Ekonometri ve İstatistik Sayı:2 2005 11-29

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
İKTİSAT FAKÜLTESİ
EKONOMETRİ VE İSTATİSTİK
DERGİSİ

İLERLEYEN TÜR TİP-II SAĞDAN SANSÜRLÜ ÖRNEKLEME DAYALI DÜZGÜN DAĞILIMIN PARAMETRELERİNİN JACKKNİFE TAHMİN EDİCİSİ

Dr. Coşkun Kuş *

Bu makale 15.02.2005 tarihinde alınmış hakem kontrolü sonrasında 06.06.2005 tarihinde düzeltilerek yayını uygun bulunmuştur.

Abstract

In this study, Jackknifed estimators are obtained for the parameters θ and β of the $Uniform(\beta,\theta)$ distribution based on progressively type-II right censored sample. Expected values and variances of jackknifed and non-jackknifed estimators are derived and compared. A numerical example is given for using of estimators.

Keywords:: Uniform distribution, progressive type-II right censoring, jackknifed estimator, order statistics.

Özet

Bu çalışmada, $Düzgün(\beta,\theta)$ dağılımın θ ve β parametrelerinin ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örnekleme dayalı jackknife tahmin edicileri elde edilmiştir. Jackknife ve jackknife uygulanmamış tahmin edicilerin beklenen değer ve varyansları türetilmiş ve karşılaştırılmıştır. Tahmin edicilerin kullanımı için nümerik bir örnek verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Düzgün dağılım, ilerleyen tür tip-II sağdan sansürleme, Jackknife tahmin edicisi, sıra istatistikleri.

* **Adres:** *Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, Tel:(332) 2231346*
E-Mail: *coskun@selcuk.edu.tr*

İLERLEYEN TÜR TİP-II SAĞDAN SANSÜRLÜ ÖRNEKLEME DAYALI DÜZGÜN DAĞILIMIN PARAMETRELERİNİN JACKKNİFE TAHMİN EDİCİSİ

1. GİRİŞ

X rasgele değişkeni, (β,θ) aralığında düzgün dağılıma sahip ise, sırasıyla, olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonu

$$f(x)=(\theta-\beta)^{-1}\,,\ \ \beta<x<\theta \tag{1}$$

$$F(x)=(x-\beta)(\theta-\beta)^{-1}\,,\ \ \beta<x<\theta \tag{2}$$

biçimindedir. Beklenen değer ve varyansı, sırasıyla,

$$E(X)=(\beta+\theta)2^{-1}$$

$$Var(X)=(\theta-\beta)^{2}12^{-1}$$

şeklindedir. Düzgün dağılım için $Düzgün(\beta,\theta)$ gösterimi kullanılacaktır.

Düzgün dağılım, pek çok fiziksel, biyolojik ve sosyal olayın matematiksel modellerinin inşasında kullanılır (Sheppard, 1907; Allan, 1966; Johnson ve Kotz, 1970). Gupta ve Sobel (1958) Düzgün dağılım teorisi altında yaşam testlerine ilişkin sonuçlar elde etmişlerdir. Ayrıca Pearson (1938), Durbin (1961) ve Stephens (1966) olasılık integral dönüşümünü dolayısıyla düzgün dağılımı kullanarak istatistiksel testler geliştirmişlerdir (Fisher, 1932). Düzgün dağılım için istatistiksel teorinin kolay geliştirilebilmesi ve istatistikte çok önemli yeri olan olasılık integral dönüşümünün bu dağılımla bağlantılı olması bakımından Düzgün dağılımın parametreleri hakkında istatistiksel sonuç çıkarımı yapılması istatistik teorisi açısından önemlidir.

Makalenin ikinci ve üçüncü bölümünde çalışmada kullanılacak olan sıra istatistikleri ve ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü sıra istatistikleri hakkında farklı yazarlar tarafından elde edilmiş sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölümde, düzgün dağılımın parametreleri için tahmin ediciler önerilmiş ve bu tahmin edicilere dayalı jackknife tahmin edicileri türetilmiştir. Daha sonra bahsedilen tahmin edicilerin beklenen değerleri ve varyansları elde edilmiştir. Beşinci bölümde, dördüncü bölümde elde edilen beklenen değer ve varyanslar karşılaştırılmış ve sonuçlardan bahsedilmiştir. Altıncı bölümde ise tahmin edicilerin kullanımı için nümerik bir uygulama verilmiştir.

2. SIRA İSTATİSTİKLERİ

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip örnekleminin, $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ olacak biçimde küçükten büyüğe dizilmesiyle elde edilen her bir $X_{i:n}$ rasgele değişkenine i. sıra istatistiği denir.

X_i' ler $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ olacak biçimde sürekli rasgele değişkenler ise $r = 1,2,\ldots,n$ için r. sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \frac{1}{\mathrm{B}(r, n-r+1)} \frac{d}{dx} \int_0^{F(x)} t^{r-1}(1-t)^{n-r}\, dt \\ &= \frac{1}{\mathrm{B}(r, n-r+1)} \left(F(x)\right)^{r-1} \left(1 - F(x)\right)^{n-r} f(x) \qquad (3) \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada

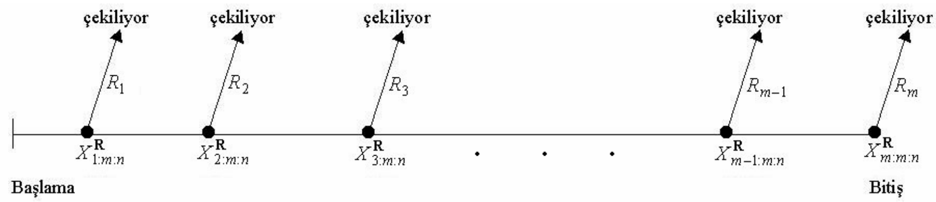
$$\mathrm{B}(r, n-r+1) = (n!)^{-1}(r-1)!(n-r)!$$

beta fonksiyonudur (David, 1970).

3. İLERLEYEN TÜR TİP-II SAĞDAN SANSÜRLÜ ÖRNEKLEM

İlerleyen tür tip-II sağdan sansürlenmiş model (Progressive type-II right censoring model) şu şekilde tanımlanmaktadır:

n sayıda özdeş bileşenin bir sistemde yaşam testine tabi tutulduğu düşünülsün. Sistemde meydana gelen *1.* bozulma ile R_1 sayıda bileşenin sistemden çekildiğini daha sonra geriye kalan $n - R_1 - 1$ bileşenden, *2.* bozulma ile R_2 sayıda bileşenin sistemden çekildiğini ve böylece m. bozulma ile R_m sayıda bileşenin sistemden çekilmesiyle m bileşenin bozulma zamanı gözlenir. Bu şekilde elde edilen m hacimli örnekleme *ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem* denir. Burada $n = m + \sum_{i=1}^{m} R_i$ biçimindedir ve $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansür şeması olarak adlandırılır (Balakrishnan ve Aggarwala, 2000).



Şekil 1. İlerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem plânı

$X_{1:m:n}^{\mathbf{R}} < X_{2:m:n}^{\mathbf{R}} < \cdots < X_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$, olasılık yoğunluk fonksiyonu f ve dağılım fonksiyonu F olan dağılımdan alınan ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olmak üzere $X_{1:m:n}^{\mathbf{R}}, X_{2:m:n}^{\mathbf{R}}, \ldots, X_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$ nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_{1:m:n}^{\mathbf{R}}, X_{2:m:n}^{\mathbf{R}}, \ldots, X_{m:m:n}^{\mathbf{R}}}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

$$= c \prod_{i=1}^{m} f(x_i)[1 - F(x_i)]^{R_i} \quad , -\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < \infty \tag{4}$$

şeklindedir. Burada

$$c = n(n - R_1 - 1) \times \cdots \times (n - R_1 - R_2 - \cdots - R_{m-1} - m + 1)$$

biçimindedir. (4)'de $\mathbf{R} = (0, \ldots, 0)$ alınırsa bilinen sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $\mathbf{R} = (0, \ldots, n - m)$ alınırsa tip-II sağdan sansürlü sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir (Balakrishnan ve Aggarwala, 2000).

İlerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örnekleme, yaşam zamanı analizlerinde veri elde etmede önemli bir yöntemdir. Çalışan parça diğer bir test için sistemden çekilip, deneyin maliyeti ve deney süresi azaltılabilir (Balakrishnan ve Aggarwala, 2000). Düzgün dağılımdan alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem ile ilgili Aggarwala ve Balakrishnan'a (1998) ve Balakrishnan ve Aggarwala'ya (2000) bakılabilir.

$f(x)$ ve $F(x)$, mutlak sürekli X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonu, a_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ ve

$$c_{i,r}(a_1, a_2, \ldots, a_r) = (-1)^i \left\{ \prod_{j=1}^{i} \sum_{k=r-i+1}^{r-i+j} (a_k) \prod_{j=1}^{r-i} \sum_{k=j}^{r-i} (a_k) \right\}^{-1} \tag{5}$$

olmak üzere, $r \geq 1$ için, $X_{r:m:n}^{\mathbf{R}}$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X_{r:m:n}^{\mathrm{R}}}(x_r) = c' \sum_{i=0}^{r-1} c_{i,r-1}(R_1 + 1, \ldots, R_{r-1} + 1) f(x_r) \{1 - F(x_r)\}^{R_i'' - 1} \quad , \ -\infty < x_r < \infty \tag{6}$$

şeklindedir. Burada

$$c' = n(n - R_1 - 1) \times \cdots \times (n - R_1 - R_2 - \cdots - R_{r-1} - r + 1), \tag{7}$$

$$R_r^* = n - r - R_1 - \cdots - R_{r-1}$$

ve

$$R_i'' = \left(R_r^* + 1\right) + \sum_{j=r-i}^{r-1}\left(R_j + 1\right)$$

biçimindedir (Balakrishnan ve ark., 2002). $1 \le r < s \le m$ için, $X_{r:m:n}^{\mathbf{R}}$ ve $X_{s:m:n}^{\mathbf{R}}$ rasgele değişkeninin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_{X_{r:m:n}^{\mathbf{R}}, X_{s:m:n}^{\mathbf{R}}}\left(x_r, x_s\right) &= c' \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{s-r-1} c_{i,r-1}\left(R_1 + 1, \ldots, R_{r-1} + 1\right) c_{k,s-r-1}\left(R_{r+1}, \ldots, R_{s-1}\right) \\ &\times f\left(x_r\right)\left\{1 - F\left(x_r\right)\right\}^{R_{ik}' - 1} f\left(x_s\right)\left\{1 - F\left(x_s\right)\right\}^{R_k'' - 1}, \quad -\infty < x_r < x_s < \infty \end{aligned} \tag{8}$$

şeklinde olup burada

$$R_{ik}' = \sum_{j=r-i}^{s-1-k}\left(R_j + 1\right), \quad R_r^* = n - r - R_1 - \cdots - R_{r-1}$$

ve

$$R_k'' = \left(R_r^* + 1\right) + \sum_{j=r-k}^{r-1}\left(R_j + 1\right)$$

biçimindedir (Balakrishnan ve ark., 2002). İlerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem hakkında daha ayrıntılı bilgi için Balakrishnan ve Aggarwala'ya (2000) bakılabilir.

4. JACKKNİFE TAHMİN EDİCİSİ

Jackknife yanlı tahmin edicilerin yanlarını azaltmak için kullanılan genel bir tekniktir (Quenouille, 1956). Bu teknik şu şekilde tanımlanmaktadır: Tüm gözlemler üzerinde yapılan parametre tahmini sonucu elde edilen klasik tahmin ediciler $\hat{\theta}$ ve $\hat{\beta}$ olsun. Jackknife yönteminde m gözlemden oluşan örneklemden yerine koymama koşuluyla (iadesiz olarak) $m-1$ hacimlik örnek çekilmesi yapılmakta yani, m hacimlik örneklemde sırasıyla her bir gözlem değeri çıkartılarak geriye kalan $m-1$ hacimlik Jackknife örneği oluşturulmaktadır (Fox ve ark., 1980; Casella ve Berger, 1990; Genç, 1999). i. ($i = 1,2,\ldots,m$) gözlem değeri atılarak elde edilen klasik tahmin ediciler $\hat{\theta}_{(i)}$ ve $\hat{\beta}_{(i)}$ ile gösterilsin. O zaman

$$\hat{\theta}_{*i} = m\hat{\theta} - (m-1)\hat{\theta}_{(i)}, i = 1,2,\ldots,m$$

$$\hat{\beta}_{*i} = m\hat{\beta} - (m-1)\hat{\beta}_{(i)}, i = 1,2,\ldots,m$$

olmak üzere bilinmeyen parametrelerin Jackknife tahmin edicileri, sırasıyla, aşağıdaki gibidir (Miller, 1974).

$$\theta^* = \frac{1}{m}\left\{\hat{\theta}_{*1} + \hat{\theta}_{*2} + \cdots + \hat{\theta}_{*m}\right\}$$

$$\beta^{*} = \frac{1}{m}\left\{\hat{\beta}_{*1} + \hat{\beta}_{*2} + \cdots + \hat{\beta}_{*m}\right\}$$

Jackknife tahmin edicileri ve özellikleri hakkında geniş bilgi için Miller'e (1974) bakılabilir.

$X_{1:m:n}^{\mathbf{R}} < X_{2:m:n}^{\mathbf{R}} < \cdots < X_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$, $Düzgün(\beta,\theta)$ dağılımdan alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olsun ve $\hat{\beta} = X_{1:m:n}^{\mathbf{R}}$, $T = X_{2:m:n}^{\mathbf{R}}$, $\hat{\theta} = X_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$ ve $N = X_{m-1:m:n}^{\mathbf{R}}$ istatistiklerini göz önüne alınsın. Parametrelerin β^{*} ve θ^{*} jackknife tahmin edicilerinin beklenen değer ve varyansı elde etmek için $\hat{\beta}, T, \hat{\theta}$ ve N rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarına, beklenen değerlerine, varyanslarına ve kovaryanslarına ihtiyaç duyulmaktadır.

(1), (2) ve (3) kullanılarak $\hat{\beta}$'nın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_{\hat{\beta}}(x) = n\frac{1}{\theta-\beta}\left(1-\frac{x-\beta}{\theta-\beta}\right)^{n-1}, \beta < x < \theta \tag{9}$$

(9) kullanılarak $\hat{\beta}$ tahmin edicisinin beklenen değeri

$$E(\hat{\beta}) = \int_{\beta}^{\theta} x f_{\hat{\beta}}(x)dx = \frac{\theta + n\beta}{n+1} \tag{10}$$

ikinci momenti,

$$E(\hat{\beta}^2) = \int_{\beta}^{\theta} x^2 f_{\hat{\beta}}(x)dx = \frac{2\theta^2 + 2n\beta\theta + n^2\beta^2 + n\beta^2}{(n+1)(n+2)} \tag{11}$$

şeklinde bulunur. $Var(\hat{\beta})$, (10) ve (11)'den elde edilebilir.

(1), (2) ve (6) kullanılarak T istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_T(x) = \frac{1}{\theta-\beta}c'\sum_{i=0}^{1}\frac{c_{i,1}(R_1+1)}{R_i''}\left\{1-\frac{x-\beta}{\theta-\beta}\right\}^{R_i''-1}, \beta < x < \theta \tag{12}$$

(12) kullanılarak T istatistiğinin beklenen değeri

$$E(T) = \int_{\beta}^{\theta} x f_T(x)dx = c'\sum_{i=0}^{1}\frac{c_{i,1}(R_1+1)}{R_i''}\left\{\frac{\theta + R_i''\beta}{R_i''+1}\right\} \tag{13}$$

ikinci momenti ise

$$E\left(T^2\right)=\int_{\beta}^{\theta} x^2 f_T(x)dx = c'\sum_{i=0}^{1}\frac{c_{i,1}\left(R_1+1\right)}{R_i''}\left\{\frac{2\theta^2+2R_i''\beta\theta+\left(R_i''\right)^2\beta^2+R_i''\beta^2}{\left(R_i''+1\right)\left(R_i''+2\right)}\right\} \tag{14}$$

şeklinde bulunur. $Var(T)$, (13) ve (14)'den elde edilebilir.

(1), (2) ve (6) kullanılarak $\hat{\theta}$'nın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_{\hat{\theta}}(x)=\frac{1}{\theta-\beta}c'\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_{i,m-1}\left(R_1+1,\ldots,R_{m-1}+1\right)}{R_i''}\left\{1-\frac{x-\beta}{\theta-\beta}\right\}^{R_i''-1}, \beta<x<\theta \tag{15}$$

(15)' den $\hat{\theta}$ tahmin edicisinin beklenen değeri

$$E\left(\hat{\theta}\right)=\int_{\beta}^{\theta} x f_{\hat{\theta}}(x)dx = c'\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_{i,m-1}\left(R_1+1,\ldots,R_{m-1}+1\right)}{R_i''}\left\{\frac{\theta+R_i''\beta}{R_i''+1}\right\} \tag{16}$$

$\hat{\theta}$ tahmin edicisinin ikinci momenti

$$E\left(\hat{\theta}^2\right)=\int_{\beta}^{\theta} x^2 f_{\hat{\theta}}(x)dx$$

$$=c'\sum_{i=0}^{m-1}\frac{c_{i,m-1}\left(R_1+1,\ldots,R_{m-1}+1\right)}{R_i''}\left\{\frac{2\theta^2+2R_i''\beta\theta+\left(R_i''\right)^2\beta^2+R_i''\beta^2}{\left(R_i''+1\right)\left(R_i''+2\right)}\right\} \tag{17}$$

olarak bulunur. $Var\left(\hat{\theta}\right)$, (16) ve (17)'den elde edilebilir.

(1), (2) ve (6) kullanılarak N 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_N(x)=\frac{1}{\theta-\beta}c'\sum_{i=0}^{m-2}\frac{c_{i,m-2}\left(R_1+1,\ldots,R_{m-2}+1\right)}{R_i''}\left\{1-\frac{x-\beta}{\theta-\beta}\right\}^{R_i''-1}, \beta<x<\theta \tag{18}$$

(18)'den N istatistiğinin beklenen değeri aşağıdaki gibidir.

$$E(N)=\int_{\beta}^{\theta} x f_N(x)dx = c'\sum_{i=0}^{m-2}\frac{c_{i,m-1}\left(R_1+1,\ldots,R_{m-1}+1\right)}{R_i''}\left\{\frac{\theta+R''\beta}{R''+1}\right\} \tag{19}$$

N tahmin edicisinin ikinci momenti ise

$$E\left(N^2\right)=\int_{\beta}^{\theta} x^2 f_N(x)dx$$

$$= c'\sum_{i=0}^{m-2} \frac{c_{i,m-1}(R_1+1,\ldots,R_{m-1}+1)}{R''_i}\left\{\frac{2\theta^2 + 2R''_i\beta\theta + (R''_i)^2\beta^2 + R''_i\beta^2}{(R''_i+1)(R''_i+2)}\right\} \tag{20}$$

şeklindedir. $Var(N)$, (19) ve (20)'den elde edilebilir.

Lemma 1. *$X^{\mathbf{R}}_{1:m:n} < X^{\mathbf{R}}_{2:m:n} < \cdots < X^{\mathbf{R}}_{m:m:n}$, Düzgün$(\beta,\theta)$ dağılımdan alınmış ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü sıra istatistikleri olsun. $X^{\mathbf{R}}_{r:m:n}$ ile $X^{\mathbf{R}}_{s:m:n}$'in çarpımsal momenti (product moment)*

$$\begin{aligned}
E\left(X^{\mathbf{R}}_{r:m:n}X^{\mathbf{R}}_{s:m:n}\right) &= c'\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-r-1} c_{i,r-1}(R_1+1,\ldots,R_{r-1}+1)c_{k,s-r-1}(R_{r+1},\ldots,R_{s-1}) \\
&\times \frac{(R'_{ik}+3R''_k+2)(\theta-\beta)^{R'_{ik}+R''}\theta^2}{R''_k(1+R''_k)(R'_{ik}+R''_k+2)(R'_{ik}+R''_k+1)((R'_{ik}+R''_k))}(\theta-\beta)^{R'_{ik}+R''} \\
&\times \left\{(R'_{ik}+3R''_k+2)\theta^2 + \left[(R'_{ik})^2 + 2R''_k + 2R'_{ik} + 3(R''_k)^2\right]\theta\beta\right. \\
&\left. + \left[R''_k(R'_{ik})^2 + 2(R''_k)^2R'_{ik} + R'_{ik}R''_k + (R''_k)^2 + (R''_k)^3\right]\beta^2\right\}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$R'_{ik} = \sum\nolimits_{j=r-i}^{s-1-k}(R_j+1)$$

$$R^*_r = n - r - R_1 - \cdots - R_{r-1}$$

ve

$$R''_k = (R^*_r+1) + \sum\nolimits_{j=r-k}^{r-1}(R_j+1)$$

biçimindedir.

İspat. (8)'den aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned}
E\left(X^{\mathbf{R}}_{r:m:n}X^{\mathbf{R}}_{s:m:n}\right) &= c'\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-r-1} c_{i,r-1}(R_1+1,\ldots,R_{r-1}+1)c_{k,s-r-1}(R_{r+1},\ldots,R_{s-1}) \\
&\times \int_\beta^\theta\int_\beta^{x_s} x_r x_s \frac{1}{\theta-\beta}\left(1-\frac{x_r-\beta}{\theta-\beta}\right)^{R'_{ik}-1}\frac{1}{\theta-\beta}\left(1-\frac{x_s-\beta}{\theta-\beta}\right)^{R''_k-1}dx_r dx_s \\
&= c'\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-r-1} c_{i,r-1}(R_1+1,\ldots,R_{r-1}+1)c_{k,s-r-1}(R_{r+1},\ldots,R_{s-1}) \\
&\times \frac{1}{(\theta-\beta)^{R'_{ik}+R''_k}}\int_\beta^\theta\int_\beta^{x_s} x_r x_s(\theta-x_r)^{R'_{ik}-1}(\theta-x_s)^{R''_k-1}dx_r dx_s
\end{aligned} \tag{21}$$

(21)' deki integral alınıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$E\left(X^{\mathbf{R}}_{r:m:n}X^{\mathbf{R}}_{r:m:n}\right)=c'\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-r-1}c_{i,r-1}\left(R_1+1,\ldots,R_{r-1}+1\right)c_{k,s-r-1}\left(R_{r+1},\ldots,R_{s-1}\right)$$
$$\times\frac{\left(R'_{ik}+3R''_k+2\right)\left(\theta-\beta\right)^{R'_{ik}+R''}\theta^2}{R''_k\left(1+R''_k\right)\left(R'_{ik}+R''_k+2\right)\left(R'_{ik}+R''_k+1\right)\left(\left(R'_{ik}+R''_k\right)\right)}\left(\theta-\beta\right)^{R'_{ik}+R''}$$
$$\times\left\{\left(R'_{ik}+3R''_k+2\right)\theta^2+\left[\left(R'_{ik}\right)^2+2R''_k+2R'_{ik}+3\left(R''_k\right)^2\right]\theta\beta\right.$$
$$\left.+\left[R''_k\left(R'_{ik}\right)^2+2\left(R''_k\right)^2R'_{ik}+R'_{ik}R''_k+\left(R''_k\right)^2+\left(R''_k\right)^3\right]\beta^2\right\}$$

elde edilir.□

Örneklemden bir örnek atıldığı $m-1$ durumda $\hat{\beta}_{(i)}=\hat{\beta}$, bir durumda ise $\hat{\beta}_{(i)}=T$ olacaktır. Yani $\hat{\beta}_{*_i}=m\hat{\beta}-(m-1)\hat{\beta}_{(i)}$, $m-1$ durumda $\hat{\beta}$, bir durumda ise $\hat{\beta}_{*_i}=m\hat{\beta}-(m-1)T$ değerini alacaktır. Buradan β parametresinin jackknife tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\beta^*=\frac{1}{m}\left\{\hat{\beta}_{*1}+\hat{\beta}_{*2}+\cdots+\hat{\beta}_{*m}\right\}$$

$$=\frac{1}{m}\left\{(2m-1)\hat{\beta}-(m-1)T\right\} \tag{22}$$

(10), (13) ve (22)’den β^* tahmin edicisinin beklenen değeri

$$E\left(\beta^*\right)=\frac{2m-1}{m}\frac{\theta+n\beta}{n+1}-\frac{m-1}{m}c'\sum_{i=0}^{1}\frac{c_{i,1}\left(R_1+1\right)}{R''_i}\left\{\frac{\theta+R''_i\beta}{R''_i+1}\right\} \tag{23}$$

şeklinde elde edilir. β^* tahmin edicisinin varyansı

$$Var\left(\beta^*\right)=Var\left\{\frac{1}{m}\left[(2m-1)\hat{\beta}-(m-1)T\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{m^2}\left\{(2m-1)^2Var\left(\hat{\beta}\right)+(m-1)^2Var(T)-2(2m-1)(m-1)Cov\left(\hat{\beta},T\right)\right\}$$

dir. Burada $Var\left(\hat{\beta}\right)$, (10) ve (11)’den, $Var(T)$, (13) ve (14)’den $Cov\left(\hat{\beta},T\right)$, Lemma 1’den elde edilir.

Örneklemden bir örnek atıldığı $m-1$ durumda $\hat{\theta}_{(i)}=\hat{\theta}$, bir durumda ise $\hat{\theta}_{(i)}=N$ olacaktır. Yani $\hat{\theta}_{*_i}=m\hat{\theta}-(m-1)\hat{\theta}_{(i)}$, $m-1$ durumda $\hat{\theta}$, bir durumda ise $\hat{\theta}_{*_i}=m\hat{\theta}-(m-1)N$ değerini alacaktır. Buradan θ parametresinin jackknife tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\theta^*=\frac{1}{m}\left\{\hat{\theta}_{*1}+\hat{\theta}_{*2}+\cdots+\hat{\theta}_{*m}\right\}$$

$$= \frac{1}{m}\left\{(2m-1)\hat{\theta} - (m-1)N\right\} \tag{24}$$

(16), (19) ve (24)'den θ^* tahmin edicisinin beklenen değeri

$$E\left(\theta^*\right) = \frac{2m-1}{m} c' \sum_{i=0}^{m-1} \frac{c_{i,m-1}\left(R_1+1,\ldots,R_{m-1}+1\right)}{R_i''}\left\{\frac{\theta + R_i''\beta}{R_i''+1}\right\}$$
$$- \frac{m-1}{m} c' \sum_{i=0}^{m-2} \frac{c_{i,m-1}\left(R_1+1,\ldots,R_{m-2}+1\right)}{R_i''}\left\{\frac{\theta + R_i''\beta}{R_i''+1}\right\} \tag{25}$$

θ^* tahmin edicisinin varyansı

$$Var\left(\theta^*\right) = Var\left\{\frac{1}{m}\left[(2m-1)\hat{\theta} - (m-1)N\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{m^2}\left\{(2m-1)^2 Var\left(\hat{\theta}\right) + (m-1)^2 Var(N) - 2(2m-1)(m-1)Cov\left(\hat{\theta}, N\right)\right\}$$

şeklindedir. Burada $Var\left(\hat{\theta}\right)$, (16) ve (17)'den, $Var(N)$, (19) ve (20)'den $Cov\left(\hat{\theta}, N\right)$, Lemma 1'den elde edilir.

5. TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI VE SONUÇLAR

Tablo 1'de beş farklı sansür şeması verilmiştir. Karşılaştırma yapabilmek için $\sum_{i=1}^{m} R_i = n - m = 10$ olacak biçimde m ve $\mathbf{R}$ seçilmiştir. Delphi 5 programlama dili ve Excel 97 paket programı vasıtasıyla Bölüm 4'deki formüller kullanılarak, *Düzgün*$(0,10)$ dağılımı için, Tablo 2, Tablo 3 ve Tablo 4 oluşturulmuştur.

Tablo 1. Örneklem hacmi m ve sansür şeması $\mathbf{R}$

Durum	m	R_i, $i = 1,2,\ldots,m$
1	*15*	*0 2 1 0 0 1 2 0 0 0 1 0 0 0 3*
2	*20*	*0 1 1 0 2 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 2 0 0 0*
3	*25*	*0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 2 0 0 0 0 2 0 1 0*
4	*30*	*1 0 2 0 0 1 0 2 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1*
5	*35*	*0 0 0 0 0 1 0 2 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0*

Tablo 2. β parametresi için önerilen $\hat{\beta}$ ve β^* tahmin edicilerinin beklenen değerleri ve varyansları

Durum	$E(\hat{\beta})$	$E(\hat{\beta}^2)$	$Var(\hat{\beta})$	$E(T)$	$E(T^2)$	$Var(T)$	$E(\beta^*)$	$E(T\hat{\beta})$	$Cov(T,\hat{\beta})$	$Var(\beta^*)$
1	0.3846	0.2849	0.1370	0.7692	0.8547	0.2630	0.0256	0.2292	0.1315	0.2665
2	0.3225	0.2016	0.0976	0.6452	0.6048	0.1886	0.0161	0.2060	0.0944	0.1918
3	0.2778	0.1502	0.0730	0.5556	0.4505	0.1418	0.0111	0.1448	0.0709	0.1443
4	0.2439	0.1161	0.0567	0.4941	0.3574	0.1133	0.0021	0.1565	0.0552	0.1151
5	0.2174	0.0925	0.0452	0.4348	0.2775	0.0885	0.0062	0.1266	0.0442	0.0899

Tablo 3. θ parametresi için önerilen $\hat{\theta}$ ve θ^* tahmin edicilerinin beklenen değerleri ve varyansları

Durum	$E(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta}^2)$	$Var(\hat{\theta})$	$E(N)$	$E(N^2)$	$Var(N)$	$E(\theta^*)$	$E(N\hat{\theta})$	$Cov(N,\hat{\theta})$	$Var(\theta^*)$
1	7.570	58.281	0.984	6.962	49.574	1.107	8.137	52.599	0.885	1.447
2	9.231	85.653	0.447	8.461	72.345	0.749	9.962	77.585	0.375	0.988
3	9.157	84.285	0.437	8.314	69.718	0.599	9.966	75.118	0.299	1.102
4	9.301	86.723	0.216	8.951	80.437	0.309	9.639	82.600	0.206	0.339
5	9.615	92.585	0.130	9.231	85.447	0.241	9.989	88.230	0.120	0.270

$\hat{\beta}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\beta}_*$ ve $\hat{\theta}_*$ tahmin edicilerin yanları, Tablo 2 ve Tablo 3' den yararlanarak Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 4. $\hat{\beta}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\beta}_*$ ve $\hat{\theta}_*$ tahmin edicilerinin yanları

Durum	$\theta - E(\hat{\theta})$	$\theta - E(\theta^*)$	$\beta - E(\hat{\beta})$	$\beta - E(\beta^*)$
1	2.430	1.863	-0.3846	-0.0256
2	0.769	0.038	-0.3225	-0.0161
3	0.843	0.034	-0.2778	-0.0111
4	0.699	0.361	-0.2439	-0.0021
5	0.385	0.011	-0.2174	-0.0062

Düzgün dağılımın parametreleri için Jackknife tahmin edicilerinin kapalı formda elde edilmesi, beklenen değer ve varyanslarının kesin olarak bulunmasına imkan vermektedir ve diğer tahmin edicilerin varyansı ve beklenen değeri ile karşılaştırılması bakımından çok önemlidir.

Tablo 2, Tablo 3 ve Tablo 4' den $\hat{\beta}_*$ ve $\hat{\theta}_*$ jackknife tahmin edicilerinin yanlarının sırasıyla $\hat{\beta}$ ve $\hat{\theta}$ tahmin edicilerinkinden daha küçük olduğu, varyanslarının ise yine sırasıyla $\hat{\beta}$ ve $\hat{\theta}$ tahmin edicilerinkinden daha büyük olduğu sonucuna varılabilir. Burada şuna dikkat edilmelidir ki 4. durumda $\hat{\theta}_*$ jackknife tahmin edicisinin yanının 2. ve 3. durumlarındakinden fazla olmasının nedeni sansür şemasının son elemanının sıfırdan farklı olmasıdır. Sonuç olarak, Düzgün dağılımın tahmin edicileri için Jackknife uygulanırsa yan azalır ancak varyans büyür denilebilir.

6. UYGULAMA

Balakrishnan ve Sandhu (1995) ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem üretmek için aşağıdaki algoritmayı önermişlerdir:

$W_1, W_2, \ldots, W_m$ bağımsız ve $Düzgün(0,1)$ dağılımından alınmış m birimlik örneklem olsun.

$$V_i = W_i^{\left(i + \sum_{j=m-i+1}^{m} R_j\right)^{-1}} \quad , \; i = 1,2,\ldots,m$$

rasgele değişkenleri tanımlansın. Daha sonra

$$U_{i:m:n}^{\mathbf{R}} = 1 - V_m V_{m-1} \cdots V_{m-i+1} \, , \quad i = 1,2,\ldots,m$$

rasgele değişkenlerini tanımlansın. Böylece $U_{1:m:n}^{\mathbf{R}} < U_{2:m:n}^{\mathbf{R}} < \cdots < U_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$ $Düzgün(0,1)$ dağılımından alınmış $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olur.

Son olarak $X_{i:m:n}^{\mathbf{R}} = F^{-1}\left(U_{i:m:n}^{\mathbf{R}}\right)$, $i = 1,2,\ldots,m$ rasgele değişkenini tanımlansın. Burada $F^{-1}(\cdot)$, sayı üretilmek istenilen sürekli dağılımın, dağılım fonksiyonunun tersidir. O zaman $X_{1:m:n}^{\mathbf{R}} < X_{2:m:n}^{\mathbf{R}} < \cdots < X_{m:m:n}^{\mathbf{R}}$, sürekli F dağılımından alınmış $\mathbf{R}$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem olur (Balakrishnan ve Sandhu, 1995).

Tahmin edicilerin kullanımını göstermek için $Düzgün(1,3)$ dağılımından $\mathrm{R} = (0,1,0,1,0,1,0,1)$ sansür şemalı ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem Balakrishnan ve Sandhu'nun (1995) algoritması kullanılarak üretildi. Üretilen sayılar Tablo 5'de gösterilmiştir.

Tablo 5. $\beta = 1$ ve $\theta = 3$ parametreli Düzgün dağılımdan üretilmiş ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örneklem

i	1	2	3	4	5	6	7	8
R_i	0	1	0	1	0	1	0	1
$x_{i:m:n}^{\mathbf{R}}$	1.1719	1.5494	1.6589	2.0276	2.2666	2.3995	2.5857	2.6050

(22) ve (24) kullanılarak Tablo 5'deki ilerleyen tür tip-II sağdan sansürlü örnekleme dayalı $\hat{\theta}, \hat{\theta}_*, \hat{\beta}$ ve $\hat{\beta}_*$ tahmin edicilerinin aldığı değerler

$$\hat{\theta} = 2.6050$$

$$\hat{\beta} = 1.1719$$

ve

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_* &= \frac{1}{m}\left\{(2m-1)\hat{\theta} - (m-1)N\right\} \\ &= \frac{1}{8}\{15 \times 2.6050 - 7 \times 2.5857\} \\ &= 2.6219\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_* &= \frac{1}{m}\left\{(2m-1)\hat{\beta} - (m-1)T\right\} \\ &= \frac{1}{8}\{15 \times 1.171940 - 7 \times 1.5494\} \\ &= 0.8417\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

KAYNAKÇA

Aggarwala R., Balakrishnan N. (1998), "Some Properties of Progressive Type-II Censored Order Statistics From Arbitrary and Uniform Distributions with Applications to Inference and Simulation", **Journal of Statistical Planning and Inference**, 70, 35-49.

Allan, R. R. (1966), "Extension of the Binomial Model of Traffic Flow to the Continuous Case", **Proceedings of the Third Conference of the Australian Road Research Board**, 3, 276-316.

Balakrishnan, N., Sandhu, R. A. (1995), "A simple simulation algorithm for generating progressively Type-II censored sample", **American Statistician**, 49 (2), 229-230.

Balakrishnan, N., Aggarwala, R. (2000), **Progressive Censoring:Theory, Methods and Applications**, Birkhauser, Boston.

Balakrishnan, N., Childs , A., Chandrasekar, B. (2002), "An Efficient Computational Method For Moments of order Statistics Under Progressive Censoring", **Statistics&Probability Letters,** 60, 359-365.

Casella, G., Berger, R.L. (1990), **Statistical Inference**, Wadsworth, Inc., Belmont, California.

David, H. (1970), **Order Statistics**, John Wiley, New York.

Durbin, J. (1961), "Some Methods of Constructing Exact Test", **Biometrika**, 48, 41-55.

Fisher, R. A. (1932), **Statistical Methods for Research Workers**, London: Oliver&Boyd.

Fox, T., Hinkley D., Larntz K. (1980), "Jackknifing in Nonlinear Regression", **Technometrics**, 22, 22-33.

Genç, A. (1999), “A Simulation Study of the Bias of Parameter Estimators in Multivariate Nonlinear Models”, **Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering**, Series B, 28, 105-114.

Gupta, S. S., Sobel, M. (1958), “On the Distribution of a Statistics based on Oredered Uniform Chance Variables”, **Annals of Mathematical Statistics**, 29, 274-281.

Johnson, N.L., Kotz, S. (1970), **Continuous Univariate Distributions-2**, John Wiley, New York.

Miller, R. G. (1974), “The Jackknife-A Review”, **Biometrika, 61, 1-15.**

Pearson, E. S. (1938), “Tests based on the Probabililty Integral Transformation”, **Biometrika**, 30, 134-148.

Quenouille, M. H. (1956), “Notes on Bias in Estimation”, **Biometrika**, 43, 353-360.

Sheppard, W. F. (1907), “Calculation of Moments of a Frequency Distribution”, **Biometrika**, 5, 450-459.

Stephens, M. A. (1966), “Statistics Connected with the Uniform Distribution: Percentage Points and Application to Testing for Rrandomness of Directions”, **Biometrika**, 53, 235-238.