HAVACILIK VE UZAY TEKNOLOJİLERİ DERGİSİ
OCAK 2011 CİLT 5 SAYI 1 (1-9)

DOĞRUSAL OLMAYAN OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ İÇİN TAŞINIR ALGORİTMİK FONKSİYONLAR YÖNTEMİ

Doç.Dr.Hv.Müh.Yb. Abdurrahman HACIOĞLU

Hava Harp Okulu Komutanlığı
Dekanlık Havacılık ve Uzay Mühendisliği Bölümü
34149, Yeşilyurt, İstanbul
hacioglu@hho.edu.tr

Geliş Tarihi: *27 Eylül 2010,* ***Kabul Tarihi:*** *20 Ocak 2011*

ÖZET

Bu çalışmada, sürekli gerçek sayılı fonksiyonların optimizasyon problemlerinin çözümüne yönelik olarak bir denklem önerilmiştir. Doğrudan analitik ya da sayısal çözümlere dönüşebildiği gibi, analitik veya sayısal yaklaşımla üretilebilecek yeni algoritma fonksiyonlarına da taşınabilen diferansiyel formdaki bu denklem, Taşınır Algoritmik Fonksiyonlar (TAF) Denklemi olarak isimlendirilmiştir. TAF denkleminin doğrusal olmayan sürekli fonksiyonlarla ifade edilen mühendislik problemlerine uygulanabilmesi mümkündür. Belirleyici (deterministik) olarak nitelendirilebilecek teknikler veren bu denklemle, olasılıksal (stochastic) yöntemlerde olduğu gibi istenirse türev bilgisi kullanmayan basit TAF yöntemleri tanımlanabilmektedir. Denklemin ve önerilen tekniklerin etkinliği uygulamalarla gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler*: Doğrusal Olmayan Optimizasyon, TAF Denklemi, TAF Yöntemleri.*

TRANSITIVE ALGORITHMIC FUNCTIONS METHOD FOR NONLINEAR OPTIMIZATION PROBLEMS

ABSTRACT

In this work, an equation is proposed to solve the general nonlinear continuous optimization problems. This equation can be used directly for obtaining analytical and numerical solutions. Since it can be transformed to some algorithmic functions through both analytically and numerically, this equation is named as the Transitive Algorithmic Functions (TAF) equation. The TAF equation can be applied to the optimization of general nonlinear continuous engineering problems. This equation presents alternative deterministic techniques and can define simple TAF algorithms which do not require derivative information as stochastic methods. Effectiveness of the equation and the proposed algorithms are demonstrated by their implementations.

Keywords: *Nonlinear Optimization, TAF Equation, TAF Algorithms.*

1. GİRİŞ

Aristo, insanların doğası gereği öğrenme arzusu içinde olduğunu söyler. Benzer şekilde, insanların tabiatı gereği optimizasyon yapmaya istekli olduğu da söylenebilir. Pek çok insan bir taraftan tasarruf yaparken, diğer taraftan da daha iyi koşullarda yaşamını sürdürmek ister. İş adamları en az riskle, en fazla kazancı elde etmenin peşindedir. Sanayiciler, tasarım ve üretim aşamalarında en yüksek verimle çalışılmasını arzu ederler. Subaylar, ellerindeki imkânları en etkin şekilde kullanacak biçimde harekât planlarını hazırlamanın yollarını; mühendisler ise tasarladıkları sistemlerin tasarım parametrelerini, performansı en iyi yapacak şekilde ayarlamanın çarelerini ararlar [1].

Optimizasyon süreçleri, matematik gerektiren çalışmalardır. Modern optimizasyon yöntemlerinin başlangıcı değişimler hesabına (calculus of variations) kadar dayanır. Değişimler hesabı ile ilgili genel çerçeveyi 18. yüzyılda ortaya koyan Lagrange'ın "Lagrange çarpanlar yöntemi" (Lagrangian Multipler rule) olarak bilinen meşhur metodu da günümüzde optimizasyon teorisinin ana konularından birini oluşturmaktadır [2]. İlk ve en basit optimizasyon yöntemlerinden olan "En Dik İniş, (EDİ)" (steepest descent) metoduna ait uygulamanın Cauchy tarafından ilk kez gösterildiği 19.yüzyıl ortalarından yirminci yüzyılın ortalarına kadar bu sahada çok az ilerleme kaydedilmiştir. Bu dönemden itibaren bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere paralel olarak çok hızlı işlemcilerin kullanılmaya başlanmasıyla optimizasyon konusundaki çalışmaların ve yeni uygulamaların miktarı da hızla artmıştır [3].

Sayısal optimizasyon yöntemlerini üç grupta toplamak mümkündür. Bunlar; belirleyici (deterministic), olasılıksal (stochastic) ve melez (hybrid) metotlardır. Belirleyici metotlar genel olarak Fermat teoreminden hareketle oluşturulan EDİ ve Newton metotları gibi gradyan işlemlerine dayalı yöntemlerdir. Bununla birlikte uygulama yapılacak problemin özelliklerine bağlı olarak kullanılabilecek simpleks metotları, doğrusal programlama gibi değişik yöntemler de geçtiğimiz yüzyıl içerisinde ortaya çıkmıştır. Olasılıksal metotlar ise, Genetik Algoritmalar, Karınca Kolonisi ve Tavlama Benzetimi gibi türev bilgisi gerektirmeyen, genellikle doğadan esinlenen yöntemlerdir. Melez optimizasyon teknikleri ise belirleyici ve olasılıksal yöntemlerin bir arada kullanıldığı metotlardır. Her yöntemin farklı üstünlükleri ve eksiklikleri olabilmekle birlikte, genel olarak belirleyici yöntemler genel optimumu daha hassas bir şekilde bulabildiği, olasılıksal yöntemler ise uygulama kolaylıkları nedeniyle tercih edilirler. Melez yöntemler ise bir araya getirdiği farklı metotların üstünlüklerinden istifade etmeyi amaçlar.

Dinamik sistemlerin kararlı denge noktalarının bulunması yaklaşımı ile doğrusal olmayan optimizasyon (doğrusal olmayan programlama) problemlerinin çözümü konusundaki teknikler de belirleyici yöntemlerden sayılmaktadır. Bu alandaki ilk çalışmalardan olan, doğrusal olmayan otonom sistemlerin kritik noktaları ile yerel optimumları ilişkilendiren Yamashita [4]'dan sonra konu ile ilgili araştırmalar giderek artmış ve son on yılda yoğunlaşarak özellikle gradyan sistem yaklaşımları ile dinamik sistemin takip edeceği yörüngeler yoluyla dinamik sistemin denge noktalarına (yerel optimumlara) ulaşılması üzerinde durulmuştur [5-11]. Söz konusu çalışmalarda, optimizasyonu yapılacak doğrusal olmayan fonksiyonun gradyanı kullanılarak birinci mertebeden adi diferansiyel denklem yardımıyla bir dinamik sistem tanımlanmakta ve bu dinamik sistemin denge noktaları, doğrusal olmayan fonksiyonun yerel optimumları olarak bulunmaktadır.

Diğer taraftan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem üzerine kurulmuş dinamik sistem yaklaşımı üzerine de araştırmalar yapılmıştır. Alvarez [12] ve arkadaşları [13] ile Goudou ve Munier [14] sönümleyici (dissipative) dinamik sistem özellikleri üzerinde durarak, gradyan çıkışlı (gradient projection) dinamik sistemin izleyebileceği yörüngeler yardımıyla denge haline ulaşılmasını araştırmışlardır.

Bu çalışmada, dinamik sistem anlayışına çok benzeyen yeni bir yaklaşım ve buna ait diferansiyel formda bir denklem önerilmiştir. Bu yaklaşımda, optimizasyonu yapılacak doğrusal olmayan bir fonksiyonda kullanılan parametreler, keyfi bir zaman gölgesindeki değişkenler gibi ele alınarak, bu parametrelerin keyfi zaman bölgesinde daimi (zamandan bağımsız) hale ulaştıkları değerler ile söz konusu fonksiyonun yerel optimumunu veren parametre değerlerinin aynı olacağı kabulü ile diferansiyel formda bir denklem tanımlanmıştır. Gerçek sayılı ve doğrusal olmayan fonksiyonlarla ilgili optimizasyon problemleri için kullanılabilecek olan bu denklem, birinci mertebeden uygulandığında gradyan sistemi yaklaşımı ile EDİ tekniklerine özdeş iterasyon bağıntıları verirken; ikinci mertebeden uygulandığında, daha etkin iterasyon bağıntıları vermektedir. Bu iterasyon bağıntılarına ait algoritmalar, Tavlama Benzetimi gibi olasılıksal yöntemlerdekine benzer bir mantıkla düzenlendiğinde uygulanmaları çok basit olmaktadır.

Önermesi yapılacak olan denklem, ikinci mertebeden sönümleyici dinamik sistem denkleminin formatındadır. Doğrudan analitik ya da sayısal çözümlere taşınabildiği gibi, analitik veya sayısal yaklaşımla üretilebilecek yeni algoritma fonksiyonlarına da dönüşebilen diferansiyel formdaki bu denklem; *Taşınır Algoritmik Fonksiyonlar* (TAF) denklemi olarak isimlendirilmiştir. Bu denklemin uygulamaları EDİ tekniklerinde olduğu gibi, klasik sayısal yöntemlerdeki iterasyon esasına dayansa da, literatürdeki pek çok yöntemden farklı olarak, istenirse fonksiyonların türev bilgilerini hiç kullanmadan, olasılıksal yöntemlerde olduğu gibi sadece fonksiyon değerlerini kullanarak çözüm yapma özelliğine de sahiptir. Takip eden bölümlerde bu denklemle ilgili önermeler ve çıkarımlar yapıldıktan sonra, analitik ve sayısal çözümlere örnekler verilecek; analitik ve sayısal yaklaşımlarla ortaya çıkan fonksiyonların tanımladığı yeni tekniklerin uygulamaları gösterilecektir. Birinci ve ikinci mertebe yaklaşımların etkinliği birbirleriyle karşılaştırılıp, ayrıca sıradan Genetik Algoritma sonuçlarıyla mukayese edilecektir.

2. TAŞINIR ALGORİTMİK FONKSİYONLAR (TAF) DENKLEMİ

***Önerme* 1:** $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x_i)$ sürekli, doğrusal olmayan bir fonksiyon; $x_i \in \mathbb{R}$, ancak keyfi bir zaman (t) bölgesinde zamana bağlı $x_i = x_i(t)$ olduğu kabul edilsin. $f(x_i)$ fonksiyonunun optimum olduğu noktalarından biri olan $x_i = x_i^*$, keyfi zaman bölgesinde $x_i(t)$'nin daimi hale geldiği bir değer olmak üzere x_i^* noktasında aşağıdaki denklem sağlanır:

$$A_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + B_i \frac{dx_i}{dt} + C_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (1)$$

Burada A_i, B_i ve C_i $(i = 1,..,n)$ sabit reel sayılardır.

***İspat* 1:** $f(x_i)$'nin optimum değerin bulunduğu ve $x_i(t)$'nin daimi olduğu $x_i = x_i^*$ noktasında yapılan kabul gereği $x_i(t)$ zamanla değişmediği (daimi) olduğu için zamana göre türevleri sıfır olacaktır. Bu nedenle $x_i(t)$'nin 1. ve 2. türevleri için

$$\frac{dx_i}{dt} = 0 \tag{2.a}$$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = 0 \tag{2.b}$$

eşitlikleri kolaylıkla yazılabilir. Diğer taraftan aynı $x_i = x_i^*$ noktasında $f(x_i)$'in bir optimumunun bulunduğu kabul edildiğinden,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i = x_i^*} = 0 \tag{2.c}$$

eşitliği geçerlidir. Yapılan kabullere göre $x_i = x_i^*$ noktasında geçerli olan (2.a), (2.b) ve (2.c) eşitliklerinin, A_i, B_i ve C_i katsayılarıyla çarpılıp toplanmasıyla denklem (1) elde edilir.

***Önerme* 2:** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x_i)$ sürekli, doğrusal olmayan bir fonksiyon; $x_i \in \mathbb{R}$, ancak keyfi bir zaman (t) bölgesinde zamana bağlı $x_i = x_i(t)$ olduğu kabul edilsin. Denklem (1)'deki $f(x_i)$; A_i, B_i ve C_i pozitif reel sayılar olmak üzere, zamanla azalan; eğer sadece $C_i < 0$ olursa, zamanla artan bir fonksiyon olacaktır.

***İspat* 2:** Denklem (1), $\frac{dx_i}{dt} = u$ için çözülürse, a_i integral sabiti olmak üzere;

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} = a_i e^{-\left(\frac{B_i}{A_i}\right)t} - C_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{3.a}$$

elde edilir. $f(x_i)$'in zamanla toplam değişimi;

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \tag{3.b}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $f = f(x_i(t))$ olduğu için $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ olduğu hatırda tutularak (3.a) denklemi (3.b) denkleminde kullanılırsa;

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a_i e^{-\left(\frac{B_i}{A_i}\right)t} - C_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \tag{3.c}$$

haline gelir. Daha açık yazılarak;

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} a_i e^{-\left(\frac{B_i}{A_i}\right)t} \right) - \sum_{i=1}^{n} C_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \tag{4}$$

ifadesi bulunur. Denklem (4), $t \gg$ için

$$\frac{df}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} C_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \le 0 \tag{5}$$

haline gelir ve t artarken $\frac{df}{dt} < 0$ olacağı sonucu kolaylıkla çıkartılabilir.

***Çıkarım*:** Denklem (1) keyfi zaman bölgesinde zamana bağlı olarak çözülerek, daimi hale karşılık gelen çözüm ile $f(x_i)$'in bir minimum noktası olan $x_i = x_i^*$ bulunabilir. En büyük değerlerin arandığı problemler için sadece $C_i < 0$ yapılması yeterlidir. Denklem (1)'in çözümü istenirse ve mümkünse analitik olarak yapılabileceği gibi, sayısal olarak da yapılabilir.

***İspat*:** Keyfi zaman bölgesinde daimi durumda $x_i = x_i^O$ olmak üzere bu nokta için $\frac{dx_i}{dt} = \frac{d^2x_i}{dt^2} = 0$'dir. Buradan denklem (1) vasıtasıyla $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ olacağından, $x_i = x_i^O$ noktasının $f(x_i)$ fonksiyonunun bir optimumunun bulunduğu $x_i = x_i^*$ noktası olacaktır. Dolayısıyla $x_i = x_i^O = x_i^*$ olduğundan (1) denkleminin çözümü daimi hal için $f(x_i)$ fonksiyonunun optimumunu verecektir.

Diğer taraftan $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ için

$$A_i \frac{d^2x_i}{dt^2} + B_i \frac{dx_i}{dt} = 0 \tag{6}$$

haline gelen (1) denkleminin $\frac{dx_i}{dt}$ için yapılan çözümüyle, a_i integral sabiti olmak üzere ortaya çıkan

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i e^{-\left(\frac{B_i}{A_i}\right)t} \tag{7}$$

denkleminin Lyapunov yaklaşımı yönünden asimptotik olarak kararlı olduğu Jordan ve Smith [15] tarafından gösterilmiştir. Dolayısıyla (1) denklemi x_i^* civarında başlayan değerler için asimptotik kararlı olduğundan tam denge noktası olan $\frac{dx_i}{dt} = 0$'a ulaşacak ve daimi hale gelecektir.

3. TAF DENKLEMİ İÇİN BASİT ÖRNEK ÇÖZÜMLER

Burada analitik ve sayısal olarak yapılan basit örnek çözümler, dinamik sistem yaklaşımıyla yapılan ve dinamik sistemin yörüngeleri ile ilgili uygulamalardakine benzerdir. Diğer taraftan, doğrudan analitik ve sayısal çözümlerin matematik kısıtlarla sınırlı olacağı, parametre sayısı arttıkça bu tür çözümlerin gittikçe zorlaşacağı açıktır.

Örnek 1: Basit Analitik Çözüm: $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ve $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x_i)=(a-x_1)^2+(b-x_2)^2$ fonksiyonunu en küçük yapan noktanın analitik çözüm ile bulunması için denklem (1) aşağıdaki gibi yazılır:

$$A_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+B_1\frac{dx_1}{dt}+C_1\frac{\partial f}{\partial x_1}=0 \qquad (8.a)$$

$$A_2\frac{d^2x_2}{dt^2}+B_2\frac{dx_2}{dt}+C_2\frac{\partial f}{\partial x_2}=0 \qquad (8.b)$$

Burada;

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=-2(a-x_1) \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial x_2}=-2(b-x_2)$$

yerlerine yazılarak ortaya çıkan ikinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi çözülürse;

$$r_{1,2}^i=\frac{-B_i\pm\sqrt{B_i^2+8A_iC_i}}{2A_i} \qquad (9)$$

olmak üzere,

$$x_1(t)=q_1^1e^{r_1^1t}+q_2^1e^{r_2^1t}+a \qquad (10.a)$$

$$x_2(t)=q_1^2e^{r_1^2t}+q_2^2e^{r_2^2t}+b \qquad (10.b)$$

çözümleri (q_i^1, q_i^2 sabit) elde edilir. Bu bağıntılar $A_iC_i>0$ $(r_{1,2}\le 0)$ olmak şartıyla artan t değerleri $(t \gg)$ için daimi hale geleceklerdir. Bu bağıntılardan elde edilecek

$$x_1(t\to\infty)=a \text{ ve } x_2(t\to\infty)=b$$

çözümleri $f(x_i)$ fonksiyonunu minimum yapan noktayı verir. Aynı problem istenirse birinci mertebeden yaklaşımla

$$B_1\frac{dx_1}{dt}+C_1\frac{\partial f}{\partial x_1}=0 \text{ ve } B_2\frac{dx_2}{dt}+C_2\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$$

bağıntılarıyla da çözülebilir. Bu durumda ise,

$$x_1=a-q_1e^{-2\frac{C_1}{B_1}t} \text{ ve } x_2=b-q_2e^{-2\frac{C_2}{B_2}t}$$

bağıntıları (q_i sabit) elde edilir. Bu bağıntılar da daimi burumda $x_1=a$ ve $x_2=b$ sonuçlarını verecektir.

Örnek 2: Basit Sayısal Çözüm: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ olmak üzere, en küçük değeri bulunmak istenen aşağıda verilen fonksiyonu ele alalım:

$$f(x_i)=(x_1-2x_2)^2+(x_2-4)^2$$

Bu fonksiyon için olan

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=-2(x_1-2x_2) \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial x_2}=-4(x_1-2x_2)+2(x_2-4)$$

ifadeleri denklem (1)'e taşınırsa;

$$A_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+B_1\frac{dx_1}{dt}-2C_1(x_1-2x_2)=0 \qquad (11.a)$$

$$A_2\frac{d^2x_2}{dt^2}+B_2\frac{dx_2}{dt} -4C_2\left[(x_1-2x_2)+2(x_2-4)\right]=0 \qquad (11.b)$$

şeklinde bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistem için değişik sayısal çözüm teknikleri uygulamak mümkündür. Burada basit sonlu farklar yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki sonlu farklar denklemleri yazılabilir:

$$A_1\frac{x_1^{n+1}-x_1^n+x_1^{n-1}}{(\Delta t)^2}+B_1\frac{x_1^{n+1}-x_1^{n-1}}{(2\Delta t)} -2C_1\left(x_1^{n+1}-2x_2^n\right)=0 \qquad (12.a)$$

$$A_2\frac{x_2^{n+1}-x_2^n+x_2^{n-1}}{(\Delta t)^2}+B_2\frac{x_2^{n+1}-x_2^{n-1}}{(2\Delta t)} -4C_2\left[\left(x_1^{n+1}-2x_2^{n+1}\right)+2\left(x_2^{n+1}-4\right)\right]=0 \qquad (12.b)$$

Bu denklemler çözüm için aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

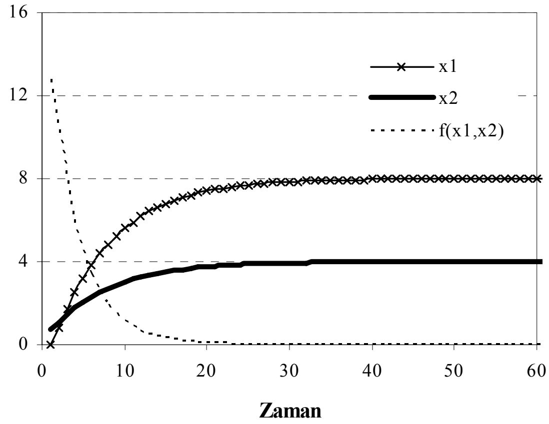
$$x_1^{n+1}=4C_1x_2^n+\frac{2A_1x_1^n}{(\Delta t)^2}+\left(\frac{B_1}{(2\Delta t)}-\frac{A_1}{(\Delta t)^2}\right)x_1^{n-1}$$

$$x_1^{n+1}=x_1^{n+1}/\left(\frac{A_1}{(\Delta t)^2}+\frac{B_1}{(2\Delta t)}+2C_1\right) \qquad (13.a)$$

$$x_2^{n+1}=4C_2\left(2+x_1^{n+1}\right)+\frac{2A_2x_2^n}{(\Delta t)^2}+\left(\frac{B_2}{(2\Delta t)}-\frac{A_2}{(\Delta t)^2}\right)x_2^{n-1}$$

$$x_2^{n+1}=x_2^{n+1}/\left(\frac{A_2}{(\Delta t)^2}+\frac{B_2}{(2\Delta t)}+10C_2\right) \qquad (13.b)$$

$A_i=B_i=C_i=1$, $\Delta t=1.0$ ve $x_i(0)=x_i(1)=0.0$ alınarak yapılan sayısal çözüme ait sonuçlar Şekil 1'de gösterilmiştir. Şekildeki grafiklerden de görüldüğü gibi x_1 ve x_2 değişkenleri, $x_1 = 8$ ve $x_2 = 4$ olacak şekilde $f(x_i)$'yi en küçük yapan değerlere yakınsamıştır.



Şekil 1. Basit sayısal çözümün sonuçları.

Sayısal çözüm, çözülecek denklemin matematik ifadesine bağlı olarak, sayısal çözüm tekniklerinin uygulanabildiği nispette mümkün olabilecektir.

4. TAF YÖNTEMLERİ

Doğrudan analitik ve sayısal çözümlerin sınırlı olması ve yapılan önerme gereği denklem (1)'in en yakın yerel optimuma ulaşacak olması nedeniyle, doğrudan tek adımlık çözümler yerine, tekrarlanan iteratif çözüm yollarının kullanılması gerekmektedir. Bu amaçla, denklem (1)'den analitik ve sayısal yaklaşımla üretilecek tek adımlık çözüm yapan bağıntıların, bir iterasyon mantığı içerisinde kullanılarak, tekrarlanan başlangıç noktaları için kullanımı, yerel optimumlardan genel optimumlara doğru ilerlemeyi sağlayacaktır. Denklem (1)'in integrasyonuyla analitik olarak ve sonlu farklar yaklaşımıyla sayısal olarak üretilen bağıntılar takip eden bölümde verilmiştir. Bu bağıntılarla tanımlanacak tekniklerin işleyişi ise Bölüm 5'de açıklanacaktır.

4.1 Birinci Mertebeden Analitik Algoritim (TAF-1m): Denklem (1), $A_i = 0$ için aşağıdaki gibi birinci mertebeden bir diferansiyel denklem haline gelir.

$$B_i \frac{dx_i}{dt} + C_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

Bu denklem 0'dan t'ye integre edilirse;

$$x_i(t) = x_i(0) - \frac{C_i}{B_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)t \qquad (14)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi (14) denklemi EDİ yöntemine çok benzer bir denklem vermiştir. Denklem (14)'ün uygulanmasında, belli bir başlangıç noktası $x_i(0)$ seçilerek işlemlere başlanacak ve belli bir yakınsama sağlandığında (ya da ıraksama durumunda) tekrar başlangıç yapılarak fonksiyon değeri azaltılmaya çalışılacaktır.

Uygulama kısmında bu bağıntının kullanıldığı algoritma TAF1-1m olarak isimlendirilecektir.

4.2 İkinci Mertebeden Analitik Algoritim (TAF1-2m): Denklem (1), $\frac{dx_i}{dt} = u_i$ alınarak yazılırsa;

$$A_i \frac{du_i}{dt} + B_i u_i + C_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

haline gelir. Bu denklemin integrasyonuyla;

$$x_i(t) = a_i\left(\frac{A_i}{B_i^2}\right)e^{-\left(\frac{B_i}{A_i}\right)t} - \left(\frac{C_i}{B_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}t + b_i \qquad (15)$$

elde edilecektir. Diğer taraftan $t = 0$ için $x_i(t) = x_i(0) = b_i - \frac{A_i}{B_i^2}b_i$ ve $t \gg$ için $x_i(t) = x_i^*$'de $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ kullanılarak a_i ve b_i çözülürse;

$$x_i(t) = x_i^* + \left(x_i^* - x_i(0)\right)e^{-\left(\frac{B_i}{A_i}\right)t} - \left(\frac{C_i}{B_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}t \qquad (16)$$

yazılabilir. Denklem (16) ile iterasyon yapabilmek için

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \left(x_i^k - x_i^0\right)e^{-\left(\frac{B_i}{A_i}\right)t} - \left(\frac{C_i}{B_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}t \qquad (17)$$

eşitliği kullanılabilir. Burada x_i^0 rasgele bir başlangıç noktası; x_i^k, t kadar zaman sonraki $x_i(t)$ (aslında x_i^*) için ilk tahmin değeri ve x_i^{k+1} hesaplanan yeni tahmin değeridir. Belli bir x_i^0 için tahmini x_i^k değeri ile iterasyon başlayacaktır. Algoritmanın işleyişi Bölüm 5'de açıklanmıştır. Türev değeri aşağıdaki gibi belirlenecektir:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x_i^k) - f(x_i^0)}{x_i^k - x_i^0}$$

Uygulama kısmında bu bağıntının kullanıldığı algoritma TAF-2m olarak isimlendirilecektir.

4.3 Türev/Fonksiyon Bilgisi Kullanmayan Analitik Algoritim (TAF1-2m0): Farklı bir yaklaşım olarak asıl ulaşılmak istenilen $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ sonucu denklem (17)'de kullanılırsa

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \left(x_i^k - x_i(0)\right)e^{-\left(\frac{B_i}{A_i}\right)t} \qquad (18)$$

elde edilir. Buna göre türev/fonksiyon değerini kullanmadan (18) denklemi ile iterasyon yapılabilir. Uygulama kısmında bu bağıntının kullanıldığı algoritma TAF1-2m0 olarak isimlendirilecektir.

4.4 Birinci Mertebeden Sayısal Algoritim (TAF2-1m): Denklem (1) için, $A_i = 0$ alınarak aşağıdaki sonlu farklar yaklaşımı yapılabilir:

$$B_i \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{\Delta t} = -C_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Bu denklemin düzenlenmesiyle, denklem (14) ile özdeş olan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{C_i}{B_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta t \qquad (19)$$

Uygulama kısmında bu bağıntının kullanıldığı algoritma TAF2-1m olarak isimlendirilecektir.

4.5 İkinci Mertebeden Sayısal Algoritim (TAF2-2m): Denklem (1) için aşağıdaki sonlu farklar yaklaşımı yapılabilir:

$$B_i \frac{x_i^{k+1} - 2x_i^k + x_i^{k-1}}{(\Delta t)^2} + B_i \frac{x_i^{k+1} - x_i^{k-1}}{2\Delta t} = -C_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Bu denklem x_i^{k+1} için düzenlenerek;

$$x_i^{k+1} = \left[\left(\frac{2A_i}{\Delta t^2}\right)x_i^k + \left(\frac{B_i}{2\Delta t} - \frac{A_i}{\Delta t^2}\right)x_i^{k-1} - C_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right] \qquad (20.a)$$

$$x_i^{k+1} = x_i^{k+1} / \left(\frac{A_i}{\Delta t^2} + \frac{B_i}{2\Delta t}\right) \qquad (20.b)$$

elde edilir. Bu denklemdeki $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ terimi için

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f\left(x_i^k\right) - f\left(x_i^{k-1}\right)}{x_i^k - x_i^{k-1}}$$

şeklindeki sonlu farklar yaklaşımı kullanılabilir. Burada x_i^{k-1}, başlangıçta x_i^0 noktası olacak ve her alt iterasyon çevriminde x_i^k değeriyle güncellenecektir. Algoritmanın işleyişi takip eden bölümde açıklanmıştır. Uygulama kısmında bu bağıntının kullanıldığı algoritma TAF2-2m olarak isimlendirilecektir.

5. TAF TEKNİKLERİNİN İŞLEYİŞİ

Önerilen algoritmaların işleyişine ait sözde program aşağıda verilmiştir:

1. $x0$ (başlangıç noktası) tanımla, $f(x0)$ hesapla
2. Tekrarla (izin verilen iterasyon sayısı kadar ya da tanımlanan fonksiyon değeri aşılıncaya dek)
   2.1 fmine olarak $f(x0)$'ı, xe olarak $x0$'ı sakla
   2.2 $x0$'dan rasgeleleştirmeyle x^k oluştur
3. Tekrarla (fonksiyon değeri azalmaya devam ederken ya da izin verilen alt iterasyon sayısı kadar)
   3.1 $f(x^k)$ hesapla
   3.2 Daha iyi olan fonksiyon değerini *fmin* ve *x* noktasını x^* olarak sakla
   3.3 $x0$ noktasını x^* noktası ile değiştir
   3.4 $f(x^k)$, *fmine*, x^k ve *xe* ile türev değerini hesapla
   3.5 x^{k+1} noktasını hesapla
   3.6 *xe* noktasını x^k ile değiştir
   3.7 x^k noktasını x^{k+1} noktası ile değiştir
   3.8 *fmine* değeri olarak $f(x^k)$ değerini ata.

Bu işleyişe göre başlangıçta çözüm bölgesi içerisinde rasgele bir nokta seçilir. Bu noktaya (*x0*) ait fonksiyon değeri ve nokta, eski en iyi değerler olarak (*fmine, xe*) saklanır ve ana iterasyon başlar. Başlangıç noktasının rasgele bir işlemle manipüle edilmesiyle alt iterasyon başlangıcındaki nokta (x^k) üretilir. Bu noktaya ait fonksiyon değeri hesaplanır ve daha önce hesaplanan en iyi değerden daha iyi ise, fonksiyon değeri *fmin* ve nokta *x0* olarak saklanır. $f(x^k)$ ve *fmine* ile x^k ve *xe* kullanılarak türev hesabı yapılır ve x^{k+1} (14), (17), (19) veya (20) bağıntılarından biriyle hesaplanır. Mevcut x^k noktası, *xe* noktasına; $f(x^k)$ değeri de *fmine* değerine atanır. Hesaplanan x^{k+1} noktası, x^k noktasına atanarak alt iterasyonun başlangıcına dönülür. Alt iterasyon için belirlenen koşulların aşılmasıyla ana iterasyonun başlangıcına dönülür. Ana iterasyon, o ana kadar bulunan en iyi nokta başlangıç yapılarak devam eder.

Açıklanan algoritma işleyişinden de anlaşılacağı gibi, fonksiyon değerlerini kullanarak işlemler ilerlemektedir. Denklem (18) kullanıldığında ise türev değerine gerek olmayacaktır. Ancak fonksiyon değerinin değişimini izlenebilmesi amacıyla fonksiyon hesaplarının yapılması gerektiği açıktır.

6. TAF YÖNTEMLERİNİN UYGULAMALARI

Önerilen algoritmaların test edilmesi için, benzer çalışmalarda sıkça kullanılan üç farklı fonksiyon seçilmiştir. Ayrıca gerçek bir mühendislik problemi olarak sıkıştırılamaz akış koşullarındaki tersten kanat profili tasarımı problemine uygulama yapılmıştır.

Test fonksiyonlarının Genetik Algoritma (GA) çözümleri için MATLAB 7.6.0 GA toolbox ilk (default) ayarlarıyla, 2500 çevrim (50000 fonksiyon hesabı) yapacak şekilde kullanılmıştır. GA ve önerilen TAF'lar ile beş farklı denemede, 50000 fonksiyon hesabı ile elde edilen en iyi fonksiyon değerleri, her uygulama için çizelgelerde ifade edilmiştir. Uygulamalarda $A_i = C_i = 1.0$ ve $B_i = 10.0$ alınmıştır.

6.1 Uygulama 1: Kaydırılmış Rastrigin (*KR*) fonksiyonu, orijinal Rastrigin fonksiyonunun $x_i = 0$ 'daki genel optimumunun xk kadar kaydırılmasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$f_{KR} = 10n + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(x_i - xk \right)^2 - 10\cos\left(2\pi \left(x_i - xk \right) \right) \right] \quad (21)$$

Burada $-5.12 \le x_i \le 5.12$ olup $xk = 0.5$ ve $n = 20$ alınacaktır. TAF1 ve TAF2 teknikleri için $t = 0.001$ ve $dt = 0.001$ alınmış ve her iterasyon için en fazla 10 alt çevrim öngörülmüştür. Sonuçlar Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1'deki veriler, ikinci mertebeden sayısal yaklaşımla önerilen ve denklem (20) ile ifade edilen TAF-2m tekniğinin 50000 fonksiyon hesabı sonunda diğer TAF yöntemleri ve GA'ya göre çok daha iyi (küçük) fonksiyon değerlerine ulaştığını göstermektedir. Aynı parametre değerleri için TAF1-1m ve TAF2-1m teknikleri bekleneceği gibi aynı sonuçları vermiştir. Ayrıca ikinci mertebeden TAF'ların birinci mertebelere göre daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Diğer taraftan, denklem (18) ile verilen, türev ya da fonksiyon bilgisi kullanmadan hesap yapan algoritmanın da (TAF1-2m0), beş denemenin üçünde kabul edilebilir bir başarı gösterdiği dikkat çekmektedir.

Çizelge 1. Kaydırılmış Rastrigin fonksiyonu için 50000 fonksiyon hesabı ile elde edilen en iyi fonksiyon değerleri.

GA	TAF1-2m	TAF1-2m0	TAF2-2m	TAF1-1m	TAF2-1m
6.91	0.334	7.23	0.0077	2.56	2.56
4.91	0.458	4.37	0.0125	5.87	5.87
6.11	1.3	61.2	0.0068	13.26	13.26
5.55	7.53	294.2	0.005	4.64	4.64
7.24	1.51	1.45	0.0029	5.96	5.96

6.2 Uygulama 2: Kaydırılmış Griewank (*KG*) Fonksiyonu da *KR* fonksiyonuna benzer şekilde orijinal fonksiyonunun $x_i = 0$ 'daki genel optimumunun xk kadar kaydırılmasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$f_{KG} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - xk \right)^2}{4000} - \prod_{i=1}^{n} \cos\left[\frac{\left(x_i - xk \right)}{\sqrt{i}} \right] + 1 \quad (22)$$

Burada $-600 \le x_i \le 600$ olup $xk = 1.0$ ve $n = 20$ alınacaktır. TAF1 ve TAF2 teknikleri için $t = 0.05$ ve $dt = 0.05$ alınmış ve her iterasyon için en fazla 10 alt çevrim öngörülmüştür. Sonuçlar Çizelge 2'de verilmiştir.

Çizelge 2. Kaydırılmış Griewank fonksiyonu için 50000 fonksiyon hesabı ile elde edilen en iyi fonksiyon değerleri.

GA	TAF1-2m	TAF1-2m0	TAF2-2m	TAF1-1m TAF2-1m
0.979	0.00034	0.0005	0.00026	0.0024
1.026	0.0003	0.0025	0.00071	0.0037
1.019	0.00038	0.5	0.00052	0.0015
1.051	0.0003	0.001	0.00075	0.004
1.032	0.0003	0.00033	0.00036	0.0019

Çizelge 2'deki veriler, uygulama 1'dekine benzer sonuçlar vermekle beraber, TAF yöntemlerinin buradaki performansının GA'ya nazaran daha yüksek olduğu görülmektedir.

6.3 Uygulama 3: Rosenbrock Fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$f_{Rosenbrock} = 100\sum_{i=1}^{n/2} \left[\left(x_{2i} - x_{2i-1}^2 \right)^2 + \left(1 - x_{2i-1} \right)^2 \right] \quad (23)$$

Burada $-2.4 \le x_i \le 2.4$ olup $n = 20$ alınacaktır. TAF1 ve TAF2 teknikleri için $t = 0.0001$ ve $dt = 0.0001$ alınmış ve her iterasyon için en fazla 10 alt çevrim öngörülmüştür. Sonuçlar Çizelge 3'de verilmiştir.

Çizelge 3. Rosenbrock fonksiyonu için 50000 fonksiyon hesabı ile elde edilen en iyi fonksiyon değerleri.

GA	TAF1-2m	TAF1-2m0	TAF2-2m	TAF1-1m TAF2-1m
7.98	6.6	4.21	0.336	5.02
3.23	1.25	0.392	4.91	5.67
9.05	5.94	0.538	3.89	6.33
2.52	4.64	5.93	0.35	5.7
5.07	6.36	0.347	0.276	5.06

Çizelge 3'deki veriler, önceki uygulama sonuçlarına paralel olmakla birlikte; TAF1-2m0 uygulamasının öncekilere göre daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

6.4 Uygulama 4: Gerçek bir mühendislik problemi olarak sıkıştırılamaz akış koşullarında NACA 4412 kanat profilinin, $\alpha = 5^\circ$ hücum açısındaki tersten kanat profili tasarımına uygulama yapılacaktır. Sıkıştırılamaz koşullardaki akış için, girdap panel yöntemi kullanılmış ve kanat profilleri Bezier eğrileri ile parametrize edilmiştir.

Tersten kanat profili problemi için amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$f = \int \left(Cp - Cp_t \right)^2 ds \quad (24)$$

Burada Cp_t ve Cp sırasıyla kanat profili yüzeyi (s) boyunca, hedeflenen ve hesaplanan basınç katsayısı dağılımlarıdır. Cp_t, NACA 4412 kanat profilinin, sıkıştırılamaz akış koşullarında, $\alpha = 5^\circ$ hücum açısındaki basınç katsayı dağılımıdır.

Burada başlangıç kanat profili olarak NACA 0012 kanat profili seçilmiştir. GA uygulamaları için [16] ve [17]'de açıklanmış olan sıradan (regular) bir GA ile Titreşimli GA (TGA) kullanılmıştır. GA ve önerilen TAF tekniklerinin 1500 fonksiyon hesabı ile ulaştıkları en iyi değerler karşılaştırılacaktır. Yapılan uygulamaya ilişkin sonuçlar Çizelge 4'te verilmiştir.

Çizelge 4. Tersten kanat profili tasarımı için 1500 fonksiyon hesabı ile elde edilen en iyi fonksiyon değerleri ($x10^{-6}$).

GA	TGA	TAF1-2m	TAF1-2m0	TAF2-2m	TAF1-1m TAF2-1m
9.52	10.2	5.58	32.2	4.01	5.65
13.6	7.77	2.54	14.6	2.0	3.85
15.3	3.5	6.53	19.9	2.06	3.03
4.52	2.56	9.28	13.4	2.47	4.79
5.7	1.58	7.91	25.9	6.66	8.74

Buradaki sonuçlar da test fonksiyonlarından elde edilenlere paraleldir. TAF2-2m tekniğinin diğerlerinden daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.

7. DEĞERLENDİRME VE SONUÇ

Bu çalışmada, doğrusal olmayan, sürekli fonksiyonlara ilişkin optimizasyon problemleri için TAF denklemi önerilmiş ve analitik ve sayısal yaklaşımlarla TAF denkleminden, uygulanması çok basit olan TAF yöntemleri üretilmiştir. TAF denkleminin doğrudan sayısal ve analitik çözümleri, sistem dinamiği yaklaşımıyla yapılmış literatürdeki diğer çalışmalarla benzer olup matematik kısıtlar nedeniyle sınırlı sayıdaki paremetre sayısı için uygulanma pratiği vardır. Bununla birlikte, birinci mertebeden yaklaşımla üretilen TAF1-1m ve TAF2-1m teknikleri ise EDİ teknikleriyle özdeş olan bir bağıntı kullanmaktadır. Diğer taraftan, İkinci mertebeden analitik ve sayısal yaklaşımla tanımlanan TAF1-2m ve TAF2-2m teknikleri birinci mertebeden olanlara göre daha etkin olduğu görülmektedir.

TAF yöntemlerinin en dikkat çekici özelliği uygulama basitliğidir. Fonksiyon değerlerini kullanan basit iteratif bir denklemle algoritmalar koşturulabilmekte; basitliği ile ön plana çıkan GA'lardaki seçim, çaprazlama, mutasyon gibi GA işlemlerini gerektirmemesi nedeniyle bunlardan daha kolay bir uygulama imkânı vermektedir. Ayrıca elde edilen sonuçlar bu tekniklerin, sıradan GA'lardan daha iyi sonuç verdiğini göstermektedir. Bununla birlikte, değişik optimizasyon problemlerine uygulanabilecek olan bu yöntemin, kısıtlamalı ve ayrık (discrete) problemlere uygulanabilirliği ve diğer optimizasyon teknikleriyle birleştirilerek etkinliğinin artırılması gelecek çalışmaların konusunu oluşturmaktadır.

8. KAYNAKLAR

[1] Nocedal, J. ve Wright, S. J., "Numerical Optimization", Springer, 2006.

[2] Dutta, J., "*Optimization Theory - A Modern face of Applied Mathematics*", Directions, Indian Institute of Technology Kanpur, no. 3, vol. 6, 2004.

[3] Rao, S.S., "Engineering Optimization: Theory and Practice, Fourth Edition", John Wiley and Sons, Inc., 2009.

[4] Yamashita, H., *A Differential Equation Approach to Nonlinear Programming*, Mathematical Programming, cilt 18, s.155-168, 1980.

[5] Absil, P.-A. ve Kurdyka, K., "*On the stable equilibrium points of gradient systems*", Systems & Control Letters, cilt 55, 2006.

[6] Wang, S., Yang, X.Q. ve Teo, K. L., "*A Unified Gradient Flow Approach to Constrained Nonlinear Optimization Problems*", Computational Optimization and Applications, cilt l. 25, no. 1-3, s.251-268, 2003.

[7] Masuda, K. ve Kurihara, K., "*Global Optimization by Equilibrium-Point Search of Gradient-Based Dynamical System*", Electronics and Communications in Japan, cilt 91, no. 1, s.19–31, 2008.

[8] Bolte, J., "*Continuous Gradient Projection Method in Hilbert Spaces*", Journal of Optimization Theory and Applications, cilt 119, no.2, s.235-259, 2003.

[9] Bian, W. ve Xue, X., "*A Dynamical Approach to Constrained Nonsmooth Convex Minimization Problem Coupling with Penalty Function Method in Hilbert Space*", Numerical Functional Analysis and Optimization, cilt 31, no. 11, s. 1221-1253, 2010.

[10] Ozdemir, N. ve Evirgen F., "*A Dynamic System Approach to Quadratic Programming Problems with Penalty Method*", Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, cilt 33, no. 1, s.79-91, 2010.

[11] Xie, X., "*L-BFGS and Delayed Dynamical Systems Approach for Unconstrained Optimization*", Postgraduate Research Symposium, Department of Computer Science, Hong Kong Baptist University, 2010.

[12] Alvarez, F, "*On the Minimizing Property of a Second Order Dissipative System in Hilbert Spaces*", SIAM Journal on Control and Optimization, cilt 38, no.4; s.1102-1119, 2000.

[13] Alvarez, F., Attouch, H., Bolte, J. Ve Redont, P., "*A Second-Order Gradient-Like Dissipative Dynamical System with Hessian-Driven Damping.: Application to Optimization and Mechanics*", Journal des Mathématiques Pures et Appliqués, cilt 81, no.8, s.747-779, 2002.

[14] Goudou, X. ve Munier, J., "*The Gradient and Heavy Ball with Friction Dynamical Systems: the Quasiconvex Case*", Mathematical Programming, cilt 116, no.1-2, s.173-191, 2009.

[15] Jordan, D.W., and Smith, P., "Nonlinear Ordinary Differential Equations", Oxford University Press, 2007.

[16] Hacıoğlu, A., ve Özkol, İ., "*Vibrational Genetic Algorithm As a New Concept in Airfoil*

Design", Aircraft Engineering and Aerospace Technology, cilt 3, no.3, s.228-236, 2002.

[17] Hacıoğlu, A., "Aerodinamik Dizayn ve Optimizasyonda Genetik Algoritma Kullanımı," Uçak Mühendisliği Programı Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Doç.Dr.Hv.Müh.Yb. Abdurrahman HACIOĞLU

Abdurrahman Hacıoğlu, İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi Uçak Mühendisliği bölümünden 1991 yılında mezun oldu. 1991-1995 yılları arasında Kayseri 2.HİBM K.lığında görev yaptı. 1995-1997 yılları arasında ODTÜ Havacılık Mühendisliğinde yüksek lisans eğitimini; 1998-2003 yılları arasında İTÜ Uçak Mühendisliği bölümündeki doktora eğitimini tamamladı. Akışkanlar Mekaniği, Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği, Genetik Algoritmalar, Aerodinamik Optimizasyon ve Paralel Mekanizmalar konuları ile ilgilenmektedir. Halen Yarbay rütbesinde olup Hava Harp Okulu Dekanlığı, Havacılık ve Uzay Mühendisliği Bölüm Başkanı olarak görev yapmaktadır.