KUYRUK TEORİSİ (=BEKLEME HATTI TEORİSİ)
(Stokastik Kuyruk Modellerinin Analitik Yoldan İncelenmesi)

Dr. Mustafa KÖKSAL
İ.Ü. İşletme Fakültesi
Üretim Yönetimi Kürsüsü

Bu makalede, kuyruk sistemlerinin genel bir tanımı verilmiş özellikleri anlatılmış ve sistem karakteristiklerini simgeleyen, kuyruk modellerinin sınıflamasında kullanılan Kendall notasyonu açıklanmıştır. Stokastik kuyruk modellerinin genel formülasyonu çıkarıldıktan sonra, özellikle M/M/1 ve M/M/c modelleri incelenmiş ve bir örnek problem üzerinde tartışılmıştır.

Queuing Theory

In this article, the Queuing Systems are deseribed in a general way and they are classified with respect to Kendall Notation which symbolizes system characteristics. Also the features of Queuing Process are summarized. After having derived general formulas for the stochastic models, especially M/M/1 and M/M/c types of Poisson Queuing models are reviewed and are discussed by means of a sample problem.

1.1. Kuyruk Sistemlerinin Tanıtılması

Ekonomik kaynakların kıtlığı ve nüfus artışının doğal bir sonucu olarak günlük yaşantıda servis sistemlerinin yetersizliği ve bekleme sorunu ile sık sık karşılaşılmaktadır. Geniş bir açıdan bakıldığında; trafikteki tıkanıktan, berber salonundaki sıra beklemeye kadar, hayatımızın beklemelerle dolu geçtiğini görürüz. Bu makalede sık sık tekrarlanacak olan bekleme hattı veya kuyruk terimi, aslında ister mamul isterse hizmet üretsin, üretici sistemlerde veya tüm ekonomik birimlerde «bir servis veya işlem için bekleyen insan, makina ve malzemeden oluşan topluluk» karşılığı olarak kullanılacaktır. Kuyruk teorisi (Kuyruk modelleri) ise bu sistemlerin analizi ve dizaynı için gerçekleştirilen analitik yaklaşımların tümünü içeren çalışmalardır.

İlk kez Danimarkalı elektrik mühendisi A. K. Erlang tarafından 1909 yılında telefon konuşmalarının oluşturduğu kuyruk olayı üzerinde başlatılan çalışmalar, zamanla yığılma (kuyruk-bekleme hattı) olaylarını anlama ve daha iyi kontrol etme yöntemlerini geliştirmiştir. Ancak uygulama 1950 lere kadar telefon akışlarının ötesine geçememiştir. 1950 lerle birlikte teorik çalışmalar iş yerlerinde, stoklamada, bankalarda, hastanelerde ve benzeri yerlerde her türlü fiziksel akışların oluşturduğu bekleme olaylarına hızla uygulanmaya başlanmıştır. (1)

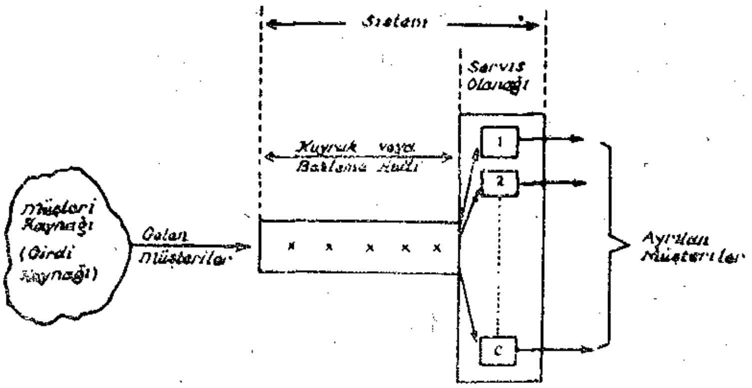
Bir kuyruk sisteminin temel elemanları (Şekil: 1) de görülmektedir. Bir kuyruk sistemi, kuyruk (bekleme hattı) ve servis kanalları olmak üzere iki temel elemandan oluşur. Herhangibir t anında sistemdeki eleman sayısı kuyruk ve serviste bulunan elemanların toplamına eşittir (2).

Kuyruk sisteminin yönetimi veya kuyruk teorisinin amacı, müşteri bekleme zamanı ile servis boş zamanı arasında bir denge (= trade-off) bulmaya yöneliktir.

Bir kuyruk sistemi altı ana karakteristik ile belirlenir (2).

1. Giriş veya geliş (gelişlerarası süre) dağılımı,
2. Çıkış veya ayrılış (servis süresi) dağılımı,
3. Servis kanalları (olanakları),
4. Servis disiplini,
5. Sistemde bulunmasına izin verilen maksimum müşteri sayısı ve,
6. Müşteri kaynağı (Girdi kaynağı).

Kuyruk sistemlerini ekonomik yönden analiz etmek, bir başka deyişle optimize etmek için yukarıdaki bilgilerin yamsıra a) Bekleme maliyeti ve b) Servis olanağı (Sağlama) maliyeti bilgilerine de ihtiyaç vardır (3).



(Şekil : 1) — C Sayıda Paralel Servis İstasyonunu İçeren Bir Kuyruk Sistemi.

Bir kuyruk sisteminde yukarıda sayılan altı karakteristiğin hepsi biliniyorsa analitik yaklaşım yapılabilir. Herbir karakteristik farklı tip ve özellik taşıdığına göre kuyruk modellerinin pek çok varyasyonları olduğu söylenebilir.

1.2. Kuyruk Prosesinin Özellikleri

Kuyruk sistemlerinin özellikleri beş önemli kategoride incelenebilir. Bunlar : Geliş prosesi, kuyruk konfigurasyonu, kuyruk disiplini, servis disiplini ve servis olanağıdır [4].

1.2.1. Geliş Prosesi

Geliş prosesi kuyruk sistemine birimlerin (müşterilerin) gelişlerini karakterize eder. Geliş koşulları sekiz değişik biçimde ortaya çıkar.

a) Müşteri kaynağı bir veya birden fazla olabilir. Örneğin, ameliyathaneler, bir kuyruk sistemi olarak ele alındığında; ameliyat tiplerine göre, (beyin, göz ve göğüs cerrahisi v.b.g.) hastaların geliş kaynakları birkaç tane olabilir.

b) Müşteri kaynağı sonlu veya sonsuz olabilir. Bir barajı besleyen suların sonsuz kaynaktan geldiği buna karşın, bir atölyedeki işleyen makinaların sonlu kaynak olduğu varsayılır. Birçok uygulamada ana kütle sonsuz olmasa bile kâfi derecede büyükse, yaklaşık çözümlere olanak tanıdığı için sonsuz kabul edilir.

c) Sisteme tek tek veya grup halinde (toplu) gelişler olabilir. Bir lokantada, önceden rezervasyon yaptıran ailelerin yemek yemesi gibi.

d) Gelişler, kuyruk sistemi tarafından, tamamen veya kısmen kontrol edilebilecekleri gibi, hiç kontrol edilmeyebilirler. Otomatik montaj hatlarında, monte edilecek bir komponentin gelişi tamamen kontrol altında iken, hava alanlarına uçakların inişi kısmen kontrol edilebilmektedir. Otoyollara giren vasıtaların ise genellikle kontrolu yoktur.

e) Bir önceki maddenin sonucu olarak; birimlerin sisteme gelişi «deterministik» veya «stokastik» karakterdedir. Tam kontrol söz konusu ise geliş prosesinin de terministik (belirli) olduğu söylenir. Şayet gelişlerarası süre tesadüfi bir değişken ise, birimlerin gelişleri, birçok kuyruk vak'asında gözlenebileceği üzere stokastik (probabilistik) özellik taşır.

f) Bir probabilistik geliş prosesi ampirik veya teorik olasılık dağılımı ile tanımlanabilir. Poisson modeli, örneğin, çok yaygın kullanılan teorik dağılımlardan biridir.

g) Geliş prosesi «bağımlı» veya «bağımsız» karakterde olabilir. Sistemin durumu veya önceki gelişlerin sırası, sonradan gelenleri etkilemiyor ise bağımsız, aksi takdirde bağımlı gelişler söz konusudur.

h) Geliş prosesi «sabit» nitelikte olabilir veya olmayabilir. Şayet proses sabitse, parametreler, yani; ortalama geliş oranı, standart sapması ve olasılık dağılımının tipi zaman içinde sabit demektir. Matematiksel yaklaşımın yapılabilmesi için çoğu kez geliş prosesi sabit farzedilir.

1.2.2. *Kuyruk Konfigurasyonu*

Kuyruk konfigurasyonu denilince, sistemdeki kuyruk sayısı, kuyruklarla servis olanaklarının (istasyonlarının) ilişkisi ve konumu anlaşılır [4]. Tek kuyruk bir servis istasyonunu besleyebileceği gibi, birden fazla istasyonu da besleyebilir. Birden fazla kuyruk genellikle eşit sayıda servis istasyonunu besler. Buna rağmen Boğaz Köprüsünde olduğu gibi birkaç hat üzerinde seyreden araçlar, çıkışta, daha az veya fazla sayıda açık gişe önünde kuyruğa girerler.

Kuyruklar; a) Fiziksel olarak bir yerde, b) Birkaç değişik yerde, c) Kavramsal olarak bir liste üzerinde (Otel veya Uçak rezervasyonlarında olduğu gibi) olabilirler.

İncelenen sistemin yapısına bağlı olarak, sistemde bulunabilecek müşteri sayısı sonlu veya sonsuz olabilir. Bazı yerlerde, sistemde sadece sonlu sayıda müşteri bekleyebilir. Bu durumda yeni gelen müşteriler, kuyruktaki bekleyenlerin sayısı müsaade edilen maksimum miktardan az olmadıkça sisteme kabul edilmezler. Örneğin bazı hastanelerde poliklinik yapan doktorlar kaç hastaya bakabileceklerini önceden belirlerler. Bu sayıyı aşan hastalar acil değilse sıraya sokulmaz. Aynı durum askere almada ve üniversiteye öğrenci kabulünde de söz konusudur. Bu halin, kuyruk uzunluğunu çok uzun bularak katılmayı reddeden müşteriler durumundan ayırdedilmesi gerekir.

1.2.3. *Kuyruk Disiplini*

Kuyruk disiplini; gelen müşterilerin, gerek bir kuyruğu seçme veya seçmeme, gerekse bekleyişte gösterdikleri davranışı kapsar.[5] Bu konuda aşağıdaki noktalara dikkat edilmelidir.

a) Sistemin kapasitesi dolu ise, gelen birim kabul edilmez. Örneğin; çevrilen telefon numarasına bağlı tüm hatların meşgul çalması veya oto park yerinde hiç boş alan kalmaması v.b.g.

b) Gelen müşteri, kuyrukta beklemenin uzun zaman alacağını kestirirse, kuyruğa girmeden sistemi terkedebilir.

c) Bazı müşteriler ise kuyrukta bir süre bekledikten sonra sistemden ayrılır.

Kuyrukta sırası gelene kadar bekleyip servis gören müşterilere «sabırlı müşteriler» denir.

1.2.4. *Servis Disiplini*

Servis istasyonunun, servis için müşteri seçiminde koyduğu ve uyguladığı politikalara servis disiplini denir. Servis disiplininin seçimi maliyetleri etkileyen bir karar sürecidir. Dört tip servis disiplininden söz edilebilir [2]

a) «İlk Gelen İlk Çıkar» (First in First out-FIFO) en çok bilinen kuraldır. Servise, müşterilerin geliş sıralarına göre başlanacağını gösterir.

b) «Son Gelen İlk Çıkar» (Last in First Out= LIFO).

c) «Rastgele Seçim» (=SIRO)

d) «Öncelikli Seçim.» Bu durumda sisteme katılan bazı müşteriler bekletilmeden servise alınır. Örneğin, hastane polikliniklerine gelen acil vak'alar öncelik kuralına göre derhal servise alınır.

1.2.5. *Servis Olanağı*

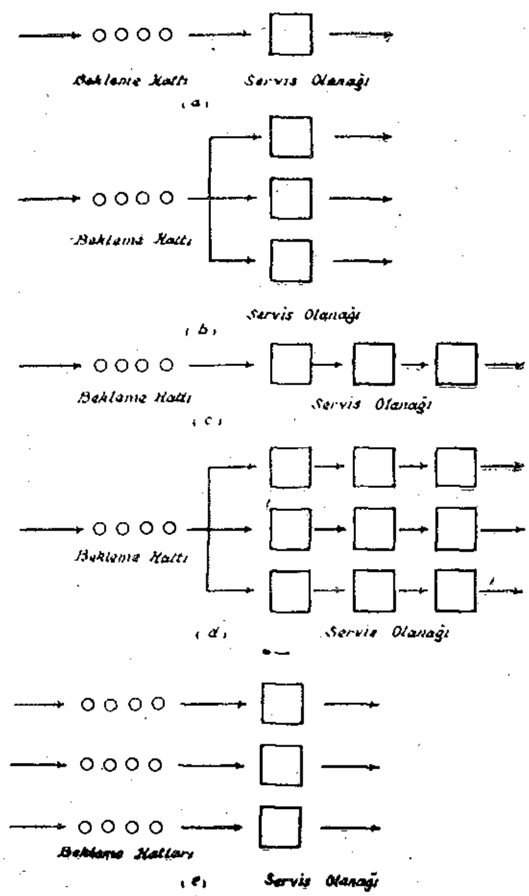
Servis olanağı ile ilgili dizayn ve işleyiş karakteristikleri bu kategoride incelenecektir. Şöyle ki :

a) Servis olanağı sıfır, bir veya daha fazla servis istasyonuna sahip olabilir. Örneğin, süpermarketlerin içinde, müşterilerin alışverişinde hiç servis yapıcı kullanılmaz (self-service). Fakat çıkışta alınanların bedelini ödemek için birden fazla kasiyer mevcuttur.

b) Servis kanalları paralel, seri veya her ikisinin karışımı şeklinde düzenlenmiş olabilir. Bunların en basiti (şekil : 2a) da görülen tek kuyruk - tek kanal - tek aşamalı (fazlı) modeldir. Şayet servis istasyonları birden fazla olursa ve paralel olarak düzenlenirse (Şekil: 2b) de görülen çok kanalh-tek aşamalı kuyruk modeli elde edilir. (Şekil : 2c) de seri halde birbiri ardısıra düzenlenmiş tek kanal-çok aşamalı, (2d) de tek kuyruk-çok kanal-çok aşamalı ve nihayet (2e) de çok kuyruk-çok kanal-tek aşamalı kuyruk modeli görülmektedir [6].

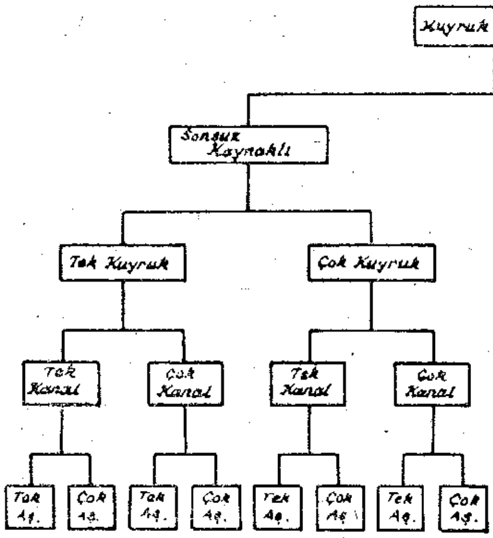
e) Geliş prosesinde olduğu gibi servis süreleri de deterministik veya probabilistik olabilir. Çoğu servis süresi dağılımları tanımlanabilen ampirik veya teorik olasılık dağılımlarına göre, tesadüfi değişkenlerle temsil edilirler. Servis sürelerini belirlemek için en yaygın kullanılan yoğunluk fonksiyonu üssel (eksponensiyel) niteliktedir. Geliş prosesinde olduğu gibi buradada «sabitlik» koşulu geçerlidir.

Buraya kadar özetlenen kuyruk prosesi özelliklerinden kuyruk sistemlerinin pek çok değişik karakterli matematik modellerle analiz edilebileceği



(Şekil : 2) — Servis Olanaklarının Temel Yapıların (a) Tek Kuyruk-Tek Kanal-Tek Aşama, (b) Tek Kuyruk-Çok Kanal-Tek Aşama, (c) Tek Kuyruk-Tek Kanal-Çok Aşama (d) Tek Kuyruk-Çok Kanal-Çok Aşama, (e) Çok Kuyruk-Çok Kanal-Tek Aşama.

anlaşılmaktadır. Bunları, yukarıda verilen sadece, sisteme geliş ve sistemden ayrılış (birinci ve ikinci karakteristik) şekillerine göre deterministik ve stokastik kuyruk modelleri olmak üzere iki sınıfa ayırmak mümkündür. Birçok kritere ve karakteristiğe göre sınıflandırılabilecek kuyruk modellerini standart bir yapıya kavuşturmak için bir notasyon (Kendall Notasyonu) geliştirilmiştir. Kuyruk modellerinin girdi kaynağı, kuyruk, kanal ve aşama kriterlerine göre genel bir sınıflaması (Şekil : 4) de verilmiştir. [3] Şeklin solundaki sınıflamanın aynısı, sağ taraftaki sonlu kaynaklı modeller içinde geçerlidir.



(Şekil : 3) — Kuyruk Modellerinin Genel Sınıflaması

1.3. Kuyruk Modellerinin Sınıflandırılması

D. Kendall (1953) verilen karakteristiklerden ilk üçünü kullanarak bir notasyon geliştirmiştir. Bunlar, geliş, ayrılış dağılımları ve paralel servis kanalları sayısıdır. Daha sonraları A.M. Lee (1966) bu notasyona dördüncü ve beşinci karakteristikleri yani servis disiplinini ve sistemde bulunabilecek maksimum müşteri miktarlarını eklemiştir. H.A. Taha ise Kendall-Lee notasyonunu müşteri kaynağını tanımlayan altıncı karakteristikle genişletmiştir.

Böylece komple notasyon ;

(a/b/c) : (d/e/f) şeklindedir. [2]

Bu notasyonda;

«a» geliş veya gelişlerarası dağılımını,

«b» ayrılış veya servis süresi dağılımını,

«c» sistemde mevcut paralel servis kanalı sayısını,

«d» Servis disiplinini,

«e» sistemde bulunabilecek maksimum müşteri sayısını,

«f» müşteri kaynağını göstermektedir.

a, b ve d yerine çoğunlukla aşağıdaki alışılagelmiş harfler kullanılmaktadır.

a ve b sembolleri yerine;

M = Poisson geliş ve ayrılış debisi dağılımları (veya eşdeğer olan eksponensiyel gelişlerarası ve servis süresi dağılımı)

D = Deterministik gelişlerarası veya servis süresi dağılımı,

E_k = Erlang ve Gamma gelişlerarası veya servis süresi dağılımı,

GI = Genel bağımsız gelişler (ampirik)

G = Genel ayrılışlar veya servis süresi dağılımı (ampirik)

d sembolü yerine ;

FIFO = İlk Gelen İlk Çıkar,

LIFO = Son Gelen İlk Çıkar,

SIRO = Rastgele Servis

GD = Genel Servis Disiplini.

c sembolü paralel servis yapıcıların sayısını gösteren herhangi bir pozitif tam sayı ile yer değiştirebilir. e ve f sembolleri sırası ile sistemde vc müşteri kaynağındaki sonlu veya sonsuz müşteri sayısını göstermektedir.

Örneğin; (M/M/2) : (LIFO/N/∞) notasyonu, Poisson geliş (eksponensiyel gelişlerarası), Poisson ayrılış (eksponensiyel servis süresi) dağılımları olan iki servis istasyonlu, «Son Gelen İlk Çıkar» servis disiplinli, sistemde en çok N müşterinin bulunabileceği ve müşteri kaynağının sonsuz olduğu bir kuyruk modeline aittir. Dikkat edilirse bu gösteriliş şekli daha karmaşık yapıdaki kuyruk problemleri için uygun değildir. Karmaşık yapıdaki kuyruk sistemlerinin analizinde simulasyon yöntemi kullanılabilir.

1.4. Kuyruk Sistemlerinde Geçiş Devresi ve Kararlı Durum

Kuyruk teorisi analizi, bir sistemin davranışının zaman aşımı içinde etüdünü içerir. İşleyen bir sistemin karakteristikleri zamana bağlı ise, sistem «geçici durumdadır» veya «geçiş devresindedir» denir. Bu durum çoğunlukla sistemin işlemeye başladığı ilk anlarda söz konusudur. Bununla beraber, çoğu kez sistemin uzun vadedeki davranışları ile ilgilenildiğinden kuyruk sistemlerinin analizinde dikkatin çoğu «kararlı durum» sonuçları üzerinde yoğunlaştırılmıştır. Şayet sistemin davranışı zamandan bağımsız ise, kararlı durum koşulu var demektir.

Kararlı duruma ulaşabilmek için gerek koşul, sistemin işlemeğe başladığı andan itibaren geçen zamanın yeterince büyük olmasıdır. (Matematiksel deyişle geçen zamanın sonsuza yaklaşmış olması gerekir). Bununla beraber bu koşul yeter değildir. Zira sistemin parametreleri, sistemin kararlı duruma gelmesine engel olabilir. Bu demektir ki kararlı durum için sistem parametreleri de kontrol edilmelidir. Örneğin bazı durumlarda sisteme varış, sistem hızından büyük olabilir. Böyle durumlarda ne kadar zaman geçerse geçsin, sistem kararlı duruma ulaşamıyacaktır. Gerçekten böyle bir durumda kuyruk uzunluğu zamanla artacak ve teorik olarak sonsuza kadar yaklaşabilecektir. [7]

1.5. Stokastik Kuyruk Modelleri Genel Formülasyonu

Kuyruk modellerinde genellikle aşağıdaki semboller kullanılmaktadır. Bu arada bir kuyruk sisteminin hem kuyruğu hem de sistem kanallarını içerdiği bir kez daha hatırlanmalıdır.

Kuyruk sistemlerine ait notasyon ;

N	:	Sistemde müsaade edilen maksimum eleman sayısı
n	:	Sistemdeki eleman sayısı
$P_n(t)$	:	Sistemin $t = 0$ da başladığını varsayarak herhangi bir t anında sistemde tam n eleman bulunması geçiş devresi olasılığı
P_n	:	Sistemde n eleman bulunması kararlı durum olasılığı

λ	:	Ortalama geliş oranı (Birim zamanda gelen müşteri sayısı)
μ	:	Ortalama ayrılış oranı (Birim zamanda servis yapılan müşteri sayısı)
c	:	Paralel servis istasyonu sayısı
$\rho = \lambda/\mu$	:	Trafik yoğunluğu
ρ/c	:	c servis istasyonu için kullanma oranı
$w(\tau)$	:	Sistemde bekleme süresinin olasılık yoğunluk fonksiyonu.
W_s	:	Sistemde müşteri başına ortalama bekleme süresi
W_q	:	Müşteri başına kuyrukta ortalama bekleme süresi
W_b	:	Kararlı durumda, meşgul sistem için ortalama kuyrukta bekleme süresi
L_s	:	Sistemde beklenen müşteri sayısı
L_q	:	Kuyrukta beklenen müşteri sayısı
L_b	:	Kararlı durumda, meşgul sistem halinde kuyrukta bekleyenlerin ortalaması

Genel geliş, ayrılış dağılımları ve servis disiplini için;

$$L_s = \lambda W_s \quad \text{ve}$$

$$L_q = \lambda W_q$$

bağıntılarının geçerli olduğu ispatlanmıştır. [8] Bu formüller W_s, W_q, L_s ve L_q arasındaki bağıntıları bulmada hareket noktasıdır. Tanımdan dolayı ;

$$W_q = W_s - 1/\mu$$

eşitliğinin her iki yanını λ ile çarparsak

$$\lambda W_q = \lambda W_s - \frac{\lambda}{\mu}$$

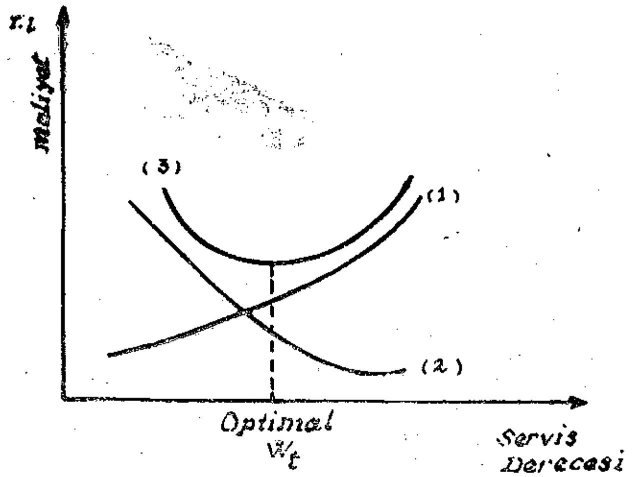
$$L_q = L_s - \rho$$

bulunur. O halde bu dört beklenen değerden herhangi biri ve λ biliniyorsa diğer üçü bulunabilir.

Geliş oranının λ olduğu fakat bütün gelişlerin sisteme katılamadığı özel hallerde (örneğin maksimum kuyruk uzunluğuna erişildiği ve hiçbir yeni gelişin sisteme katılamadığı hallerde) yukarıdaki bağıntılar geçerli değildir. Bölüm 1.7.1 ve 1.8.1 ile Bölüm 1.7.2 ve 1.8.2 deki formüllere bakıldığında konu daha iyi anlaşılacaktır.

1.6. Kuyruk Sistemlerinde Optimizasyon

Bekleme hattı sisteminde bekleme zamanının artması halinde kaybedilen değerlerin maliyeti de artmakta fakat buna karşılık, servis mekanizmasının maliyeti (servis maliyetleri) azalmaktadır. Bu durum bir grafikle (Şekil 6) da görülmektedir.



(Şekil : 4) — Kuyruk Sistemlerinde Maliyetlerin Değerlenmesi

(Şekil : 4) görülen eğrilerden (1) numaralı eğri, servis mekanizmasının toplam maliyet eğrisidir. (2) numaralı eğri, kaybedilen değerlerin (mal-hizmet) toplam maliyetini göstermektedir. (3) numaralı eğri ise, (1) ve (2) numaralı eğrilerin toplamını gösteren toplam maliyet eğrisidir. Grafikten görüleceği gibi, toplam maliyet eğrisinin en düşük noktası olan (W_t) de toplam maliyet minimum olmaktadır. [9] Bir bekleme hattı sisteminde, geliş zamanları ve olanakların her ikisi de kontrol edilebiliyorsa, toplam maliyetin asgari kılınması için hem girişin programlanması, hem de lüzumlu teçhizatın tahsisi mümkün olabilir. Aksi takdirde yani gelişlerin kontrolu mümkün değilse eldeki olanakların, talebin karakterine göre programlanması gerekir. Şayet yukarıda sözü edilen maliyetlerin saptanması çok külfetli ise başka parametrelerin kullanılması gerekebilir. Bunlardan biri «Arzu Edilen Seviye Modeli» (= Aspiration - Level Method) diye bilinen servis boş zamanı ve müşteri bekleme zamanı için kısıtlamalar getirerek yapılan bir optimizasyon faaliyetidir. (2)

İlerdeki bölümlerde, M/M/1 ve M/M/c modellerinde optimum μ ve optimum c değerlerinin elde edilişi açıklanmaktadır.

1.7. Seçilen (M/M/1) Kuyruk Modellerinin Formülasyonu

Her kuyruk modeli, başlangıçta belirtilen karakteristikleri için belirli varsayımların yapılmasını gerektirir. Standart diye adlandırılan iyi bir başlangıç noktası sayılabilecek (M/M/1) : (FIFO/∞/∞) kuyruk modeli, bölüm 1.3 de verilen bilgilere göre açıklanacak olursa; 1) Gelişler birbirinden bağımsız ve kuyruk sistemi tarafından kontrol edilmeksizin, Poisson olasılık dağılımına uygun gerçekleşmektedir. 2) Servis süresi üssel olasılık yoğunluk fonksiyonuna göre ve sadece bir servis istasyonunda gerçekleştirilmektedir. 3) Kuyruk disiplini; hiçbir müşterinin geri çevrilmediği, sabırlı diye nitelendirilen yani kuyrukta sırası gelinceye kadar bekleyen müşterilerden oluşmaktadır. 4) Servis disiplini ilk giren ilk çıkar kuralına göıe işlemektedir. 5) Kuyruk uzunluğu üzerinde sınırlama olmaksızın ve müşteriler sonsuz varsayılan bir kaynaktan gelmektedir. (4)

1.7.1. *Standart M/M/1 Modeli* (*)

Daha öncede belirtildiği gibi Kuyruk Teorisi çalışmalarında kararlı durumla ilgili olanları ağırlık kazanmıştır.

Standart M/M/1 Modeli için işleyiş karakteristiklerine ilişkin formüller aşağıda verilmiştir. Bundan sonraki tüm modellerde formüller bu sıra ile verilecektir.

İşleyiş Karakteristikleri	*Formül*	
Sistem; sıfır ünite bulunması olasılığı :	$P_o = 1 - \rho$	(171.1)
Meşgul periyot veya meşgul sistem olasılığı (bir ünitenin bekletilmesi olasılığı) :	$P(n > o) = \rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$	(171.2)
Sistemde n ünitenin bulunması olasılığı :	$P_n = P_o \rho^n$	(171.3)
Sistemde beklenen ünite (müşteri) sayısı:	$L_s = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$	(171.4)

(*) Formüller $\rho < 1$ için geçerlidir.

Sistemde bulunanların varyansı : $V_{1s} = \dfrac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)^2}$ (171.5)

Kuyrukta beklenen ünite (müşteri) sayısı: $L_q = \dfrac{\rho\lambda}{\mu - \lambda}$ (171.6)

Meşgul sistem için kuyrukta beklenen müşteri sayısı : $L_b = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$ (171.7)

Sistemde kişi başına geçen ortalama süre : $W_s = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$ (171.8)

Sistemde geçen süre varyansı : $V_{ws} = \dfrac{1}{(\mu-\lambda)^2}$ (171.9)

Kuyrukta müşteri başına ortalama bekleme süresi : $W_q = \dfrac{\rho}{\mu-\lambda}$ (171.10)

Meşgul sistem için kuyrukta beklenen ortalama zaman : $W_b = \dfrac{1}{\mu-\lambda}$ (171.11)

1.7.2. *Sonlu Kuyruk Olması Halinde M/M/1 Modeli* (*)

Sistemde müsaade edilen maksimum müşteri sayısı N ile gösterildiğine göre, (N-1) kuyrukta bulunan maksimum müşteri sayısını verecektir. Böylece sistemde N birim bulunduğu bir anda gelen müşteri geri çevrilecektir. Sistemde N birim bulunması olasılığı P_N ile gösterilirse λP_N, birim zamanda geri çevrilen (veya sisteme kabul edilmeyen) ortalama müşteri sayısını verecektir. Aşağıdaki formüller LIFO ve SIRO servis disiplinleri içinde geçerlidir. Bu modelde $\rho = 1$ ve daha büyük olabilir.

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} & \lambda \neq \mu \quad \text{için} \\[2ex] \dfrac{1}{N+1} & \lambda = \mu \quad \text{için} \end{cases} \qquad (172.1)$$

(*) Başlangıçta yapılan varsayımlara göre tüm karakteristikleri standart notasyon ile gösterilecek olursa; (M/M/1) : (FIFO/N/∞) Modeli. Bu modelde $o < \rho < \infty$ dur.

$$P(n > 0) = 1 - P_o \tag{172.2}$$

$$P_n = P_o \rho^n \quad n \leqslant N \quad \text{için}$$

$$L_s = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} & \lambda \neq \mu \quad \text{için} \\ \dfrac{N}{2} & \lambda = \mu \quad \text{için} \end{cases} \tag{172.4}$$

$$L_q = L_s - (1 - P_o) \tag{172.5}$$

$$L_b = \frac{L_q}{1 - P_o} \tag{172.6}$$

$$W_s = \frac{L_q}{\lambda(1 - P_N)} + \frac{1}{\mu} \tag{172.7}$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} \tag{172.8}$$

$$W_b = \frac{W_q}{1 - P_o} \tag{172.9}$$

1.7.3. *(M/M/1) Modelleri için Optimal* $\mu = (\mu^*)$

Kararlı durum koşullarında bekleme ve servis maliyet fonksiyonları lineer varsayılırsa; birim zaman için beklenen toplam maliyet, herhangi bir tek servis istasyonlu model için ;

$$Z = C_s . \mu + C_w . L_s \tag{173.1}$$

genel formülü ile hesaplanır.

Burada ;

C_s = Servis Marjinal Maliyet (TL/müşteri)

C_w = Bekleme Maliyeti (TL/müşteri-birim zaman)

$L_s = \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$ olarak (1) denkleminde yerine konulursa;

$$Z = C_s\mu + C_w\left(\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right) \text{ ve} \qquad (173.2)$$

$\dfrac{dZ}{d\mu} = 0$ türevi sıfıra eşitlenirse ;

$$\mu^* \doteq \lambda + \left(\frac{C_w}{C_s}\cdot\lambda\right)^{1/2} \qquad (173.3)$$

optimal değeri bulunur.[4]

Burada $\lambda < \mu$ veya $\rho < 1$ olduğuna dikkat edilmelidir.

1.8. (M/M/C) Modelleri Formülasyonu

Burada da bir önceki bölümde anlatılan (M/M/1) modeli için yaptığımız tüm varsayımlar geçerlidir. Sadece servis yapan istasyonların sayısı birden fazla (c) gibi bir tam sayıdır. Tek kuyrukta bekleyen (sabırlı) müşteriler, hangi servis istasyonu boş ise oraya yönelmekte ve servis görmektedirler.

1.8.1. *Standart (M/M/C) Modeli*

Bu modelde diğer bir özellik ise; servis istasyonlarının birbirinden bağımsız çalıştığı ve servis hızının kanallar boyunca bağımsız fakat benzer olduğudur. ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \ldots\ldots = \mu_c$). Ayrıca aşağıda verilen işleyiş karakteristikleri formülleri; FIFO, LIFO ve SIRO servis disiplinleri için geçerlidir.

Yalnız; bu kez $\rho < c$ veya $(\lambda/\mu_c) < 1$ kararlı duruma ulaşmak için gerek koşuldur. Başka bir deyişle, tüm sistemin ortalama servis oranı (μc), ortalama geliş oranı (λ) dan büyük olmalıdır. Ayrıca sistemin meşgul olma olasılığı, yani bekleme olasılığı $P(n > o)$ değil, $P(n \geqslant c)$ ile hesaplanır. Dolayısı ile; sistemdeki müşteri sayısı, servis yapıcıların sayısına eşit olduktan sonra, gelen her müşteri beklemek zorunda kalacaktır.

M/M/c modelleri, bazı varsayımlarla, birbirine paralel M/M/1 sistemleri olarak düşünülebileceği gibi; birbirine seri bağlı M/M/c tipi kuyruk sistemleri de ayrı ayrı M/M/c alt sistemleri olarak incelenebilir. Poisson giriş ve çıkışlar bu kolaylığı sağlamaktadır. [4]

Formüller :

$$P_o = \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!}\right) + \frac{\rho^c}{c!\,(1-\frac{\rho}{c})}} \qquad (181.1)$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_o & 0 \leqslant n \leqslant c \quad \text{için} \\ \left(\frac{\rho^n}{c!\,c^{n-c}}\right) \cdot P_o & n \geqslant c \quad \text{için} \end{cases} \qquad (181.2)$$

$$P(n \geq c) = \frac{\rho^c \mu c}{c!(\mu c - \lambda)} \cdot P_o \qquad (181.3)$$

$$L_s = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \cdot P_o + \rho$$

$$L_q = L_s - \rho \qquad (181.5)$$

$$L_b = \frac{L_q}{P(n \geqslant c)} \qquad (181.6)$$

$$W_s = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \qquad (181.7)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \qquad (181.8)$$

$$W_b = \frac{W_q}{P(n \geqslant c)} \qquad (181.9)$$

1.8.2. *Kuyruk Uzunluğunun Sınırlandırılması Halinde (M/M/c) Modeli (*)*

M/M/1 modelinde olduğu gibi, eğer, $N \geq c$ sistemde bulunmasına izin verilen maksimum müşteri sayısı ise; $n = N$ olduğunda veya kuyruk uzunluğu $N - c$ ise, gelen müşteri geri çevrilir. Diğer varsayımlar ise M/M/c için yapılanların aynısıdır. Bu kez $(\rho/c) = (\lambda/\mu c)$ değeri birden küçük olmıyabilir. W_s, W_q ve W_b sisteme katılan müşterileri; P_N ise geri çevrilecek müşteri olasılığını göstermektedir. λP_N ise birim zamanda beklenen geri

(*) $0 < \rho < \infty$

çevirme adedini vermektedir. Bu tür sistemlerin işleyişine ilişkin karakteristiklerin formülleri aşağıdaki gibidir :

$$P_o = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{c} \frac{\varrho^i}{i!}\right) + \left(\frac{1}{c!}\right)\left(\sum_{i=c+1}^{N} \frac{\varrho^i}{c^{i-c}}\right)} \tag{182.1}$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\varrho^n}{c!\,c^{n-c}} \cdot P_o & c \leqslant n \leqslant N \text{ için} \\ \dfrac{\varrho^n}{n!} \cdot P_o & 0 \leqslant n \leqslant c \text{ için} \end{cases} \tag{182.2}$$

$$P(n) \geq c) = 1 - P_o \sum_{i=0}^{c-1} \frac{\varrho^i}{i!} \tag{182.3}$$

$$L_s = \frac{P_o \rho^{c+1}}{(c-1)!\,(c-\rho)^2}\left[1 - \left(\frac{\varrho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\frac{\varrho}{c}\right)^{N-c}\left(1 - \frac{\rho}{c}\right)\right] + \rho\,(1 - P_N) \tag{182.4}$$

$$L_q = L_s - \rho\,(1 - P_N) \tag{182.5}$$

$$L_b = \frac{L_q}{P(n \geq c)} \tag{182.6}$$

$$W_s = \frac{L_q}{\lambda\,(1 - P_N)} + \frac{1}{\mu} \tag{182.7}$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} \tag{182.8}$$

$$W_b = \frac{W_q}{P(n \geq c)} \tag{182.9}$$

1.8.3 *(M/M/c) Modelleri İçin Optimal c : (c*)*

Kararlı durum koşullarında, maliyet fonksiyonlarının doğrusal olması ve ilgili karar değişkeninin sadece servis yapıcıların sayısı varsayıldığında; birim zaman için beklenen toplam maliyet :

$$Z = C'_s \cdot C + C_w \cdot L \qquad (183.1)$$

formülü ile hesaplanabilir.

Burada;

C'_s = Birim zamanda bir servis istasyonunun maliyeti

L ise L_s, L_q veya L_b değerlerinden herhangi biri olabilir. C ve C_w ise daha önce tanımlanmıştı.

Süreksiz Z fonksiyonunda (çünkü c bir tamsayıdır) optimal c yi bulmak için marjinal analize başvurulur.

$Z(C^*) \leqslant Z(C-1)$ ve

$Z(C^*) \leqslant Z(C+1)$ dir.

Buradan;

$$Z(C^*-1) \geq Z(C^*) \leqslant Z(C^*+1) \text{ veya} \qquad (183.2)$$

$$C'_s \cdot (C^*-1) + C_w \cdot L(C^*-1 \geqslant C'_s \cdot C^* + C_w \cdot L(C^*)$$
$$\leqslant C'_s \cdot (C^*+1) + C_w : L(C+1) \qquad (183.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik daha da basitleştirilerek L (C*) cinsinden;

$$L(C^*) - L(C^*+1) \leqslant C'_s / C_w \leqslant L(C^*-1) - L(C^*) \qquad (183.4)$$

haline dönüştürülür. [4]

2. Örnek Problem

Birinci bölümde anlatılanların perspektifinde, M/M/1 ve M/M/c modellerinin uygulaması, bir örnek üzerinde bu bölümde tartışılacaktır.

Üç pompanın servis yaptığı ve sadece abonman müşterüerin yararlanabildiği bir benzin istasyonunu ele alalım. Müşterilerin geliş prosesi Poisson dağılımına uygundur. $\lambda = 0.9$ araba/dk dır. Uygunluk testleri sonunda herbir pompanın servis süresi dağılımının üssel ve ortalama servis oranının, $\mu = 0.4$ araba/dk. olduğu saptanmıştır. İstenilen ise; sistemin müşterilere daha etkin ve kaliteli servis sunabilmesidir.

Bu verilere göre; kuyruk teorisi yaklaşımı ile sistemin davranışım analiz etmek ve yeni düzenlemeler veya politikalar geliştirmek mümkündür.

2.1. Yukarıda anlatdanlardan tek aşamalı ve çok kanallı bir kuyruk sisteminin yönetimi söz konusu edilmekte isede; şayet, herbir pompanın önünde tek kuyruk, kuyrukların seçimi tesadüfi ve sabırlı müşteriler varsayımı yapılabilirse; gerçek sistemi, birbirinden bağımsız üç adet, tek aşamalı, tek kanallı bir kuyruk sistemine benzetebiliriz. (Bkz. Şekil : 5) Geliş oram bu kez her bir alt sistem için (0.9/3) = 0.3 araba/dakikadır.

Buna göre bölüm 1.7.1 de verilen formüllerden ;

$P(n > 0) = 0.75$

$P_o = 0.25$

$L_s = L_b = 3$ araba

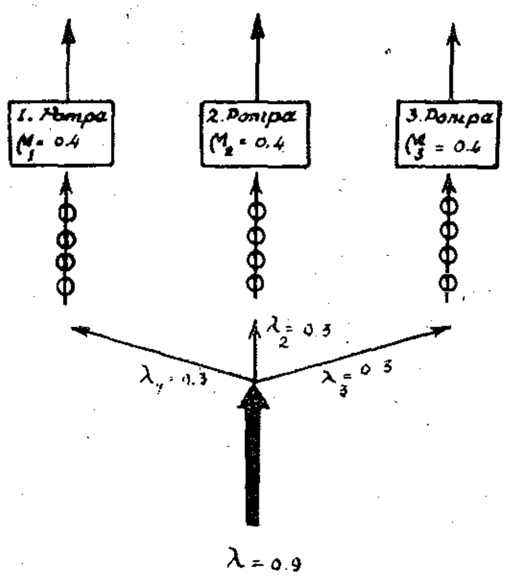
$L_q = 2.25$ araba

$V_{1s} = 12$ araba^2

$W_s = w_b = 10$ dak/araba

$W_q = 7.5$ dak/araba

$V_{ws} = 100$ dak^2 bulunur.



(Şekil : 5) — Benzin İstasyonu Kuyruk Sistemi

Sistemin tamamı gözönüne alındığında, pompalar zamanın % 25 inde boştur. Müşterilerin % 75 i ortalama 10 dakika beklemek zorundadırlar. Kuyrukta bekleme zamanı ($W_q = 7.5$ dak/araba) serviste geçen sürenin ($\frac{1}{\mu} = 2.5$ dak/müşteri) üç mislidir. Bir başka deyişle müşteri kaybetme oranı tek kanallı sistemler için $R = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ olarak bilindiğine göre, bu durumda $R = 3$ dür. Tüm sistemde beklenen müşteri sayısı ise (3 pompa $\times$ 3 araba/pompa) dokuzdur. Varyans ise 36 araba kare (12 + 12 + 12) bulunmaktadır.

Yukarıda anlatılan kuyruk sisteminin davranışım daha iyi anlamak veya kontrol edilebilir değişkenler vasıtasiyle sistemin yönetimine katkıda bulunmak mümkündür. 1.7.1 de verilen formüllerden yararlanarak aşağıdaki değişkenlerin yeni değerleri karşısında sistemin diğer karakteristiklerinde meydana gelebilecek değişiklikler gözlenebilir. Örneğin ;

1. Pompalardan birinin bozulması durumunda,
2. $\mu = 0.3$, 0.35 ve 0.5 ortalama değerleri alması halinde,
3. $\mu = 0.3$ ve dört pompa olması halinde sonuçların ne olacağı, ve
4. Tüm sistemde sadece iki müşterinin olması olasılığı,
5. Beş dakikadan fazla bekletmemek için kaç pompa olması gerektiği,
6. Müşteri kayıp oranının iki ve sistemden yararlanma oranının % 60 olabilmesi için değerinin aralığı v.b.g. karakteristikler hesaplanabilir.

2.2. Benzinlik girişinde, her pompa için $N = 2$ sınırına ulaşınca gelen müşteriler kabul edilmediği takdirde bölüm 1.7.2 de anlatılan tipte bir model karşımıza çıkar. Adı geçen bölümdeki formüller yardımıyla;

$\rho = 0.75$

$P_o = 0.43$

$P(n > 0) = 0.57$

$L_s = 0.80$ müşteri

$L_q = 0.23$ müşteri

$L_b = 0.40$ müşteri

$W_s = 3.5$ dakika

$W_q = 1.0$ dakika

$W_b = 1.75$ dakika

Görüldüğü üzere bir önceki duruma nazaran, kuyruk uzunluğu, kuyrukta bekleme ve sistemden yararlanma oranlarında önemli ölçüde azalmalar meydana gelmiştir. Elbette bu sonuç yüksek bir geri çevirme oranı karşılığı elde edilmiştir.

Bir önceki modelde olduğu gibi bu kez de şu tür sorulara cevap aranabilir.

1. Ortalama, dakikada veya saatte kaç müşteri geri çevrilmiştir ?
2. Müşteri kayıp oranı R nedir ?
3. Geri çevirme oranını yüzde onda tutabilmek için N ne olmalıdır?
4. Yeni N değerinden işleyiş karakteristikleri nasıl etkilenmektedir v.b.

Ayrıca modelin C_s ve C_w değerleri biliniyorsa optimal C^* değeri de bölüm 1.7.3'den yararlanarak hesaplanabilir.

Bundan sonraki bölümlerde ise benzinlik sistemini (M/M/C) kuyruk modeli gibi ele alarak (M/M/1) ile bir kıyaslaması yapümıştır.

2.3 Benzin istasyonunda bu kez yeni bir düzenlemeye gidildiğini ve sistemi bir tek kuyruğun beslediğini varsayalım. Yani bu durumda $C=3$, $\lambda=0.9$ araba/dakika, $\mu=0.4$ araba/dak. ve $\rho=2.25 < 3$ olan bir (M/M/C) modeli söz konusudur. Sistemin boş kalma olasılığı;

$$P_0 = \frac{1}{\frac{(2.25)^0}{0!} + \frac{(2.25)^1}{1!} + \frac{(2.25)^2}{2!} + \frac{(2.25)^3}{3!(1-2.25/3)}}$$

$$P_0 = 0.0748 \text{ bulunur.}$$

Bölüm 1.8.1 de verilen formüllerden Tablo 1 de birinci sütun sonuçları elde edilmiştir. İkinci sütun sonuçları ise daha önce elde edilmişti. Değerlerin kıyaslaması yapıldığında yeni düzenlemenin, yani müşterileri tek kuyrukta toplayıp boşalan pompaya sevketmenin önemli gelişmeler sağladığı görülmektedir.

Dikkat edilirse, formüllerden yapılan hesaplamalar oldukça zaman alıcı ve sıkıcıdır. Gerçek uygulamalarda hazır tablo, grafik veya bilgisayar paket programlarından yararlanılır [10]

Tablo 1 — M/M/3 ve üç alt sistemli M/M/1 Modeli

İşleyiş Karakteristikleri	M/M/3 Modeli (1)	M/M/1 Modeli (2)
P (Bekleme)	0.57	0.75
L_s	3.95 araba	9.00 araba (tüm sistem)
L_q	1.70 »	2.25 araba (üç kuyruğun herbirinde)
L_b	2.98 »	9.00 araba (tüm sistem)
W_s	4.39 dak/araba	10.00 dak/araba
W_q	1.89 »	7.50 dak/araba
W_b	3.31 »	10.00 dak/araba

2.4. Örnek problemde (M/M/C) : (FIFO/N/∞) modeli, N için değişik değerler vererek incelenebilir. Ayrıca pompalara nezaret eden operatörlerin maliyeti (C'_s) ve müşteri bekleme maliyeti (C_w) da biliniyorsa optimum pompa sayısı hesaplanabilir.

Sonuç

Sonuç olarak kuyruk sisttemlerinin karakteristikleri bilinirse modelinin kurulması veya formüle edilmesi kolaylaşır. Böylece analitik yoldan problemin çözümü ve optimizasyonu sağlanabilir. Şayet kuyruk sistemi karmaşık bir nitelik arzediyorsa analitik çözüm yerine **Simulasyon** yöntemi tercih edilir. Tipik bir karmaşık kuyruk sisteminin özellikleri şunlardır :

a) Geliş prosesi veya gelişlerarası süre teorik değil fakat ampirik bir dağılıma veya belirli teorik dağılıma örneğin normal dağılıma uygundur. Diğer taraftan aynı proses zaman içinde sabit değildir. Örneğin mevsimlik değişmeler veya gün içinde mesai bitişi veya başlangıcında farklı karakter gösteriyor olabilir.

b) Servis olanakları ampirik veya teorik servis süreleri dağılımına göre işliyor olabilirler. Servis hızı duruma veya zamana bağımlı olarak değişiyor olabilir. Örneğin kuyruktaki müşteri sayısına göre servis aceleye getirilip kısalabilir. Sistem paralel ve seri bağlı birçok istasyondan müteşekkil olabilir.

c) Geçiş devresine ait kuyruk proseslerinin incelenmesi istenebilir. Yani, sistemin kararlı duruma geçecek kadar uzun süre işletilmediği durumlar söz konusu olabilir.

Kuyruk sistemlerinin simulasyonu başka bir makalede ayrıntılı biçimde ele alınacaktır.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

(1) Kosten, L. «Stochastic Theory of Service Systems» Pergamon Press, Oxford, 1973.

(2) Taha, Hamdy A. «Operations Research, An Introduction» Mac Millan Publishing Co. New York, 1971.

(3) Jelen, F.C. «Cost and Optimization Engineering», Mc Graw-Hill Book Co. New York, 1975.

(4) Budnick, F.S. - Mojena, R. - Vollmann, T.E «Principles of Operations Research for Management» Richard D. Irwin Inc., Homewood Ill., 1977.

(5) Chase, R., - Aquilano, N. «Production and Operations Management» Revised Edition, R. D. Irwin Inc., Homewood, Ill. 1977.

(6) Buffa, Elwood S. «Modern Production Management» John Wiley and Sons, Inc. New York, 1969.

(7) Karpak, Birsen «Askeri Yönetimde Analitik Yöntemler» Bölüm 8, Harp Akademileri Basımevi, İstanbul, 1979.

(8) Little, John D.C., «A Proof of the Queuing Formula : $L = \lambda W$», *Operations Research* 9, 1961.

(9) Karayalçın, İ. İlhami, «Harekât Araştırması Dersleri», İ.T.Ü. Yayını, 1968.

(10) Morse, P., «Queues, Inventories and Maintenance» John Wiley Co. New York, 1958.