ü tekrar hatırlatalım:

$$\varphi(x+1) = \frac{n-x}{(x+1)} \frac{p}{q} \varphi(x) \quad \text{ve} \quad \sum_{x=0}^{n} \varphi(x) = 1 .$$

Şimdi de x değişkeninden t değişkenine geçerken meydana gelecek değişikliği inceliyelim. x in 1 arttırılması halinde, yâni x den (x+1)e geçildiğinde, t standart değişkeninde meydana gelecek artış Δt olur:

$$t + \Delta t = \frac{(x+1) - np}{\sqrt{npq}} \tag{13}$$

Δt yı formül (13) ve (12) arasındaki farkı almak suretiyle hesaplayalım:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{npq}} \tag{14}$$

$y = \varphi(t)$ kabul ederek t de yapılacak Δt artışına karşılık y de meydana gelecek artışın Δy olacağına işaret edelim, yâni:

$$\varphi(t + \Delta t) = y + \Delta y \tag{15}$$

olacaktır. Diğer taraftan x ve t değişkenlerinin belli değerlerine göre hesap edilecek alanların birbirine eşit olması gerekir. x in 1 artması halinde meydana gelecek 1 tabanlı dikdörtgenin alanı, yeni t değişkeninde tekabül edecek Δt tabanlı dikdörtgenin alanına eşit olacaktır.

$$1 . \varphi(x) = y . \Delta t . \tag{16}$$

Bu ifadeden, önce :

$$y = \frac{\varphi(x)}{\Delta t} = \varphi(x) \cdot \sqrt{npq} \qquad (17)$$

ve sonra x den (x+1) e geçildiği düşünülürse :

$$y + \Delta y = \varphi(x + 1) \sqrt{npq} \qquad (18)$$

yazılabilir. Formül (18) ve formül (17) arasında aşağıdaki oran hesaplanırsa :

$$\frac{y + \Delta y}{y} = \frac{\varphi(x + 1)}{\varphi(x)} = \frac{n - x}{(x +)} \cdot \frac{p}{q}, \qquad (19)$$

ve

$$1 + \frac{\Delta y}{y} = \frac{np - xp}{xq + q}, \qquad (20)$$

artış oranını yalnız bırakarak :

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{np - xp - xq - q}{xq + q} \qquad (21)$$

buluruz. Gerekli sadeleştirmeden sonra :

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{np - x - q}{xq + q} \qquad (22)$$

ve x in yerine formül (12) ye göre hesap edilecek değeri

$$x = np + t \sqrt{npq}$$

konulursa :

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{-t\sqrt{npq} - q}{(np+t\sqrt{npq})q+q} \qquad (23)$$

bulunur. $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ oranını temin edecek değişikliği yapalım :

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = y \cdot \frac{-tnpq - q\sqrt{npq}}{npq+tq\sqrt{npq}+q} \qquad (24)$$

Bu oranı, limiti alınmak üzere aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta t} \right| = -y \cdot \left| \frac{t + \frac{q}{\sqrt{npq}}}{1 + \frac{tq}{\sqrt{npq}} + \frac{1}{np}} \right| \tag{25}$$

Müşahede sayısının $n \to \infty$ olması halinde son ifadenin limiti olarak:

$$\frac{dy}{dt} = -y \cdot t \tag{26}$$

elde edilir, yâni:

$$\frac{dy}{y} = -t\ dt \tag{27}$$

sonucuna varılır. Her iki tarafın integrali alınırsa:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int t dt\ , \tag{28}$$

$$\text{Log } y = -\frac{t^2}{2} + \text{Log } c \tag{29}$$

ve

$$y = c \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{30}$$

bulunur. t sürekli değişken durumunda olup alacağı değerler $-\infty$ ve $+\infty$ arasında değişir. O halde:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\ dy = 1 \tag{31}$$

yazılabilir. c sabit değeri de aşağıdaki integralin:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \sqrt{2\pi} \tag{32}$$

olması sebebiyle $c = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ dir. Böylece t standart değişkenin fonksiyonu $\varphi(t)$ şöyle olacaktır:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{33}$$

Görüleceği üzere bu son formül, daha önce normal bölünme için belirtilen bütün şartlar gerçekleşmiş bulunduğundan, normal bölünme adiyle bilinen bölünmenin ihtimal kesafeti fonksiyonu $\varphi(t)$ yi vermiş olur.