

# I — PLANLAMA MODELLERİNİN LİNEERLEŞTİRME PROBLEMLERİ

D. B. PRESSMAR ve B. JAHNKE (\*)

Doç. Dr. Birsen KARPAK  
İ. Ü. İşletme Fakültesi  
Matematik Kürsüsü

Doç. Dr. Kutlu MERİH  
İ. Ü. İşletme Fakültesi  
Matematik Kürsüsü

## The Linearizing Problems Of Planting Models

[Tek değişkenli nonlineerlikler, planlama modellerinin değişkenleri veya parametreleri zamanın nonlineer fonksiyonları ise veya, zamanın lineer fonksiyonları birbirleri ile çarpıldığında ortaya çıkmaktadır. Bundan başka, maliyet ve gelir fonksiyonları bir çok durumda tek değişkenli nonlineer terimlerden oluşmaktadır. Bu nonlineer yapılar, tekli veya çoklu olarak çeşitli tipten lineer fonksiyonlar ile yaklaşılabilir.]

Nonlinear functions with single variable occur when variables or parameters of planning models are the nonlinear functions of time. They are also occurred by the multiplication of the linear functions of time. On the other hand, parameters of the cost and income functions are single variable nonlinear parameters. Single or multiple linear functions can be an approach for these nonlinear systems.

Lineer planlama modelleri genel olarak lineer amaç fonksiyonu ve lineer kısıtlarla karakterize edilir. Bununla beraber, planlama probleminin kısıtlarda ve amaç fonksiyonunda lineer olmayan fonksiyonların bulunmasını gerektiren durumları da gözlenmektedir. En etkili optimizasyon algoritmaları lineer programlamaya dayandığından, lineer olmayan kısımları lineerleştirme yardımı ile lineer biçimlere dönüştürmek yararlı olmaktadır.

(\*) : Universitat Hamburg, Von-Melle Park 5, D-2000 HAMBURG 13, F.R.G.

(\*\*) : Çevirenler,

Lineer olmayan durumlar :

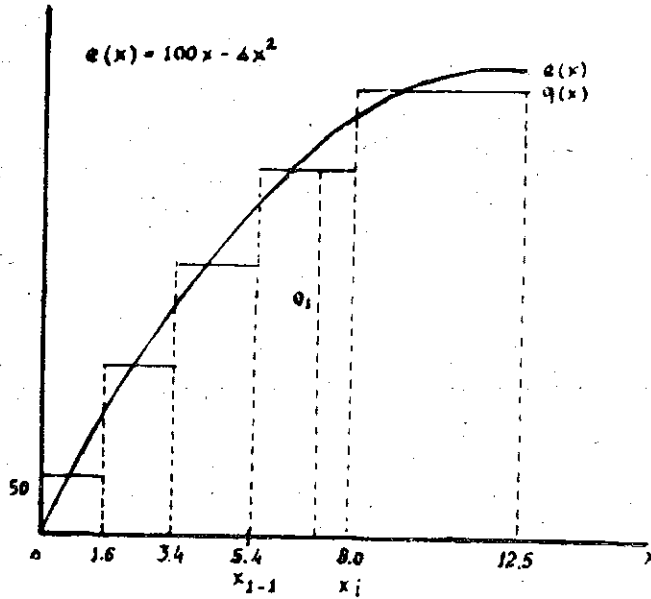
(I) Modelin deęişkenlerinde

(II) Dinamik modellerin parametre ve katsayılarındaki değişimleri belirleyen zamanın fonksiyonlarında olmak üzere iki ana kategoride gözlenir.

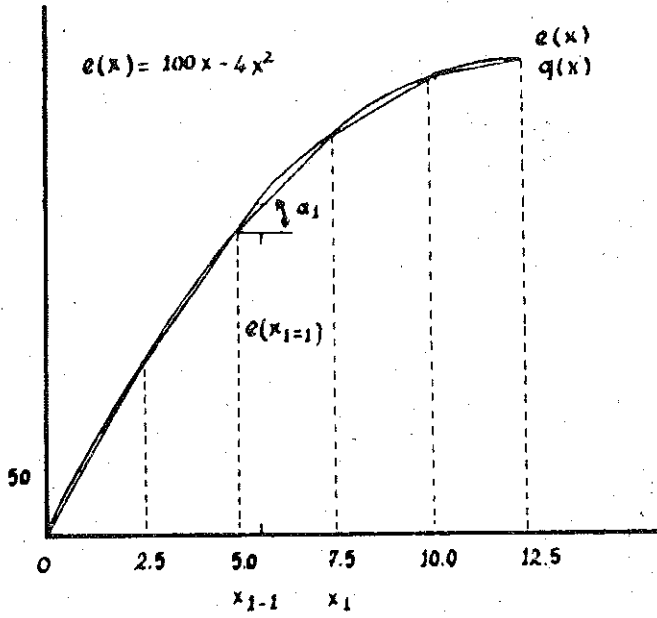
Değişkenlerdeki lineer olmayış ile ilgili birinci durumda yalnız tek değişkenli fonksiyonlar veya tekdeğişkenli lineer olmayan terimlerin lineer kombinasyonları incelenecektir. Lineer olmayan çok değişkenli fonksiyonların bütün diğer sınıfları, hariç tutulmuştur. Söz konusu tipik durumu açıklamak üzere, monopolistik bir pazarda satış gelirleri nonlineer fonksiyonu  $e(x)$  i gözönüne alalım. Bu ikinci dereceden çok terimlinin - şekil 1.a, 1.b de gösterildiği gibi parça parça lineer  $q(x)$  fonksiyonu ile yaklaşım,

$$e(x) \rightarrow q(x) := \sum_{i=1}^n q_i(x) \quad (1.1)$$

ile verilmiştir ki burada



Şekil : 1-a



Şekil : 1-b

$$q_i(x) := \left\{ \begin{array}{l} \bar{q}_i(x), x \in \left\{ \begin{array}{l} [x_{i-1}, x_i), \Lambda_{i-1}^{n-1} \\ [x_{n-1}, x_n], i=n \end{array} \right\} \\ 0, \quad \text{bunun dışında} \end{array} \right\}$$

Basamak fonksiyonu halinde

$$q_i(x) := \left\{ \begin{array}{l} Q_i, x \in \left\{ \begin{array}{l} [x_{i-1}, x_i), \Lambda_{i-1}^{n-1} \\ [x_{n-1}, x_n], i=n \end{array} \right\} \\ 0, \quad \text{bunun dışında} \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

iken birinci dereceden spline fonksiyonu (1) ile yaklaşılması halinde

$$q_i(x) := \begin{cases} e(x_{i-1}) + \alpha_i(x - x_{i-1}), & x \in \left\{ \begin{array}{l} [x_{i-1}, x_i), \Lambda \\ [x_{n-1}, x_n], i = n \end{array} \right\} \\ 0, & \text{bunun dışında} \end{cases} \quad (1.3)$$

ile tanımlanmıştır.

$x_i$ , yaklaşım aralığı dahilinde serbest köşeleri gösterebilir; dolayısıyla bu köşeler parçalı lineer yaklaşım fonksiyonunu oluşturan doğru parçalarını belirler. Şekil 1.a ve 1.b de görüldüğü gibi doğru parçalarını gradientleri  $\alpha_i$ , basamakları ise  $Q_i$  ile belirlenmektedir.

İkinci kategori nonlineariteler, dinamik planlama modellerinde karışımıza çıkan tipik problemlerle ilgilidir. Planlama periyodunun eşit uzunlukta zaman aralıklarına ayrılabilirdiği hallerde genel olarak dinamik modele basamak zamanlı bir yaklaşım uygulanır. Zaman aralığının içinde modelin statik olduğu varsayılır ve modelin dinamik yönü iki ardışık zaman aralığı bağlayan ilişkilerle belirlenir. Her bir zaman aralığına zaman değişkeni açısından sabit olarak gözönüne alınan parametreler, katsayılar ve karar değişkenleri atfedilir.

Bununla beraber, gerçekte, şayet katsayılar ve parametreler zamanın keyfi fonksiyonları ise bu katsayı ve parametreler, örneğin yaklaşılan fonksiyonu köşeleri modelin zaman dilimlerinin uçları ile eşleşen basamak fonksiyonları ile ifade edilebilirler.

Zamanı kendisinin bir değişken olduğu bazı dinamik lineer modellerde (7) basamak fonksiyonları dışında diğer parçalı lineer yaklaşım fonksiyonları kullanılabilir. Örneğin birinci dereceden spline fonksiyonları.

Bu halde yaklaşım problemi, (1.1) — (1.3) arası belirlemiş olduğumuz ifadele benzerdir. Örneğin, şekil 2a ve 2b orijinal  $p(t)$  fonksiyonu 12 aylık satış fiyatını göstermek üzere bu fonksiyona değişken köşeli iki tip yaklaşım göstermektedir. Yaklaşım problemi

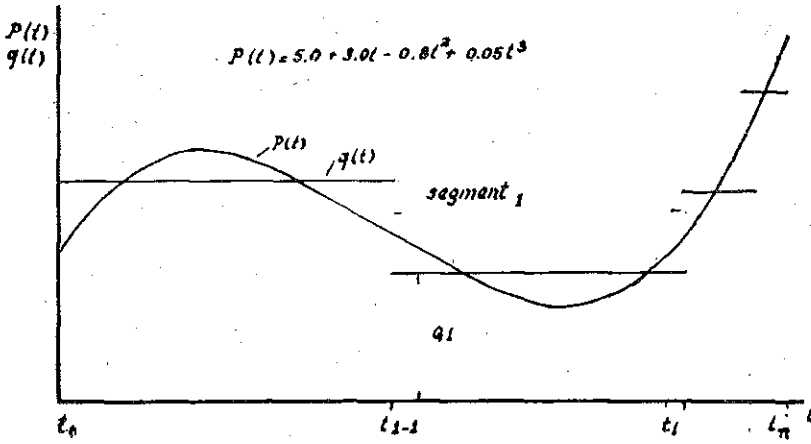
$$p(t) \rightarrow q(t) := \sum_{i=1}^n q_i(t) \quad (1.4)$$

şeklinde yazılabilir ki burada

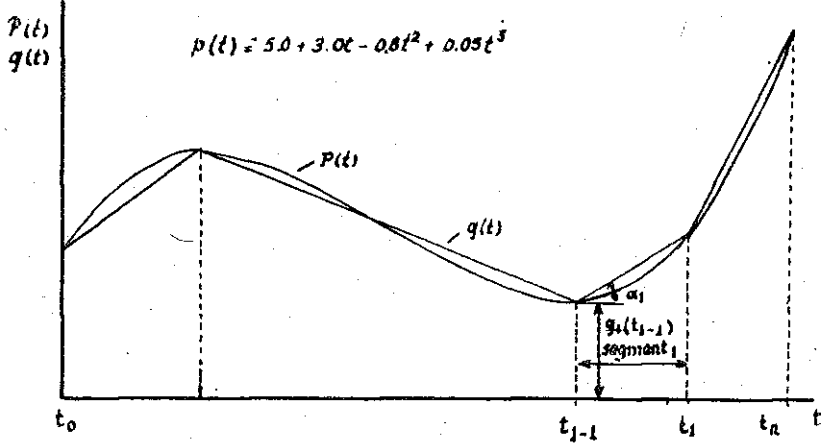
$$q_i(t) := \left\{ \begin{array}{l} q_i(t), t \in \left\{ \begin{array}{l} [t_{i-1}, t_i], \Delta \\ [t_{n-1}, t_n], i=n \end{array} \right\} \\ 0, \text{ bunun dışında} \end{array} \right\}$$

Şekil 2a bir basamak fonksiyonu yaklaşımını ve Şekil 2b spline yaklaşımını göstermektedir. Bunların her biri  $n=4$  değişken köşeli veya  $n+1=5$  segmentlidir.

Şekil 2a ve 2b sırasıyla, verilen bir  $n=4$  değişken köşeli veya  $n+1=5$  segmentli bir basamak fonksiyonuna yaklaşımı ve spline yaklaşımını göstermektedirler.



Şekil : 2a



Şekil : 2b

Basamak ve spline yaklaşım fonksiyonları kanonik şekilde (1.2) ve (1.3) ifadeleri ile verilmiştir. Farklı tipte yaklaşım fonksiyonları için genel olarak yaklaşım aralığını parçalara ayrılmasının farklı olacağını belirtmekte yarar vardır. Aşağıda bu yaklaşım yönteminin teorik temeli verilmektedir; bilgisayarı deneyimi ree katsayılı poligon olduğu varsayılan orijinal fonksiyonlara dayanmaktadır.

## 2 — ETKİN YAKLAŞIMLAR İÇİN BAZI POSTULALAR

Daha önce belirtildiği gibi parçalı lineer yaklaşım fonksiyonları lineer planlama modellerinde büyük bir öneme sahiptir. Bu gerçeğe ek olarak şu soru cevaplanmalıdır: Yaklaşım fonksiyonlarının katsayıları ve değişken köşeleri nasıl belirlenmelidir? Çözüm, yaklaşım yönteminin amaçlarına göre değişir.

Ekonomik modelleme açısından beş yaklaşım postulatı yararlı görülebilir.

(I) Yaklaşım fonksiyonu orijinal fonksiyondan minimum sapma sağlamalıdır.

(II) Etkin bir yaklaşım fonksiyonu, verilmiş bir uyum kalitesine (goodness of fit), parçalı lineerleşmeyi tanımlayan minimum sayıda köşe ile ulaşmalıdır.

(III) Orijinal fonksiyon ve yaklaşım fonksiyonu yaklaşımın her bir parçasında veya hiç olmazsa tüm aralığın içinde eş alanlı (equiareal) olmalıdır.

(IV) Yaklaşım aralığı içinde, her bir parçanın sonunda, yaklaşım fonksiyonu ve orijinal fonksiyon kesişmelidir, yani yaklaşım fonksiyonu birinci dereceden bir spline olmalıdır.

(V) Yaklaşım aralığının başında ve sonunda yaklaşım fonksiyonu verilen keyfi herhangi bir değeri alabilmelidir.

Postula I yaklaşımın en genel amacını simgelemektedir. Bundan başka orijinal fonksiyonun ve yaklaşım fonksiyonunun yaklaşım aralığı için köşelerinde kesişmesi (postula IV) ekonomik model kurma için önemlidir. Öyle ki bir LP yaklaşımının değişkenlerinin optimal değerleri kısıtlayıcı aralığın üst kenarında oluşur. Böyle bir aralığın yaklaşım aralığının bir doğru parçası ile belirlenmesi halinde, LP çözümü optimuma ulaşmış ise yaklaşım değeri ve orijinal değer özdeş olacaktır.

Postula II, aşağıdaki ifadelerde ele aldığımız gibi, yaklaşım problemine yeni ve önemli bir görüş getirmektedir. Genel olarak, ekonomik modellere yaklaşım yöntemi, önceden belirli eş uzaklıklı köşelere veya, bazı hallerde, yaklaşım aralığı içinde verilen bir parçalama örneğine dayanır. Zaman basamaklı ekonomik modelleri gözönüne alırsak, zamana bağlı olarak değişen parametrelere doyuran bir yaklaşım temin etmek için gerekli basamak sayısı, modelin boyutunu hatırı sayılır bir şekilde etkiler. Bu durumda, minimum zaman basamağı kullanarak uygun bir uyum temin eden bir yaklaşım bulmak, modelin boyutunu hesaplanabilir bir düzeyde tutabilmek için sınırlamak veya hatta indirgemek açısından önemlidir.

Postula III'te yaklaşım fonksiyonunun ekonomik modellerin tasarımında belirli bir önemi olan bir özelliği karakterize edilmektedir. Pek çok halde yaklaşılacak planlama modelinin katsayı ve parametreleri üretim hızı, satış hızı gibi akış hızlarını göstermektedir. Bu katsayı veya parametrelerin fonksiyonlarının herhangi bir zaman aralığındaki integrali, yaklaşım fonksiyonlarının aynı aralıktaki integraline eşit olmalıdır. Benzer bir eşalanlı yaklaşım problemi, orijinal fonksiyonun birinci türevine yaklaşımın daha uygun görüldüğü halde ortaya çıkmaktadır.

Bütün bu postulalar bir arada gözönüne alınırsa bazılarının birbirleriyle çelişkili olduğu görülür. Özellikle postula III ve IV. Gerçekten herhangi bir orijinal nonlineer fonksiyon için hem eşalanlı olma hem de birin-

ci derecede spline olma özelliklerini taşıyan bir parçalı-lineer yaklaşım fonksiyonu bulunamaz.<sup>2</sup> Bu özel durum dışında, genellikle, bu postulalar takımı önerilen yaklaşım tekniği için belirleyici olacaktır.

### 3 — TEK BİR FONKSİYONA YAKLAŞIM

#### 3.1. Parçalı-Lineer Yaklaşım Fonksiyonunun Temelleri

$f(t)$ , başka bir  $g(t)$  fonksiyonu tarafından yaklaşılabilecek olan orijinal fonksiyon olsun. Bütün nümerik ve bilgisayar uygulamalı örneklerin, polinom olan orijinal fonksiyonlara dayandığı gözönünde bulundurulmalıdır. Bu bir kısıtlama olarak düşünülemez zira verilen bir fonksiyona polinom ile yaklaşmayı veren birçok bilinen yöntem vardır (örneğin serilere açılım yöntemi).

Yaklaşım,

$$H := [t_0, t_n] \quad (3.1)$$

aralığında tanımlanmıştır ki burada doğru parçaları

$$H_i := \begin{cases} [t_{i-1}, t_i], & i=1, \dots, n-1 \\ [t_{n-1}, t_n], & i=n \end{cases} \quad (3.2)$$

ile verilmiştir ve  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{i-1} < \dots < t_n$  dir. (3.3)

Böylece yaklaşım fonksiyonunun köşeleri yani  $t_i$  ler tanımlanır.

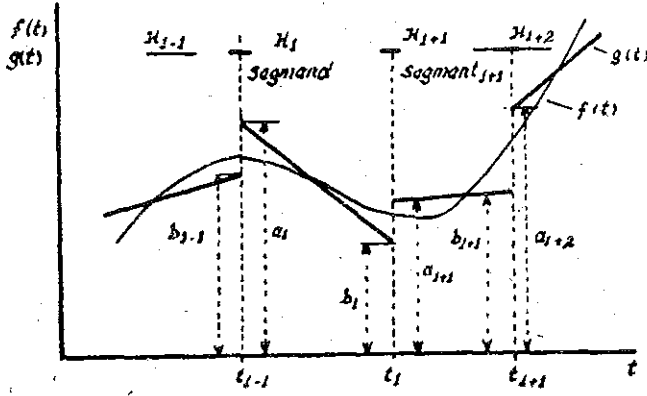
Yukarıda verilen postulalara göre  $g(t)$  yaklaşım fonksiyonu

$$g(t) := \sum_{i=1}^n g_i(t) \quad (3.4)$$

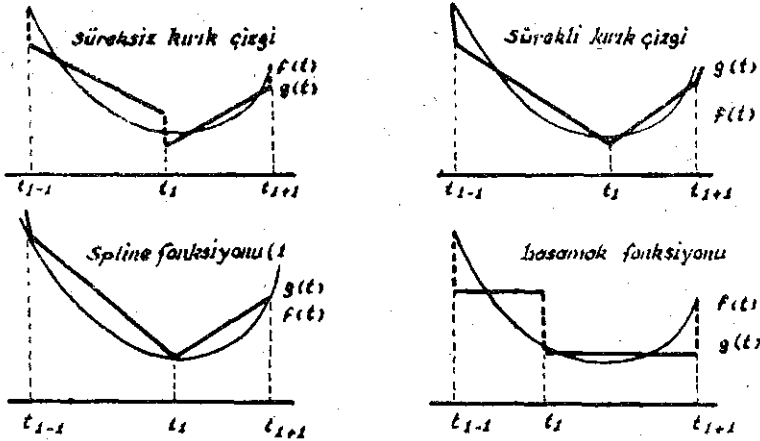
şeklinde yazılabilir ki burada,

$$g_i(t) := \begin{cases} \frac{a_i t_i - b_i t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + \frac{b_i - a_i}{t_i - t_{i-1}} t, & t \in H_i \\ 0, & \text{bunun dışında} \end{cases} \quad \bigg\} \sum_{i=1}^n \quad (3.5)$$

2) Bu özellik,  $f(t)$  nin, örneğin gözönüne alınan yaklaşım aralığında tam dışbükey (konveks) olması halinde geçerlidir.



Şekil : 3



Şekil : 4 a,b,c,d

Parçalı lineer yaklaşım fonksiyonu  $g(t)$  geometrik olarak şekil 3 de gösterilmiştir. Genel halde, bu fonksiyon sürekli bir şekilde bağlanmamış bir dizi doğrulardan oluşmuştur. Yaklaşım fonksiyonunun bu genel geometrik şekli (şekil 4 a'ya bakınız) «süreksiz kırık çizgi» olarak adlandırılacaktır. Ayrıca yaklaşım fonksiyonunun üç özel tipi şekil 4b, 4c ve 4d de olduğu gibi gösterilebilir. Bilhassa bu üç ilave tip yaklaşım fonksiyonları aşağıdaki şekilde belirlenebilir :

$$(I) \quad b_i = \begin{cases} a_{i+1}, & \overset{n-1}{\Delta}_{i=1} \\ a_1, & i=0 \end{cases} \quad (3.6)$$

ve

$$g_i(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{b_{i-1} t_i - b_i t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + \frac{b_i - b_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} t, \quad t \in H_i \\ 0, \quad \text{bunun} \\ \quad \quad \quad \text{dışında} \end{array} \right\} \overset{n}{\Delta}_{i=1} \quad (3.7)$$

olmak üzere «süreklilik çizgi» (Şekil 4b ye bkz.)  
(II) (3.6) ya ilave olarak

$$b_i = f(t_i) (= : f_i) \overset{n}{\Delta}_{i=0} \quad (3.8)$$

ve

$$g_i(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_{i-1} t_i - f_i t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + \frac{f_i - f_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} t, \quad t \in H_i \\ 0, \quad \text{bunun} \\ \quad \quad \quad \text{dışında} \end{array} \right\} \overset{n}{\Delta}_{i=1} \quad (3.9)$$

olmak üzere "spline fonksiyonu (birinci dereceden)" (Şekil 4c ye bkz.)

(III)

$$a_i = b_i \overset{n}{\Delta}_{i=1} \quad (3.10)$$

ve

$$g_i(t) = \left\{ \begin{array}{l} a_i, \quad t \in H_i \\ 0, \quad \text{bunun} \\ \quad \quad \quad \text{dışında} \end{array} \right\} \overset{n}{\Delta}_{i=1} \quad (3.11)$$

olmak üzere «basamak fonksiyonu» (Şekil 4d'ye bkz.)

Sonuç olarak IV üncü tipin (3.5) de «süreksiz kırık çizgi» olarak tanımlandığı hatırlanmalıdır.

Şu anda sorun, bu çeşitli tipte yaklaşım fonksiyonlarının bilinmeyenlerinin nasıl belirleneceğidir.

Tablo 1 yukarda açıkladığımız dört duruma karşı gelen bilinmeyenlerin tip ve sayılarını vermektedir. Yaklaşım aralığının başlangıcı  $t_0$  ve sonu  $t_n$  in verildiği varsayıldığına göre belirlenecek yalnız  $n-1$  tane değişken vardır. Bilinmeyenlerin bir kısmının sabit değerler olarak açıkça işleme girmeden önceden belirlenebilmesi olanağı uygun bir çözüm şekli sağlar.

Bu bilinmeyen sayısının indirgenebilir olduğunu gösterir. Ayrıca, birinci dereceden spline fonksiyonu ile yaklaşım minimum bilinmeyenli bir problem verirken maksimum bilinmeyen sayısı, IV üncü hale göre parçalı-lineer yaklaşım fonksiyonunun genel şeklinin uygulanması ile ortaya çıkar. Bilinmeyenleri belirlemek için gerekli bilgi, yaklaşım yönteminin amaç fonksiyonundan türetilmelidir. Yaklaşım kuramında esas olarak iki yol önerilir.: Tchebycheff-yaklaşımı (Cebişef-yaklaşımı) ve  $L_p$  - yaklaşımı (8). Problemimizi çözmek için  $L_2$  - yaklaşımı seçilecektir. Bu yaklaşımın çeşitli avantajları vardır: Hesaplama ile ilgili sorunlar, çok büyük değildir, her tip yaklaşım fonksiyonu için bilgisayar kullanarak kolaylıkla çözülebilir. III ve IV durumlarında bu yaklaşım, aşağıda kamtlanacağı gibi, eş alanlı yaklaşımla ilgili postula II'yi de gerçeklemektedir.

Yaklaşım fonksiyonu tipi	Bilinmeyen tipi	Bilinmeyen sayısı
(I) Sürekli kırık çizgi	$b_0, b_1, \dots, b_n$ $t_1, \dots, t_{n-1}$	$1 + n + (n - 1) = 2n$
(II) Birinci derece Spline fonksiyonu	$t_1, \dots, t_{n-1}$	$(n - 1) = n - 1$
(III) Basamak fonksiyonu	$a_1, \dots, a_n$ $t_1, \dots, t_{n-1}$	$n + (n - 1) = 2n - 1$
(IV) Süreksiz kırık çizgi	$a_1, \dots, a_n$ $b_1, \dots, b_n$ $t_1, \dots, t_{n-1}$	$n + n + (n - 1) = 3n - 1$

Tablo : 1

En iyi yaklaşımın varlığı esas olarak teorik öneme sahiptir. Pratik olarak, ve hiçbir özel durumu hesaba katmadan sabit köşelerle yaklaşımın verdiğinden daha iyi yaklaşımlar elde etmek her zaman olanaklıdır.

Bununla beraber, I, II ve III durumunda en iyi yaklaşımın varlığının, Rice (9)n süreksiz kırık çizgiler haline de genelleştirilebilen bir bulgusu iie uyum halinde olduğu söylenebilir. II, III durumlarında en iyi çözümün süreksizliği içermesi, örneğin bazı köşelerde basit bir sıçrama olması, her ne kadar nümerik deneyimiz dahüinde hiç ortaya çıkmadıysa da olanaklıdır.

### 3.2. En İyi Yaklaşımın Belirlenmesi

Değişken köşeli spline yaklaşımını karakterize eden hiç bir teorem bilinmemektedir. (2, 9); sadece derecesi 1'den büyük "spline" için Hand-scomb (4), hem ayrık köşelerin varlığı hem de çözümüün teklığı için yeter koşulları vermiştir. Aşağıda en iyi yaklaşan parçah-lineer fonksiyonlar karakterize edilecektir ve sonuçların ekonomik modeller için önemli olduğu görülecektir.

L<sub>p</sub>-yaklaşımı, (g-f) (t) hata fonksiyonunun L<sub>p</sub>-normunu minimize etme esasına dayanır. Bu norm

$$L_p(g - f) : = \left( \int_H |g(t) - f(t)|^p dt \right)^{1/p}. \quad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir. L<sub>2</sub> - normu halinde

$$\text{minimize } Z^* : = \sqrt{\int_H (g(t) - f(t))^2 dt}. \quad (3.13)$$

problemi çözülmelidir. (3,13) deki «karekök» operatörü monoton olma özelliğini içerdiğinden

$$\text{minimize } Z : = \int_H (g(t) - f(t))^2 dt. \quad (3.14)$$

şeklinde ifade edilebilir. Parçah-lineer g (t) fonksiyonuna göre problem

$$\text{minimize } Z = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (g_i - f)^2(t) dt. \quad (3.15)$$

şekline dönüşür.

Orijinal f (t) ve g<sub>i</sub> (t) fonksiyonları türetilbilir olduğundan minimizasyon problemi Z nin kısmî türevlerini sifıra eşitliyerek çözülebilir. Genel tipte yaklaşım fonksiyonu için kısmî türevler sistemi

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \frac{\partial Z}{\partial t_i} &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial t_i} \left[ \int_{t_{\nu-1}}^{t_{\nu}} (g_{\nu} - f)^2(t) dt \right] = 0 \quad \prod_{i=1}^{n-1} \\
\text{(b)} \quad \frac{\partial Z}{\partial a_i} &= \sum_{\nu=1}^n 2 \int_{t_{\nu-1}}^{t_{\nu}} \frac{\partial g_{\nu}}{\partial a_i} (g_{\nu} - f)(t) dt = 0 \quad \prod_{i=1}^n \\
\text{(c)} \quad \frac{\partial Z}{\partial b_i} &= \sum_{\nu=1}^n 2 \int_{t_{\nu-1}}^{t_{\nu}} \frac{\partial g_{\nu}}{\partial b_i} (g_{\nu} - f)(t) dt = 0 \quad \prod_{i=1}^n
\end{aligned} \tag{3.16}$$

ile verilmiştir.

Bu nonlineer denklemler sistemi (3,6), (3,8), (3,10) denklemlerini uygulayarak ve sıfıra özdeş olan kısmî türevleri ihmal ederek diğer üç yaklaşım fonksiyonuna da uygulanabilir. (3.16) sistemi üzerindeki tartışmalar sürdürülürse şu sorunun cevabı ortaya çıkar : Yaklaşım fonksiyonlarının hangisi eşalanlı olma özelliğini içermektedir.

Eğer süreksiz kırık çizgi (IV üncü hal) gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \frac{\partial Z}{\partial t_i} &= \frac{\partial}{\partial t_i} \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} (g_i - f)^2(t) dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (g_{i+1} - f)^2(t) dt \right] = 0 \quad \prod_{i=1}^{n-1} \\
\text{(b)} \quad \frac{\partial Z}{\partial a_i} &= \frac{2}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)(g_i - f)(t) dt = 0 \quad \prod_{i=1}^n \\
\text{(c)} \quad \frac{\partial Z}{\partial b_i} &= \frac{2}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1})(g_i - f)(t) dt = 0 \quad \prod_{i=1}^n
\end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir. (3.17b) ve (3.17c) nin toplamı

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i} + \frac{\partial Z}{\partial b_i} = 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} (g_i - f)(t) dt = 0 \quad \prod_{i=1}^n \tag{3.18}$$

i verir ki bu da,

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_i(t) dt \quad \prod_{i=1}^n \tag{3.19}$$

ifadesine eşdeğerdir.

Bu sonuç her  $H_1$  parçası üzerinde orijinal fonksiyon ve yaklaşım fonksiyonlarını integrallerinin eş büyüklükte olduğunu gösterir; dolayısıyla, genel IV halinde, yaklaşım eşalanlıdır.

I sürekli kırık çizgi hali ile ilgili olarak sadece  $\partial z/\partial b_i$  kısmî türevleri gözönüne alınmalıdır. Bundan dolayı (3.19) da ifade edildiği gibi bir denklem, formüle edilemez; bu, genel olarak, sürekli kırık çizginin ek kısıtlar olmaksızın eşalanlı olamayacağı gösterir.

Spline fonksiyonu ile yaklaşım (II inci hal)  $\partial z/\partial a_i$  ve  $\partial z/\partial b_i$  kısmî türevleri bulunmayan denklemler sistemine götürür. Dolayısıyla (3.17) — (3.19) ifadeleri ile gösterilen bir sonuç da mevcut değildir. Spline yaklaşımının eşalanlı olmadığı açıktır <sup>4</sup>.

III basamak fonksiyonu halinde, kısmî türevler  $\partial z/\partial a_i$  sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\frac{\partial Z}{\partial a_i} = 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\partial g_i}{\partial a_i} (g_i(t) - f(t)) dt = 0 \quad \prod_{i=1}^n \quad (3.20)$$

$g_i(t) = a_i = \partial g_i/\partial a_i = 1$  olduğundan

$$2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} (a_i - f(t)) dt = 0 \quad \prod_{i=1}^n \quad (3.21)$$

Bu sonuç basamak fonksiyonu ile yaklaşma halinin de eşalanlı olma özelliğini taşıdığını gösterir.

Sürekli kırık çizgi halinde (I hali) eşalanlı yaklaşım elde etmek için ek kısıtlar kullanılmalıdır. Bunlar

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (g_i - f)(t) dt = 0 \quad \prod_{i=1}^n \quad (3.22)$$

ile verilmiştir. Lagrange çarpanları yöntemi kullanarak optimizasyon problemi

$$\text{minimize } L = Z - \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} (g_i - f)(t) dt \quad (3.23)$$

ile ifade edilebilir. Eğer şimdi kısmî türevler sifira eşitlenirse

$$(a) \quad \frac{\partial L}{\partial t_i} = \frac{\partial Z}{\partial t_i} - \lambda_i \frac{\partial}{\partial t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (g_i - f)(t) dt - \lambda_{i+1} \frac{\partial}{\partial t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (g_{i+1} - f)(t) dt = 0 \quad \prod_{i=1}^{n-1}$$

$$(b) \quad \frac{\partial L}{\partial b_i} = \frac{\partial Z}{\partial b_i} - \frac{1}{2} \lambda_i (t_i - t_{i-1}) - \frac{1}{2} \lambda_{i+1} (t_{i+1} - t_i) = 0 \quad \prod_{i=0}^n \quad (3.24)$$

$$(c) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (g_i - f)(t) dt = 0 \quad \prod_{i=1}^n$$

elde edilir. Bu 3n nonlineer denklem sistemi çözülerek bütün bilinmeyenler belirlenebilir. Dolayısıyla eşalanlı bir yaklaşım elde edilir.

### 3.3. Ek : Yaklaşımın Eşuzaklıklı Köşeleri

Yaklaşım fonksiyonunun köşeleri değişken olarak tanımlansa bile bu fonksiyonu  $L_2$ -normuna göre optimal olduğu yaklaşım aralığı eşbüylükteki parçalara bölme yani yaklaşımın köşelerinin eşuzaklıkta olma özel bir durumu ortaya çıkabilir. Bu özellik, orijinal  $f(t)$  fonksiyonu ikinci dereceden bir polinom iken yaklaşım fonksiyonunun birinci dereceden spline fonksiyonu olması halinde, karşılaşılabılır.

İkinci dereceden polinomlar

$$f(t) = t^2 \quad (3.25)$$

den yatay ve düşey dönüşümler vasıtasıyla ve ölçekleme faktörü kullanarak türetilir. Bu nedenden ötürü (3.25) normal parabolü aşağıdaki matematik tümdengelim sonuçlarını kısıtlamaz. Bundan dolayı eşuzaklık ispatı, basitlik amacıyla bu tip bir polinoma dayandırılmıştır.

Yaklaşım fonksiyonu spline fonksiyonunu (II inci hal) belirleyen (3.9) tanımıyla verilmiştir. Şimdi amaç fonksiyonu için

$$\text{minimize } Z = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (g_i(t) - t^2)^2 dt \quad (3.26)$$

vardır. Bu minimizasyon problemi kısmî türevler sifira eşit kılınarak çözülmürse

$$\frac{\partial Z}{\partial t_i} = -\frac{1}{6}(t_{i+1}^4 - t_{i-1}^4) + \frac{2}{3}t_i^3(t_{i+1} - t_{i-1}) + \frac{2}{3}t_i(t_{i+1}^3 - t_{i-1}^3) - t_i^2(t_{i+1}^2 - t_{i-1}^2) = 0 \quad \prod_{i=1}^{n-1} \quad (3.27)$$

elde edilir.

Bu denklem sisteminin açık (explicit) çözümü üç farklı sonuca götürür.

$$\left. \begin{aligned}
 (a) \quad t_{i-1} &= t_{i+1} \\
 (b) \quad t_i &= \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_{i-1}) \\
 (c) \quad t_i &= \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_{i-1}) \pm \sqrt{\frac{1}{8}[2t_{i-1}t_{i+1} - 3(t_{i+1}^2 + t_{i-1}^2)]}
 \end{aligned} \right\} \prod_{i=1}^{n-1} (3.28)$$

Sanal çözüm olduğundan (c), çözümler arasından çıkartılabilir. Çözüm (a) bütün  $H_i$  doğru parçalarının tek bir noktayla çakıştığı hali belirler; bu  $t_0, t_n$  nin sıfırdan büyük uzunluklu bir  $H$  aralığı belirlediği varsayımı ile çelişkilidir. Dolayısıyla bu da çözümler arasında çıkartılabilir. Son olarak çözüm (b),  $t_i$  ile tanımlanan  $i$  köşesinin, iki komşu  $i-1$  ve  $i+1$  köşelerinin tam ortasında olduğunu göstermektedir. Bu çözümün  $L_2$  normunu minimum yaptığı, optimizasyonun bazı bilinen kuralları uygulanarak gösterilebilir<sup>(8)</sup>.

### 3.4. Nümerik Örnekler

Önerdiğimiz yaklaşım prosedürünün etkinliği, bazı nümerik örneklerle belirlenecektir. İşlemsel nedenlerle, esas fonksiyon bir polinom olarak seçilirken yaklaşım fonksiyonu bir basamak fonksiyonu (Durum III) veya bir spline fonksiyonu (Durum II) olarak seçilmektedir. Şüphesizki burada, diğer tipten yaklaşım fonksiyonları da uygulanabilir.

$$f(t) = p(t) = 5.0 + 3.0t - 0.8t^2 + 0.05t^3; t \in [0, 12]$$

$i$	0	1	2	3	4	Z
Basamak Fonksiyonu						
$t_i$	0	5.41	10.27	11.25	12	
$a_i$	—	7.29	4.18	7.01	10.35	8.07
Spline Fonksiyonu						
$t_i$	0	2.22	8.35	10.31	12	2.40

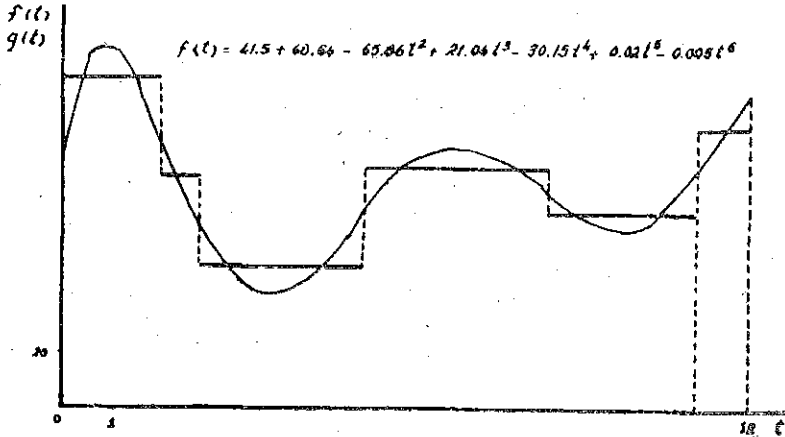
Tablo : 2a

Eşuzaklıklı Segmentlerin sayısı n	4	6	7	8	12
Basamak Fonksiyonu					
Z	24.65	12.46	9.4	7.32	3.35
Spline Fonksiyonu					
Z	8.55	1.75	—	—	—

Tablo : 2b

Bilinmekte olan bir örnekle başlayabilmek için Şek. 2a ve 2b de gösterilen polinomi ve yaklaşımları analiz edilecektir. Bu grafikler etkin yaklaşımları belirlemektedir; burada  $n = 4$  adet yaklaşım segmenti alınmaktadır. Yaklaşım belirleyen bütün veriler tablo 2a da verilmektedir. Farklı tipleri belirleyen bu yaklaşım fonksiyonları arasında açıkça görüldüğü gibi spline fonksiyonu, basamak fonksiyonuna nazaran daha düşük değerli bir kriter fonksiyonuna sahiptir. Bu yeni yaklaşım önerisinin etkinliği tablo 2b den okunabilir. Kriter fonksiyonunun aldığı değerler, eşarahlı segmentasyon durumu için çeşitli köşe sayılarına göre verilmektedir. Eşit uzunluktaki  $n=4$  adet segment almakla esas fonksiyondan sapmayı gösteren kriter fonksiyonunun değeri, tablo 2a da gösterildiği gibi her iki yaklaşım fonksiyonu tipi için 3 veya 4 defa daha yüksektir. Değişken köşe sayısı halinde yaklaşımın kalitesini değerlendirebilmek için iyi bir kriter aşağıdaki soruya bir cevap bulunduğu zaman ortaya çıkmaktadır: Eş deger bir uyum sağlamak için kaç adet eş ölçülü segment gerekir? Tablo 2b'den görülebileceği gibi basamak fonksiyonu iki kat segment gerektirmekte, spline fonksiyonu uygulaması halinde ise 4 yerine 6 kat segment gerekmektedir. Bunun anlamı dinamik bir modelin büyüklüğünün 2 den 4 kata kadar artacağıdır. Diğer bir deyişle bizim etkin yaklaşım yöntemimizin kullanılması ile bir planlama modelinin büyüklüğü, sabit köşelerle lineerleştirme şeklindeki geleneksel yaklaşıma göre dörtte bir oranında azalmaktadır.

Benzer sonuçlar bir 6 ıncı derece polinomu örneği ile ilgili olarak şekil 5a ve 5b ile Tablo 3a ve 3b de görülmektedir. Bu polinom 12 aylık bir dönemdeki bir satış hızı evrimi olarak düşünülebilir. Bir yaklaşım  $n=6$  segment tabanında gerçekleştirilmelidir. Tablo 3b den görülebileceği gibi 6 değişken segment yaklaşımı 11 veya 12 eşit uzunluk segmenti yaklaşımına eşdeğerdir. Sonuç olarak uyuşum kalitesi ile bir dinamik planlama modeli ölçek olarak 1/4 indirgenebilir.

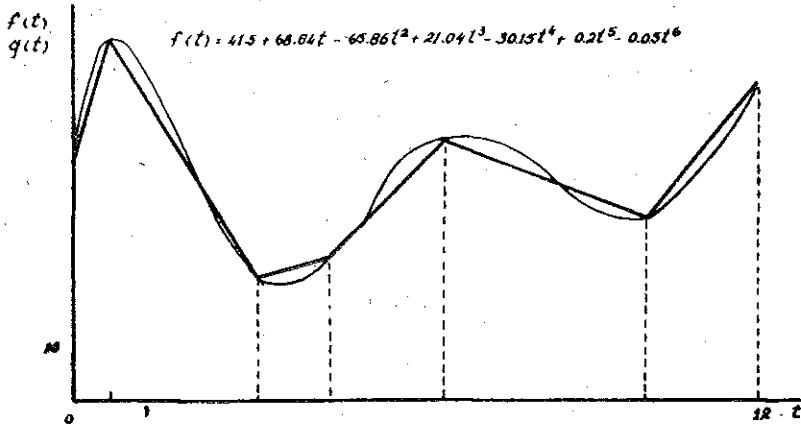


Şekil : 5a

$$f(t) = 41.5 + 68.64t - 65.86t^2 + 21.04t^3 - 3.015t^4 + 0.2t^5 - 0.005t^6; t \in [0, 12]$$

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7
Basamak Fonksiyonu								
$t_i$	0	1.68	2.39	5.24	8.41	11.03	12	183.05
$a_i$	—	57.78	40.88	25.00	42.14	34.47	49.39	
Spline Fonksiyonu								
$t_i$	0	0.65	3.20	4.50	6.50	10.00	12	61.60

Tablo : 3a



Sekil : 5b.

Eşuzaklıklı Segmentlerin sayısı $n$	6	8	9	10	11	12
Basamak Fonksiyonu						
$Z$	394.35		243.60	211.20	183.95	161.04
Spline Fonksiyonu						
$Z$	602.90	253.20	—	117.50	83.70	60.90

Tablo 3b

#### 4. FONKSİYON SİSTEMLERİNE YAKLAŞIM

##### 4.1. Homojen Tipte Yaklaşım Fonksiyonları

Özellikle zamana göre kademelenmiş planlama problemlerinde, bütün esas fonksiyonların yaklaşımlarının aynı anda belirlenmesi yani aynı segmentasyon şemasının uygulanması gerekmektedir.  $f_j(t)$  ( $j=1, \dots, m$ ), aşağıda verilen herhangi tipten bir parçalı-lineer fonksiyonla yaklaşılabilecek olan esas fonksiyonlar olsun.

$$g_f(t) = \sum_{i=1}^n g_{ij}(t) \prod_{j=1}^m \Delta_{ij}, \quad (4.1)$$

Burada karşı gelen  $H_{ij}$  segmentleri

$$H_{ij} = H_i \prod_{j=1}^m \Delta_{ij} \quad (4.2)$$

tanımları ile kısıtlanmış durumdadır. Özel olarak yaklaşım fonksiyonunun terimleri ;

$$g_{ij}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{ij}t_i - b_{ij}t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + \frac{b_{ij} - a_{ij}}{t_i - t_{i-1}} t, \quad t \in H_i \\ 0, \quad \text{Bunun dışında} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} n \\ \Delta_{i=1} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m \\ \Delta_{j=1} \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

olarak yazılabilir.

Bu formül, yukarıda incelenen süreksiz kırık çizgi şeklindeki genel hal IV için karşı gelen ifadedir. Daha önce yapıldığı gibi bu ifadeler, (3.6), (3.8) ve (3.10) daki  $a_j$  ve  $b_j$  için fazladan  $j$  indeksi kullanılarak I, II ve III durumlarına göre yeniden düzenlenebilir.

Bir yaklaşım fonksiyonunun ele alınan tipine ait bütün  $t_i$ ,  $a_{ij}$  ve  $b_{ij}$  parametrelerinin hesaplanabilmesi için aşağıdaki  $(f_1 - g_1, f_2 - g_2, \dots, f_m - g_m)$  in  $L_2^m$  normunun minimize edilmesi teoreminin çözümlenmesi gerekmektedir.<sup>5</sup> Bu;

5 :  $L_2$  normü;  $L_2^m(f_1 - g_1, \dots, f_m - g_m) := \sqrt{\sum_{j=1}^m [L_2(f_j - g_j)]^2}$  olarak verilmektedir. [6] ya bakınız.

$$\text{minimize } Z := \sum_{j=1}^m w_j \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} (g_{ij} - f_j)^2(t) dt \quad (= : \sum_{j=1}^m w_j Z_j). \quad (4.4)$$

ifadesine eşdeğerdir. Burada  $w_j$  ler  $0 < w_j < 1$  şeklindeki ağırlık katsayılarıdır. Bu keyfi seçilen katsayılar yardımı ile bazı yaklaşımlardan olan sapmalar vurgulanırken bazılarında olan sapmalar sönmümlendirilebilir. Bununla beraber bir çok durumda  $w_j$  ler bütün  $j$  ler için 1 olacaktır.

Minimizasyon probleminin çözümü aşağıdaki nonlinear denklem sisteminin çözümü ile elde edilir.

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{\partial Z}{\partial t_i} &= \sum_{j=1}^m w_j \frac{\partial Z_j}{\partial t_i} = 0 \quad \prod_{i=1}^{n-1} \\ (b) \quad \frac{\partial Z}{\partial a_{ij}} &= w_j \frac{\partial Z_j}{\partial a_{ij}} = 0 \quad \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \\ (c) \quad \frac{\partial Z}{\partial b_{ij}} &= w_j \frac{\partial Z_j}{\partial b_{ij}} = 0 \quad \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \end{aligned} \quad (4.5)$$

Burada  $\partial Z_j / \partial t_i$ ,  $\partial Z_j / \partial a_{ij}$ ,  $\partial Z_j / \partial b_{ij}$  kısmî türevleri (3.16) daki karşı gelen ifadeler yardımı ile verilmektedir.

$\partial Z_j / \partial t_i$  ve  $\partial Z_j / \partial b_{ij}$  kısmî türevleri yukarda tartışılan tek fonksiyonlu yaklaşımdaki karşı gelen kısmî türevler ile aynı özelliklere sahip olduklarından, bir eşalansal yaklaşıma ilişkin bu tür sonuçlar da benzer olarak geçerlidir.

Açık olarak söylenirse, bunun anlamı, basamak fonksiyonları ve süreksiz kırık çizgilerin eşalansal yaklaşıma yol açtıklarıdır. Birinci derece spline fonksiyonu genel olarak bir eşalansal yaklaşım sağlamıyacaktır. Süreksiz kırık çizgi durumunda ise bu üstünlük Lagrange çarpanları yöntemi yardımı ile zorunlanabilir.

Eşarahlı köşeler ile olan yaklaşımın en iyi olduğu özelliği,  $f_j(t)$  ana fonksiyonları ikinci derecede polinomlar ve yaklaşım fonksiyonları  $g_j(t)$  ler birinci dereceden spline fonksiyonları olarak seçildiği durumlarda da görülmektedir.

Bunu ispatlamak için;

$$\min_{t_1, \dots, t_{n-1}} \{Z\} = \min_{t_1, \dots, t_{n-1}} \left\{ \sum_{j=1}^m Z_j \right\} \geq \sum_{j=1}^m \min_{t_1, \dots, t_{n-1}} \{Z_j\}. \quad (4.6)$$

bağıntısını ele alalım. Bölüm (3.2) den bilinmektedir ki, tek bir fonksiyon için eşaralık yaklaşımı en iyisidir. Buna göre çok fonksiyonlu durumda eşaralık segmentasyon, bütün  $g_j(t)$  spline yaklaşım fonksiyonları için de, (4.6) bağıntısı dolayısı ile minimumdur.

#### 4.2. Heterojen Tipten Yaklaşım Fonksiyonları

Bu bölümde incelenen durum daha önce incelenenlerden farketmektedir. Burada yaklaşım fonksiyonları bölüm (3.1.) de verilen dört özel hal içinden keyfi olarak seçilebilmektedir. Buna göre bazı  $f_j(t)$  ler basamak fonksiyonları ile yaklaşımılırken, diğerleri spline fonksiyonları veya iki kırık çizgi tipinden biri ile yaklaşımılabilmektedir.

Çeşitli tipten yaklaşım fonksiyonlarını tanımlayan bütün parametreleri belirleyebilmek için önceki 4.1 bölümünde verilen yöntem burada kullanılabilir. Çeşitli tipten yaklaşım fonksiyonlarını ayırabilmek için  $j$  indeksi  $M$  indeks kümesinin bir elemanı olarak düşünülmektedir. Burada  $M$  kümesi,  $g_{ij}(t)$  fonksiyonlarının dört tipini belirleyen çeşitli ayrık alt kümelerden oluşmaktadır.  $M_B$  sürekli kırık çizgileri,  $M_S$  birinci derece spline fonksiyonlarını,  $M_T$  basamak fonksiyonlarını ve  $M_G$  süreksiz kırık çizgileri belirlemektedir. Buna göre  $M$ ;

$$M := M_B \cup M_S \cup M_T \cup M_G \quad (4.7)$$

olarak tanımlanır. En iyi yaklaşım aşağıdaki minizasyon probleminin çözümü ile elde edilir.

$$\text{minimize } Z := \sum_{j \in M_B} \sum_{j \in M_S} \sum_{j \in M_T} \sum_{j \in M_G} \sum_{i=1}^n \int_{H_i} (g_{ij} - f_j)^2(t) dt. \quad (4.8)$$

Şayet  $M_B^* \subseteq M_B$  indeks alt kümesi ile gösterilen bazı sürekli kırık çizgi yaklaşımları için, eşalsal yaklaşım istenirse aşağıda verilen  $L$  Lagrange fonksiyonunun minimize edilmesi gerekmektedir.

$$\text{minimize } L := Z - \sum_{j \in M_B^*} \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} \int_{H_i} (g_{ij} - f_j)(t) dt. \quad (4.9)$$

Amaç fonksiyonu (4.8) veya (4.9) un kısmî türevlerinin alınması ile, yaklaşım fonksiyonların bilinmeyen parametrelerinin elde edilmesi için gerekli olan nonlinear denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemleri daha önce incelenmiş olanların benzeridir. Açık olarak görülmektedir ki, heterojen tipten yaklaşım fonksiyonlarının uygulanması fazladan problemler doğurmamaktadır.

#### 4.3. Simultane Yaklaşımlar İçin Nümerik Örnekler

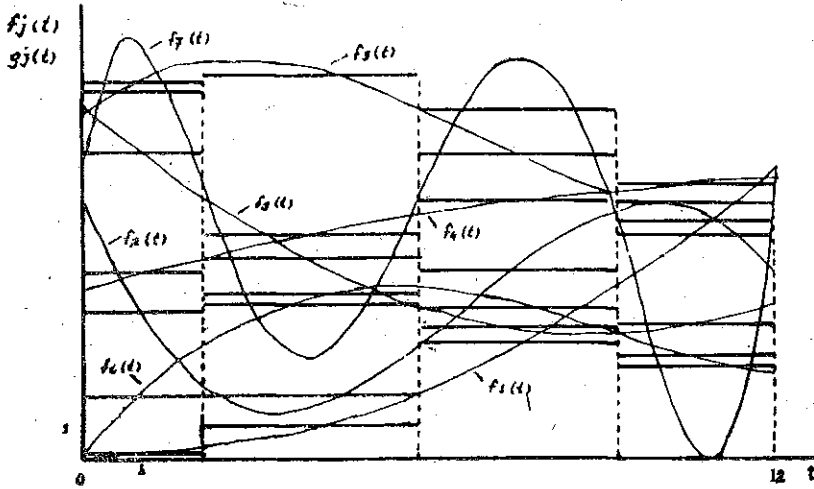
İki önemli örnek yaklaşım yönteminin etkinliğini belirleyecektir. Birinci örnek yedi adet ana fonksiyonuna aynı tipten yaklaşım fonksiyonları yani, yalnız basamak fonksiyonları veya yalnız spline fonksiyonları ile

yaklaşılmasını göstermektedir. İkinci örnek ise karma yaklaşımın bazı sonuçlarını ortaya koymaktadır.

Şekil 6a ve 6b sırası ile bu yedi polinomun ve bunlara karşı gelen yaklaşımların grafiklerini belirlemektedir. Bu yaklaşım probleminin nümerik sonuçları Tablo 4a da sergilenmektedir. Basamak fonksiyonları ile yaklaşım  $t_i$  köşelerinin ve  $a_{ij}$  adımlarının da hesaplanması gerekmektedir. Halbuki spline fonksiyonu durumunda bütün yaklaşım fonksiyonlarının tanımlanabilmesi için yalnızca segmentasyonun bilinmesi yeterli olmaktadır. Buna göre spline durumunda belirlenmesi gereken bilinmeyen üç adet iken basamak fonksiyon yaklaşımında 31 adet bilinmeyeni bulmak gerekmektedir.

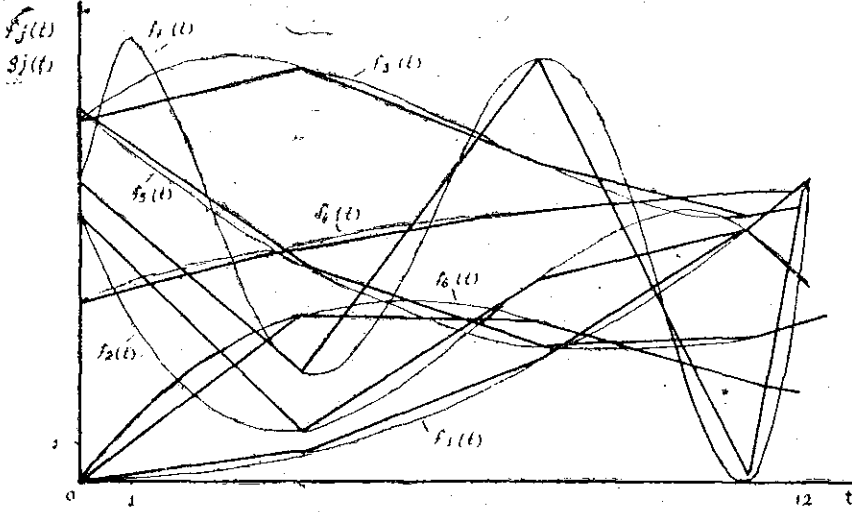
Bu yaklaşımın etkinliğini göstermek için Tablo 4b, kriter fonksiyonunun, yaklaşım aralığında eşaralıklı segmentasyon şartı altında, Z değerlerini vermektedir. Tablo 4a daki Z değerleri ile karşılaştırıldığında, Tablo 4b den görülmektedir ki bizim yaklaşımımızda  $n=4$  segment kullanarak elde edilen yaklaşımın kalitesine benzer bir yaklaşım elde edebilmek için  $n=6$  adet eşuzunlukta segment gerekmektedir.

Son nümerik örnek, dört farklı tipten yaklaşım fonksiyonlarının hepsinin kullanıldığı bir simultane yaklaşımın sonuçlarını vermektedir. Şekil 7 grafik çözümü göstermektedir. Tablo 5a yaklaşımın parametrelerini tanımlar.



Şekil : 6a

layan nümerik değerleri sergilemektedir. Bu durumda da Tablo 5b ile gösterilebileceği gibi eşarakh segmentasyonu ile, karşılaştırılabilir bir uyum kalitesi ancak segment sayısının  $n=5$  ten  $n=2$  ye çıkarmakla elde edilmektedir.



Şekil : 6b

## 5 — UYGULAMA DENEYİMLERİ

Yukarıda bahsedildiği gibi, uygulama deneyimleri, esas fonksiyonların keyfi dereceden polinomlar olduğu özel fonksiyon sınıflarına dayanmaktadır. Gerçekte elde edilen sonuçlar daha genel sınıftan sürekli fonksiyonlar için de geçerlidir. Polinom fonksiyonlar sınıfına kısıtlama yararlı olabilir. Problemin genel çözümü uygun bir yazılım (software) geliştirmek bu durumda daha kolay olmaktadır. Bir çok teknik program paketlerinde polinomlarla ilgili işlemler üzerine altprogramlar bulunmaktadır. Örneğin, bu tür fonksiyonların toplama, çıkarma, çarpımı ve bölmesi, integrasyonu ve türetilmesi ile ilgili altprogramlar bu çerçevede belirtilebilir Diğer taraftan ekonomik alanda birçok fonksiyon doğrudan polinom olarak verilmekte veya polinomlarla kolaylıkla yaklaşılabilecek biçimde olmaktadır. Buna göre bu yaklaşım tekniğini belirlemek için ana fonksiyon tipini polinom olarak seçmek faydalı ve uygun görülmektedir.

$$\begin{aligned}
 f_1(t) &= 0.0 + 0.07t^2 \\
 f_2(t) &= 9.0 - 5.0t + 1.0t^2 - 0.05t^3 \\
 f_3(t) &= 12.0 + 1.7t - 0.4t^2 + 0.02t^3 \\
 f_4(t) &= 6.0 + 0.56t - 0.02t^2 \\
 f_5(t) &= 12.5 - 1.8t + 0.1t^2 \\
 f_6(t) &= 0.0 + 2.6t - 0.34t^2 + 0.012t^3 \\
 f_7(t) &= 10.0 + 12.96t - 11.16t^2 + 2.88t^3 - 0.29t^4 + 0.01t^5
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \\ f_5(t) \\ f_6(t) \\ f_7(t) \end{aligned}} \right\} t \in [0, 12]$$

$i$	0	1	2	3	4	Z
<b>Adım Fonksiyonları</b>						
$t_i$	0	2.05	5.85	9.30	12.0	
$a_{i1}$	—	0.10	1.18	4.09	7.89	
$a_{i2}$	—	5.17	2.26	6.64	8.41	
$a_{i3}$	—	13.23	13.51	10.67	9.04	90.76
$a_{i4}$	—	6.55	7.88	9.07	9.68	
$a_{i5}$	—	10.80	7.07	4.70	4.73	
$a_{i6}$	—	2.21	5.47	5.33	3.65	
$a_{i7}$	—	12.89	5.73	12.28	3.23	
<b>Spline Fonksiyonları</b>						
$t_i$	0	3.66	7.81	11.04	12.0	83.3

Tablo : 4a

<b>Eşuzaklıklıklı Segmentlerin Sayısı <math>n</math></b>			
	4	5	6
<b>Basamak Fonksiyonları</b>			
Z	122.2	93.1	78.2
<b>Spline Fonksiyonları</b>			
Z	248.2	142.9	81.3

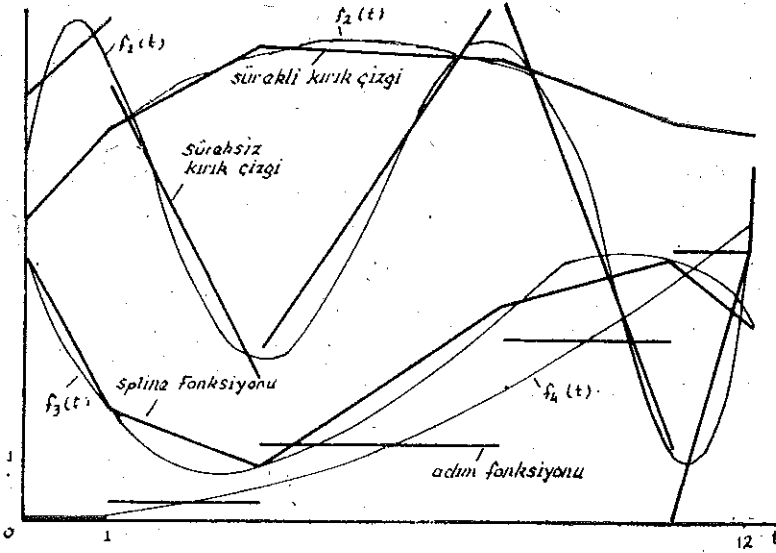
Tablo : 4b

Karmaşık nümerik işlemler nedeni ile sadece EDP nin kullanılması, kullanan için uygun bir yöntem olarak görülmektedir. Bir yazılım modülü, iki ana problem için çözüm sağlamalıdır : İlk olarak, esas ve yaklaşım fonksiyonlarının nonlineer denklem sistemlerini elde edebilecek şekilde cebrik dönüşümleri geliştirilebilmelidir. İkinci olarak bu dnklem sistemi nümerik

olarak çözülebilmelidir. Bu temel görevler yanında yazılım çeşitli opsiyonel çeşitlendirmeleri kapsayan girdi-çıkıtlı olanakların sağlamalıdır. Bizim programımız kullanıcı ile bilgisayar arasında bir etkileşim diyalogu sağlayacak şekilde geliştirildi. Bu temelde, kullanıcı yaklaşım yönteminin uyum kalitesi ve segment sayısı gibi belirli kritik değerlerini belirleme veya kolaylıkla değiştirebilme olanağına sahiptir.

Denklemler sisteminin geliştirilmesi hiç bir esas problem doğurmaz, bu mekanik olarak bilgisayar yardımı ile gerçekleştirilebilir. Esas gayretler, nonlinear denklem sisteminin, amaç fonksiyonunu mutlak minimum yapacak şekilde doğru nümerik çözümlerin bulunmasında gerekmektedir. Bir çok durumda bu denklemler çeşitli farklı çözümlere sahip olabilir. Objektif fonksiyonunun bunlara karşı gelen değerlerinin karşılaştırılması en minimumunun bulunmasını sağlar.

Nonlinear denklem sistemlerini çözmek için çok sayıda matematik yöntemler bulunmaktadır (5). Bizim programımızda kullanılmak üzere bir, düzenlenmiş ve geliştirilmiş Newton Yöntemi seçilmiştir. Bilindiği gibi bu yöntem yalnızca uygun başlangıç değerleri bulunabildiği durumlarda iyi sonuçlar vermektedir. Buna göre postule edilen minimum çözüme götüreceği başlangıç değerlerinin bulunması önem kazanmaktadır. Bu problemi aşmak için Monte Carlo Yöntemi ile bir hüristik stratejinin karışımı öneril-



Şekil : 7

mektedir. Bu teknik Newton yöntemi için tesadüfi başlangıç değeri takımları üreterek çalışmaktadır. Başlangıç değerleri, optimal değerler için geçerli bir aralıktan dikdörtgen dağılıma uygun olarak rasgele seçülmektedir. Diğer değişkenlerin başlangıç değerleri hüristik bir anlamda seçilmektedir.

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= 12.0 + 12.96t - 11.16t^2 + 2.88t^3 - 0.29t^4 + 0.01t^5 \\ f_2(t) &= 10.0 + 2.60t - 0.34t^2 + 0.012t^3 \\ f_3(t) &= 9.0 - 5.00t + 1.00t^2 - 0.05t^3 \\ f_4(t) &= 0.0 + 0.07t^2 \end{aligned} \right\} t \in [0, 12]$$

i	0	1	2	3	4	5	Z
<b>Spline Fonksiyonu</b>							
$(f_3(t)$ nin yak.)							
$t_i$	0	1.39	3.89	7.86	10.73	12.00	
<b>Süreksiz kırık çizgi</b>							
$(f_1(t)$ nin yak.)							
$a_{i1}$	—	14.25	14.48	4.65	17.56	0.06	15.93
$b_{i1}$	—	16.85	4.05	17.80	1.98	9.25	
<b>Sürekli kırık çizgi</b>							
$(f_2(t)$ nin yak.)							
$b_{i2}$	10.07	13.16	16.05	15.46	13.48	13.12	
<b>Basamak Fonksiyonu</b>							
$(f_4(t)$ nin yak.)							
$a_{i4}$	—	0.04	0.52	2.51	6.09	9.05	

Tablo : 5a

Eşuzaklıklık Segmentlerin Sayısı n	5	6	7
<b>Heterojen Yaklaşım</b>			
Z	31.95	18.65	11.55

Tablo : 5b

Başlangıç değerleri için daha iyi bir kalite elde edebilmek için sadece  $(t_1)$  köşeleri bir tesadüfi takım içinden seçilmektedir. Diğer  $(a_{ij}, b_{ij})$  değişkenlerinin başlangıç değerleri, tesadüfi olarak verilen  $t_1$  lere dayanarak hüristik bir teknikle hesaplanmaktadır.

Gerçekte, başlangıç değerlerinin tesadüfi seçilmiş kümesinin büyüklüğü ile minimum çözümü bulma ihtimali arasında belirli bir ilişki bulunduğu açık olduğu halde bu problem daha fazla tartışılmayacaktır. Burada uygulanan teknik pragmatik bir yaklaşımdır. İşlem 200 veya 500 lük tahmin kümeleri ile başlatılmaktadır. Şayet sonuçlar kriter fonksiyonunda, eşaralıklı bir segmentasyona oranla anlamlı bir azalmın henüz gerçekleşmediğini gösterirse, ya ilave tahminler üretilir veya elde bulunan en iyi sonuçlar kullanılarak hüristik denemeler yardımı ile devam edilir. Bir başlangıç değeri kümesi üretmek ve denklemlerin buna karşı gelen çözümünü bulmak için gerekli işlem zamanı (CPU-Zamanı) ortalama olarak 0.05 saniyeden daha az zaman aldığından Tablo 4 de verilen örnek durumunda, gerektiği takdirde örnek büyüklüğünü arttırmak problem olmamaktadır.

#### KAYNAKLAR :

- [1] K. Böhmer, Spline-Funktionen (B.G. Teubner, Stuttgart, 1974).
- [2] C. de Boor, Good Approximation by Splines with Variable Knots (Birkhäuser, Stuttgart, 1973) 57 - 72.
- [3] L. Collatz and W. Wetterleing, Optimierungsaufgaben (Springer-Verlag, Berlin, 1971) 116.
- [4] D.G. Handscomb, Characterization of Best Spline Approximation with Free Knots (Wiley, New York, 1970) Theorems 4, 6, 7 p. 66.
- [5] J.M. Ortega and W.C. Rheinboldt, Iterative Solution of Non-Linear Equations in Several Variables (Wiley, New York, 1970).
- [6] E. Pflaumann and H. Unger, Funktionalanalysis I, (Bibliographisches Institut Mannheim, 1968) 130.
- [7] D.B. Pressmar, Evolutorische und stationäre Modelle mit variablen Zeitintervallen zur simultanen Produktions-und Ablaufplanung, in: Proc. Operations Res. 3 (Würzburg-Wien, 1974) 462.
- [8] J.R. Rice, The Approximation of Functions, Vol. 1, (Addison-Wesley, Reading, MA, 1964) 121.
- [9] J.R. Rice, The Approximation of Functions, Vol. 2, (Addison-Wesley, Reading MA, 1969) Theorem 10-2, 134, 142.