TAKİYÜDDİN İBN MARUF'UN ONDALIK KESİRLERİ TRİGONOMETRİ VE ASTRONOMİYE UYGULAMASI

Remzi Demir[*]

Türk bilim tarihi, tarihimizin en bâkir sahalarından biridir. Bu durum hem yerli hem de yabancı tarihçilerin (ve diğer zümrelerin) zihinlerinde, Türklerin bilimle ilgilenmedikleri, "Kalem ehli değil, kılıç ehli" oldukları zannının doğmasına ve giderek yaygınlaşıp yerleşmesine neden olmuştur. Oysa el-Hârizmî, Abdülhamid ibn Türk, Fârâbî, İbn Sinâ, Beyrûnî, Uluğ Bey ve Ali Kuşçu gibi Ortaçağ İslâm Dünyası'nın önde gelen birkaç ismi bile, bu iddianın tarihî hakikatlerle bağdaşmadığını göstermeye ve kanıtlamaya yeterlidir.

Biz bu çalışmamızda, bu bilginlere nisbetle daha az tanınan ancak bilimsel yönü en az bunlar kadar kuvvetli olan başka bir bilginimizin, Osmanlı matematikçi ve astronomlarından Takiyüddin ibn Maruf'un (1521-1585) ondalık kesirler konusundaki faaliyetleri hakkında bilgiler vermek suretiyle onaltıncı yüzyılda Türk bilim hayatının hiç de küçümsenemeyecek bir düzeye ulaştığına dikkat çekmek istiyoruz.

Takiyüddin ibn Maruf

Takiyüddin ibn Maruf, onaltıncı yüzyılda yetişmiş en önemli Türk bilginlerinden biridir ve belki de en önemlisidir. 1521'de Şam'da doğmuş, naklî ilimleri (yani dinî ilimleri) burada ve Kâhire'de öğrendikten sonra müderrislik ve kadılık görevlerinde bulunmuştur. Mısır kadısı Abdülkerim Efendi ve Abdülkerim Efendi'nin babası Kutbeddin Efendi'in teşvikleriyle oldukça ileri bir yaşta matematik ve astronomi gibi aklî ilimlere merak sarmıştır. Kutbeddin Efendi, elinde bulunan rasat aletlerini ve dedesi Ali Kuşçu'ya ve Gıyâseddin Cemşid el-Kâşî'ye ait matematik ve astronomi kitaplarını Takiyüddin'e vermiş ve onun bu sahalarda gelişmesine ve ilerlemesine yardımcı olmuştur. Takiyüddin'in ilmî donanımı daha ziyâde Semerkand Çevresi'ne mensup olan bu bilginlerin eserleriyle şekillenmiştir.[1]

Takiyüddin, sadece matematik, astronomi ve optik sahalarına yapmış olduğu katkılarla değil, aynı zamanda 1575 civarında İstanbul'da kurmuş olduğu rasathaneyle de Türk bilim tarihinde seçkin bir yere sahip olmuştur. Dönemin en

* Ankara Üniversitesi, Dil ve Tarih Coğrafya Fakültesi Felsefe Bölümü, Bilim Tarihi Anabilim Dalı.

1 Takiyüddin'in hayatı hakkında daha ayrıntılı bilgi için bkz. Ramazan Şeşen, "Meşhur Osmanlı Astronomu Takiyüddin el-Râsıd'ın Soyu Üzerine", *Erdem*, IV/ 10, 1988, 165-173.

gelişmiş rasat aletleriyle donatılmış olan bu rasathanede takriben beş yıl süreyle yaptığı rasatlar sonucunda hazırlamış olduğu zîcler hayret verici bilimsel yenilikler içermektedir.

Takiyüddin ibn Maruf'un bilimin muhtelif dallarında ulaşmış olduğu seviye, bilim tarihçilerini, bugün için çözümü imkânsızmış gibi görünen bir mesele ile karşı karşıya bırakmaktadır. Acaba bu küçümsenemeyecek başarı, daha çok Takiyüddin'in şahsî yeteneklerinden mi kaynaklanmaktadır, yoksa Takiyüddin, zaten mevcut olan bilim ortamının ulaşmış olduğu sonuçları mı derlemiş, düzenlemiş ve sunmuştur? Takiyüddin'in biyografisine, eserlerindeki ifâdelerin mükemmelliğine ve etkileşim içine girdiği bilimsel ortamlarda aynı başarıyı gösterebilen başka bilginlerin bulunmadığına bakılacak olursa, bu olağanüstü veya olağandışı duruma neden olan şeyin Takiyüddin'in şahsî yetenekleri olduğu düşünülebilir. Fakat bilim tarihi, bizlere, bazı durumların ve gelişmelerin olağanüstü veya olağandışı olarak nitelendirilmesinin, çoğu kere bu durumlara ve gelişmelere ilişkin bilgi eksikliğinden ve yanlışlığından kaynaklandığını ve bilgilerimiz arttıkça ve düzeldikçe olağanüstülüğün ve olağandışılığın olağanlığa dönüştüğünü gösterdiği için, böyle bir hükme varmak hususunda acele etmekten kaçınmamız gerekir.

Nitekim biraz sonra takdim edeceğimiz bilgiler, ondalık kesirler konusunda Takiyüddin'e yardımcı olmuş bazı unsurların mevcut olduğunu ve bunların Takiyüddin'in başarısını kısmen de olsa olağanlaştırdığını gösterecektir. Takiyüddin'in ondalık kesirler konusundaki başarılarını olağanlaştıran gelişmeler şunlar olabilir:

1) Bunlardan en belirleyici olanı hiç kuşkusuz Takiyüddin'den önce bu konuda yapılmış olan bilimsel çalışmalardır. Çok gerilere gitmemiz gerekmez. Çünkü ondalık kesirler konusunda mevcut malumâtı kuramsallaştıran ve eserleriyle Takiyüddin'i en çok etkileyen araştırmacı, Uluğ Bey'in kurduğu Semerkand Medresesi'nin ve Rasathanesi'nin bir süre müdürlüğünü yapmış olan Gıyâsüddin Cemşid el-Kâşî'dir.[2]

El-Kâşî, *er-Risâletü'l-Muhîtiyye fî İstihrâci Muhîti'd-Dâire (Bir Dâirenin Çevresinin Bulunması)*[3] adlı risâlesinde, çevrenin çapa olan oranını hesapladıktan, yani pi sayısını (π) bulduktan ve kesirleri 9. hâneye kadar yürüttükten sonra, altmışlık kesirlerle işlem yapamayan muhâsiplerin, yani dönemin hesapçılarının işlerini kolaylaştırmak için altmışlık kesirleri ondalık kesirlere çevirmek suretiyle

---

2 Gıyâsüddin Cemşid el-Kâşî'den önceki gelişmeler için bkz. Remzi Demir, *XVI. Yüzyılın Ünlü Astronomu Takiyüddin'in Desimal Sistemi Trigonometri ve Astronomiye Uygulaması*, Yayımlanmamış Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Dil ve Tarih, Coğrafya Fakültesi Felsefe Bölümü, Ankara 1991, s.8-21.

3 Aslını göremediğimiz bu eserin tam adı için bkz., Sâlih Zeki, *Asâr-ı Bâkıye*, II, İstanbul 1329, s.181.

aritmetik sahasına önemli bir katkıda bulunmuştur.[4] Aritmetiğe ilişkin meşhur eseri *Miftâhü'l-Hisâb*'ın (*Aritmetiğin Anahtarı*, 1427) ikinci makalesinin birinci bölümünde,

> "Astronomlar, birbiri ardısıra gelen kesirlerin paydaları altmışlı olmak ve kuvvetlerini istedikleri mertebeye kadar yürütüp diğerlerini bırakmak kaydıyla m'atûf kesirleri[5] kullandılar ve bunları sırasıyla dakikalar, sâniyeleri sâliseler, râbialar... diye adlandırdılar.... Biz de astronomlarınkine benzeterek ard arda gelen kesirlerin paydaları onlu olmak ve kuvvetlerini istediğimiz yere kadar yürütmek şartıyla ondalık kesirleri teklif ettik ve bunları sırasıyla ondalık, ikinci ondalık, üçüncü ondalık... diye adlandırdık."[6]

diyerek, ondalık kesirleri geliştirirken nasıl bir örnekten yararlandığına veya ilham aldığına dikkat çekmektedir. Demek ki ondalık kesirlerin bulunması ve kullanılmasında, astronomların "Müneccim Hesabı" olarak adlandırdıkları altmışlık sistemin kesirleri model olarak benimsenmiştir.

El-Kâşî, bu ikinci eserinde altmışlık kesirlerin ondalık kesirlere ve ondalık kesirlerin altmışlık kesirlere dönüştürülmesi kurallarını vermiş ve ondalık kesirlerle nasıl işlem yapılacağı meselesine gelince, ayrıntıya girmeyip, çarpma, bölme, karekök alma ve diğer işlemlerin "Müneccim Hesabı"yla, yani altmış tabanlı hesapla kıyaslanarak yapılabileceğini söylemiştir. Oysa aşağıda da görüleceği üzere, Takiyüddin işlemleri misâllerle anlatmıştır.

Gıyâsüddin Cemşid el-Kâşî, gerek *el-Muhîtiyye*'de ve gerekse *Miftâhü'l-Hisâb*'da ondalık simgesi, yani tam sayıyı kesrinden ayıran bir simge kullanmamış, sadece tam sayının birler hânesi üzerine "Sıhah" (Tam) tabirini yazmak veya hâneleri ya da sonuncu hâneyi sözel olarak ifâde etmek suretiyle tam sayıyı ondalık kesirinden ayırma yoluna gitmiştir.[7]

2) Takiyüddin'in yaşadığı sahalarda ve özellikle de Anadolu'da ondalık kesirlerin Türkler tarafından ticarî hayatta kullanıldığını gösteren önemli bir bulgu, etkileşim meselesini oldukça karmaşık bir hale getirmiştir. Takiyüddin'in, ondalık kesirler konusunda el-Kâşî'nin eserlerinden yararlandığını biliyoruz; ancak Bizanslılardan günümüze ulaşan Yunanca bir belge, Takiyüddin'in başka bir kaynaktan daha yararlanmış olabileceği ihtimalini gündeme getirmektedir.

---

4 Ayrıntılı bilgi için bkz., el-Kâşî, *Miftâhü'l-Hisâb*, Yay. Haz. Nâdir el-Nâbûlsî, Şam 1977, s.182.

5 M'atûf kesirler, Ortaçağ İslam Dünyası'nda bayağı kesirlerin bir türü olarak görülmekteydi. Meselâ 8/15 kesri 1/3 ve 1/5 basit kesirlerinin toplamına eşit olduğundan, bu kesrin yerine (1/3 ve 1/5) yazılabiliyordu. Burada iki kesir arasındaki "ve" bağlacı toplama işaretinin görevini görmekte olup, bir kesri diğerine atfettiği, yani bağladığı için bu tip kesirlere "m'atûf kesirler" denmekteydi; bkz. Sâlih Zeki, a.g.e., II, s.149-150.

6 El-Kâşî, a.g.e., s.106.

7 Remzi Demir, *a.g.tez*, s.25.

Türklerin, özellikle ticarî hesaplamalarda ondalık kesirleri kullandıklarını ve bu konuda en azından Bizans aritmetiğini etkilediklerini gösterir önemli ipuçları, Herbert Hunger ve Kurt Vogel'in yayına hazırlamış oldukları bir Bizans aritmetik kitabının içinde yer almaktadır[8]. Yazarı meçhul olan ve 100 tane aritmetik problemini kapsayan bu kitap, I.Ferdinand'ın Kânûnî Sultan Süleyman nezdindeki dâimî elçisi Augerius von Busbeck tarafından alınarak Almanya'ya götürülen eserler arasında bulunmaktadır ve büyük bir ihtimalle İstanbul'un fethi sıralarında (1453) kaleme alınmıştır.[9]

Kitabın konumuz açısından önemli olan yönü otuz birinci, otuz altıncı ve altmış altıncı problemlerin çözümünde, ondalık kesirlerle işlem yapılırken, bunun bir "Türk Yöntemi" olduğunun kesin bir dille ifâde edilmiş olmasıdır.[10] Otuz altıncı problemin girişinde,

> "Türkler, ilginç bir yöntem kullanarak kesirlerle çarpma ve bölme işlemleri yaparlar ve kendi kesirlerini (ondalık kesirleri) bu ülkeyi yönetimleri altına aldıklarından bu yana kullanmaktadırlar."

denilmesi, bilim tarihçilerini önemli bir mesele ile karşı karşıya getirmektedir. "Bu ülkeyi yönetimleri altına aldıklarından bu yana" sözü ile vurgulanmak istenen tarih, acaba 1453 yılı mıdır? Bilemiyoruz. 1453 olduğunu varsayacak olursak, Türklerin bu malumâtı Gıyâsüddin Cemşid el-Kâşî'den aldıklarını söylemek oldukça güçleşecektir. Çünkü el-Kâşî'nin 1427 tarihinde Semerkand'da tamamlamış olduğu *Miftâhü'l-Hisâb* adlı eserinin içeriğinin 26 sene gibi oldukça kısa sayılabilecek bir süre içinde Anadolu'da yaşayan Türkler arasında ticarî işlemleri etkileyecek düzeyde yayılmış olması imkânsız gibidir. Bu kadar yüksek düzeydeki ilmî bir eserin, çoğu Arapça bilmeyen Türkler tarafından okunup anlaşılması ve gündelik hayatta kullanılması için herhalde çeyrek asra değil, en azından bir asra ihtiyaç vardır. Üstelik, ondalık kesirlere ilişkin malumâtın, Herbert Hunger ve Kurt Vogel'in iddia ettikleri gibi, Kadızâde-i Rûmî (1337-1412) ve Ali Kuşçu (? -1474) tarafından Anadolu'ya taşınmış olması da mümkün görünmemektedir. Çünkü Kadızâde-i Rûmî, Bursa'dan ayrıldıktan sonra

---

8 Herbert Hunger ve Kurt Vogel, *Ein Byzantinisches Rechenbuch des 15. Jahrhunderts*, Viyana 1963.

9 Herbert Hunger ve Kurt Vogel, *a.g.e.*, s.9.

10 Herbert Hunger ve Kurt Vogel, *a.g.e.*, s.31, 33 ve 53. Mesela 36. problemin çözümünde, 153 ½ terimi 153 5 ve 16 ¼ terimi ise 16 25 olarak gösterildikten sonra, sonucu verecek çarpma işlemi yapılmış ve sonuç 2499|375 olarak verilmiştir. İşlem sırasında çarpanların ve sonucun ondalık kesirlerinin düşey çizgilerle (|) ayrılmış olması son derece ilginçtir; bkz. Herbert Hunger ve Kurt Vogel, *a.g.e.*, s.33 ve Tafel II, Rechnungen 36-41.

Anadolu'ya hiç dönmemiş ve Semerkand'da vefat etmiştir; Ali Kuşçu ise İstanbul'a, fetihten çok sonra, 1472'de yerleşmiştir.

Öyleyse Anadolu Türklerinin ondalık kesirleri ilk defa ne zaman kullanmaya başladıklarını bilemiyoruz; ancak 1453 yılında günlük hayatta kullandıklarına göre, 1427 yılından çok daha önceleri bulmuş veya bulanlardan aktarmış olmaları gerekmektedir.

Takiyüddin, *Miftâhü'l-Hisâb*'dan yararlandığını bildirir ama ondalık kesirlerin günlük hayatta kullanılmakta olduğundan bahsetmez; bu durum, Bizans metinlerinde verilmiş olan bilgilerin yorumlanmasını büyük ölçüde güçleştirmiştir.

Takiyüddin'de ondalık kesirler

Takiyüddin ondalık kesirleri, Gıyâsüddin Cemşid el-Kâşî'nin *Miftâhü'l-Hisâb* adlı eserinden öğrenmiştir.[11] *Cerîdetü'd-Dürer* (*İnciler Topluluğu*, 1584) adlı eserinin girişinde bunu açıkça beyan eder. Ancak Takiyüddin'e göre, el-Kâşî'nin bu konudaki bilgisi, kesir hesaplarıyla sınırlı kalmıştır; oysa bu hesabı trigonometri ve astronomi gibi, bilimin diğer şubelerine tatbik etmek, yani kullanımını genelleştirmek gerekir. Takiyüddin, işte bu noktada, el-Kâşî'yi aşmış ve ondalık kesirleri trigonometri ve astronomi sahalarındaki hesaplamalarda da kullanmaya başlamıştır.

Bugüne kadar yapmış olduğumuz araştırmalar göstermiştir ki Takiyüddin, ondalık kesirleri diğer kesirlere, yani altmışlık kesirlerle bayağı kesirlere tercih eden ve bu tür kesirleri eserlerinde yoğun bir şekilde kullanan ilk matematikçidir.

Şimdi, Takiyüddin'in ondalık kesirler konusundaki bilgisinin düzeyi hakkında bir fikir verebilmek için elimizde mevcut olan ve şu veya bu nedenle ondalık kesirlerden bahseden eserlerine şöyle bir göz atalım:

1) Bugyetü't-Tüllâb min İlmi'l-Hisâb (Aritmetikten Beklediklerimiz)

Osmanlı bilginlerinin kullandıkları hesaplama sistemlerini, yani "Hint Hesabı" denilen onluk sistem ile "Müneccim Hesabı" denilen altmışlık sistemi tanıtmak maksadıyla yazılmış olan bu aritmetik eserinin, Müneccim Hesabı'ndan bahseden ikinci makalesinin dokuzuncu bölümü ondalık kesirlere ayrılmıştır. Takiyüddin bu bölümün girişinde, ondalık kesir hânelerini isimlendirdikten sonra şunları söyler:

> "Bununla (ondalık kesirlerle) Güneş'in ortalama, merkez ve apoje hareketini, günlerin tadilini, ortalamanın ve merkezin tadilini hesapladım ve

11 El-Kâşî'nin ondalık kesirler konusuna yapmış olduğu katkılar için bkz., Remzi Demir, a.g.tez, s.21-41.

bu yolla Güneş'in yörüngesini istenilene uygun vasıflarda tesbit ettim. Aynı şekilde, Ay'ın ortalamaları ile bunlara ait tadilleri de belirledim. Yüce Allah izin verirse, bu sistemle bir zîc yazmaya karar verdim. Çünkü bununla yapılacak çarpma ve bölme işlemlerinde altmışlık tabloya (kerrat cetveline) ihtiyaç duyulmaz ve toplama da çok kolaydır."

Bu ifâdeden de anlaşılacağı üzere, Takiyüddin, M.S. 2. yüzyılda yaşamış olan meşhur Yunan astronomu Ptolemaios (Batlamyus) tarafından son biçimiyle kurumlaştırılan ve 16. yüzyıla kadar Doğu'da ve Batı'da bütün astronomi ve astroloji eserlerinde kullanılan altmışlık kesirleri terk ederek ondalık kesirleri kullanmaya başlamıştır. Takiyüddin'in gerekçesi gâyet açıktır: Ondalık kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini yapmak, altmışlık kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini yapmaktan çok daha kolaydır; aynı şey toplama (ve dolayısıyla çıkarma) için de söylenebilir.[12]

Takiyüddin böylece astronomların en önemli sorunlarından birini çözümlemiş oluyordu. Yıldızların ve gezegenlerin gökyüzündeki konumlarını ve günlük hareket miktarlarını dakik bir şekilde belirlemek isteyen astronomlar, meselâ onuncu altmışlık kesirine kadar ifâde edilen sayılarla çarpma ve bölme işlemleri yaparken çok zorlanıyorlar ve kendilerini bu basit ama sıkıcı işlemlerin çokluğundan kurtaracak bir yeniliğe, yeni bir hesaplama sistemine ihtiyaç duyuyorlardı. Takiyüddin'in ondalık kesirleri astronomiye, daha doğrusu astronomik hesaplamalara tatbik etmesinin sebebi işte bu ihtiyacı gidermektir.

Yine yukarda vermiş olduğumuz alıntıdan öğreniyoruz ki, Takiyüddin ondalık kesirleri kullanmak suretiyle Güneş ve Ay tabloları hazırlamıştır. Ancak maksadı diğer gezegenlere ilişkin tabloları da hazırlayıp bir zîc, yani gezegenlerin günlük devinimlerini gösteren bir almanak tertip etmektir. Takiyüddin bu sözünü tutmuş ve ondalık kesirlere dayanan bir değil birkaç zîc hazırlamıştır.

Takiyüddin *Bugyetü't-Tüllâb*'ın söz konusu bölümünde konuyu 9 örnekle açıklamıştır. Birinci örnekte, kesiri, ondalık kesirlerle ifâde edilmiş olan bir sayının iki katının, ikinci örnekte ise yarısının nasıl alınacağını göstermiş, üçüncü örnekte ondalık kesirli iki saynın toplamı, dördüncü örnekte ise farkı konusunu işlemiştir. Beşinci örnekte, "0 TAM 479" (0,479) ile 538 sayılarının çarpıldığı ve sonucun "257 TAM 702" (257,702) olarak bulunduğu görülmektedir. Takiyüddin çarpma işlemini, bugün olduğu gibi, sayıları alt alta koyarak yapmış ve sonucun kesirini tesbit etmek için, yani tam sayıyı kesirinden ayırmak için, kesirli çarpanın kesir hânelerinin sayısından yararlanabileceğimizi söylemiştir.

---

12 Süleymâniye Kütüphânesi, Veliyüddin Carullah Koleksiyonu, Nr.1454, varak 42a.

Altıncı örnekte bölme işlemi gösterilmiştir. Burada Takiyüddin ilginç bir kerrat cetveli sunar. Bugün ilkokulların birinci ve ikinci sınıflarında öğrencilere ezberletilen bu kerrat cetveli, hem tam sayıların çarpım sonuçlarını hem de bir tam sayı ile bir kesirli sayının çarpım sonuçlarını verecek biçimde düzenlenmiştir (Tablo 1).

Takiyüddin, yedinci örnekte 0,5'in karekökünü almış, sekizinci ve dokuzuncu örneklerde ise sırasıyla altmışlık kesirlerin ondalık kesirlere ve ondalık kesirlerin altmışlık kesirlere nasıl dönüştürüleceğini göstermiştir.

Görüldüğü üzere Takiyüddin, ondalık kesirleri trigonometri ve astronomiye tatbik etmeden önce, bu eserinde kuramsal olarak incelemiş ve örnekler vermek suretiyle işlemlerin nasıl yapılacağını göstermiştir.[13]

Diğer eserlerine geçmeden önce, burada matematik tarihi açısından önemli olan bir konuya daha temas etmekte fayda vardır. Takiyüddin, ondalık sembolü kullanmamış, bir sayının tam kısmını kesirli kısmından ayırmak için iki yola başvurmuştur:

1) Sayının bütün hânelerinin isimlerini yazmıştır. Meselâ, 532,876 sayısını, "5 **yüzler** 3 **onlar** 2 **birler** 8 **ondabirler** 7 **yüzdebirler** 6 **bindebirler**" şeklinde göstermiştir.

2) Sayının son kesir hânesinin ismini yazmıştır. Meselâ, 532,876 sayısını, "532876 **bindebirler**" şeklinde göstermiştir.

Şu halde denilebilir ki Takiyüddin simgeleştirme konusunu pek fazla önemsememiş ve bu konuda el-Kâşî'yi taklit etmekle yetinmiştir. Oysa ondalık simgesi, hesaplamaları daha da kolaylaştıran yararlı bir buluştur.

Ayrıca Takiyüddin, yüzbinler hânesi ile yüzbindebirler hânesi arasında kalan sayıların mertebelendirilmesi, yani tam ve kesirli kısımlarının birbirlerinden kolaylıkla ayrılabilmesi için bir tablo daha hazırlamıştır. Çarpma, bölme ve karekök alma işlemlerinden sonra bu tabloya bakmak suretiyle de tam sayıyı kesirinden ayırmak mümkündür. Ancak bunun sağlayacağı kolaylık, ondalık simgesinin sağlayacağı kolaylıktan daha fazla değildir (Tablo 2).

2) Sidretü'l-Müntehâi'l-Efkâr fî Melekûti'l-Feleki'd-Devvâr (Gökler Bilgisinin Sınırı)

Takiyüddin bu mükemmel zîcinin bir yerinde "zâtü'l-ceyb" denilen bir gözlem aletini tanıtırken şunları söyler:

13 Ayrıntılı bilgi için bkz. Takiyüddin, a.g.e., varak 42a - 47a.

"Bir cetvelin yüzeyini altmışlık sinüse göre, diğerini ise bilginlere ve gözlem neticelerinin hesaplanmasına uygun düşecek şekilde kolaylaştırıp, yararlılığını ve olgunluğunu arttırdığım onluk sinüse taksim ettim."[14]

Bu ifâde, birim dairenin yarıçapının, yani birim uzunluğun 10 olarak alındığına işaret etmektedir. Acaba bunun nedeni nedir? Aşağıda da görüleceği üzere bunun nedeni, bulunduklarından bu yana altmışlık kesirlerle gösterilen trigonometrik fonksiyonların kesirlerini, tıpkı günümüzde olduğu gibi, ondalık kesirlerle göstermek ve birim uzunlukla kesirlerini aynı sisteme indirgemek olmalıdır. Böylece Takiyüddin, onluk sistemin genelleştirilmesi doğrultusunda önemli bir adım daha atmış olmaktadır.

3) Teshîlu Zîci'l-'Aşâriyyi'ş-Şehinşâhiyye (Sultanın Onluk Yönteme Göre Düzenlenen Zîcinin Yorumu)

İstanbul Rasathanesi'nde yapılan gözlem sonuçlarını içeren ve 1580 yılında tamamlanan bu ilginç zîc, ondalık kesirlerle hazırlanmış olan bilinen ilk zîctir.[15] Kuramsal bilgilere yer vermeyen ve sadece gezegen devinimlerini gösteren tablolardan oluşan bu zîcte, bütün açı ve yayların bir dereceden küçük olan kesirleri ondalık kesirlerle gösterilmiş, yani kısaca söylemek gerekirse, ondalık kesirler astronomiye tatbik edilmiştir.

Meselâ altmışlık sistemde, 31° 8' 49" 12''' olarak gösterilen bir açısal büyüklüğün, Takiyüddin'in geliştirmiş olduğu onluk sistemde, 31,147° olarak gösterildiği ve işlemlerin buna göre yapıldığı görülmektedir.

Hemen belirtmek gerekir ki Takiyüddin'in işlemleri kolaylaştırdığı için, açı veya yay büyüklüklerini altmışlık kesirler yerine ondalık kesirlerle ifâde etmesi Doğu'da benzersiz bir girişimdir ama muhtemelen asırlardan beri süregelen geleneklerin etkisiyle, Doğulu (yani Müslüman) astronomlar arasında olduğu gibi, Batılı (yani Hıristiyan) astronomlar arasında da yayılamamış ve tutunamamıştır.

Bu girişimin, Doğu'da veya Osmanlı İmparatorluğu'nda tutunamamasının diğer önemli bir nedeni ise, 16. yüzyıldan sonra Osmanlı matematikçileriyle astronomlarının Takiyüddin'in doruğa çıkarmış olduğu ilmî faaliyetleri sürdürebilecek donanıma hiçbir zaman ulaşamamış olmalarıdır. Takiyüddin'in ardından, onun maksatlarını ve eserlerini anlayabilecek ve kullanabilecek

14 Bu paragraf, Sevim Tekeli'nin "Takiyüddin'in Sidretü'l-Müntehâ'sında Aletler Bahsi" adlı makalesinin (*Belleten*, XXV/98, 1961) arkasında bulunan Arapça metinden tercüme edilerek alınmıştır (s.236).

15 Takiyüddin'in bu çok kıymetli zîcinin bir fotokopisi, Sevim Tekeli'ye Hindistan'dan gönderilmiş olan yazma fotokopileri arasında bulunmaktadır; eserin hangi kütüphanede bulunduğu üzerinde kayıtlı değildir.

kapasitede bilginlerin yetişmemiş olması, 17. yüzyıldan itibaren, mevcut bilgi birikiminin giderek unutulduğunun da en önemli göstergelerinden birisidir.[16]

Takiyüddin'in geliştirmiş olduğu bu yöntem Batılı astronomlar tarafından da kullanılmamıştır; geleneksel yöntemlerin direnci bir yana bırakılacak olursa, 16. yüzyıl Batı'nın artık kendi yağıyla kavrulduğu, kendi bilim ve teknoloji üretim sistemini oluşturduğu ve İslâm Dünyası'nda kaleme alınmış olan bilimsel eserleri incelemeye ve çevirmeye artık ihtiyaç duymadığı bir dönemdir. Bu yüzyılda bilim ve teknoloji alanlarında bilgi iletişimi kısmen gerçekleşmiş olabilir; ancak taraflardan birinin, yani İslâm Dünyası'nın hâmisi ve temsilcisi konumunda bulunan Osmanlıların muhtelif nedenlerin tesiri ile Batılı anlamda bilim ve teknoloji üretememeleri ve kısa bir süre içinde bu yarıştan kopmaları nedeniyle, uzun asırlar boyunca Doğu-Batı istikâmetinde cereyân eden bilgi akışı, 16. yüzyılın sonlarında tersine dönmüş ve 17. yüzyıldan itibâren Batı-Doğu istikâmetinde cereyân etmeye başlamıştır.

4) Cerîdetü'd-Dürer (İnciler Topluluğu)

Takiyüddin, 1584 tarihinde İstanbul'da yazmış olduğu bu son zîcinde, ondalık kesirlere ilişkin çalışmalarının sonuçlarını topluca göstermiştir;[17] eser yakından tetkik edildiğinde görülecektir ki Takiyüddin, gerek gözlem araçlarını ve gerekse gözlem hesaplamalarını ondalık kesirlerin kullanımına müsait olacak biçimde yeniden düzenlemek suretiyle, astronomi bilimini bütün güçlüklerden arındırma girişimlerini bir sonuca ulaştırmıştır. Konumuz açısından bu son esere baktığımızda şunları söyleyebiliriz:

a) Takiyüddin birim dâirenin yarıçapını 10 olarak almış ve trigonometrik fonksiyonların kesirlerini ondalık kesirlerle göstermiştir. Ondan sonra bu esaslar çerçevesinde bir sinüs-kosinüs tablosu ile (Tablo 3) bir tanjant-kotanjant tablosu (Tablo 4) hesaplamıştır. Bu tablolar, ondalık kesirlere dayanılarak hazırlanmış ilk trigonometrik tablolar olup, bugün dahi rahatlıkla kullanılabilecek dakikliktedir.[18]

16 Onyedinci yüzyılın önde gelen Osmanlı düşünürlerinden ve bilginlerinden Kâtib Çelebi (1609-1657), *el-İlhâmü'l-Mukaddes min el-Feyzi'l-Akdes* adlı küçük bir risâlesinde, görüşlerini kanıtlarken Takiyüddin'in *Sidretü'l-Müntehâ*'sını kullanmıştır; ancak bu kullanım ondalık kesirlerle ilgili değildir; bu küçük risâle ile ilgili olarak bkz., Muhammed Hamîdullah, "Erâu Kâtib Çelebi fî Ba'di'l-Mesâili'l-Fıkhıyyeti'l-Müteesir bi-İlmi'l-Heyeti'l-Cedîd", *İslâm Tetkikleri Enstitüsü Dergisi*, IV/3-4, 1971, 154-215; Bedi N. Şehsuvaroğlu, "İlhâmü'l-Mukaddes min el-Feyzi'l-Akdes Risâlesi ve ve Kâtip Çelebi'nin İlmî Zihniyeti Hakkında Birkaç Söz", *Kâtip Çelebi, Hayatı ve Eserleri Hakkında İncelemeler*, 2. Baskı, Ankara 1985, s.141-177.

17 Bu eser, tarafımızdan Türkçe'ye tercüme edilmiş ve *XVI. Yüzyılın Ünlü Astronomu Takiyüddin'in Desimal Sistemi Trigonometri ve Astronomiye Uygulaması* başlığını taşıyan doktora tezimizin içinde sunulmuştur; bkz, 113-324.

18 Remzi Demir, *a.g.e.*, s.118-123.

Bilindiği gibi, bugün birim uzunluk 1 olarak alınmakta ve kesirler tıpkı Takiyüddin'in yaptığı gibi ondalık kesirlerle gösterilmektedir.

b) Takiyüddin, bu zîcinde de ondalık kesirleri astronomiye uygulamış ve açı veya yayların kesirlerini ondalık kesirlerle göstermiştir. Sâbit yıldızlar tablosu hariç diğer bütün tablolar, bu sisteme göre hazırlanmıştır (Tablo 5).[19]

c) Takiyüddin ondalık kesirleri gözlem aletlerine de tatbik etmiştir. Gözlem aletleri altmışlık taksimata uygun olarak imal edilmiş olduğundan, bunlarla elde edilen gözlem neticelerinin onluk taksimata kolayca dönüştürülebilmesi için, Takiyüddin bir dönüştürme tablosu hazırlamış (Tablo 6)[20] ve böylece ondalık taksimata uygun aletler imal etmeksizin gözlemlerini sürdürmüştür.

Batı'da ondalık kesirlerin kullanımı ve Simon Stevin

İslâm Dünyası'nda ondalık kesir fikrinin doğuşu ve kuramsallaşması esnasında matematiksel ihtiyaçların rolünü göz ardı etmek mümkün değildir; meselâ Gıyâsüddin Cemşid el-Kâşî, *el-Muhîtiyye* adlı risâlesinde pi sayısının (π) kesirini ondalık kesirlerle göstermek istemiş ve sonuçta bu kesirlerin altmışlık kesirlerden daha kullanışlı olduğunu görmüştür. Ancak yukarda da dikkat çekildiği üzere, esasında ondalık kesirlerin geliştirilmesi astronomik ihtiyaçların karşılanmasıyla yakından alâkalıdır ve bu hesaplama sisteminin kuramsallaşması ve diğer sahalara tatbiki aynı anda hem matematikçi hem de astronom olan bilginlerin yoğun araştırma faaliyetleri neticesinde gerçekleşebilmiştir. Batı'da da benzer bir gelişmeden bahsetmek mümkündür. Fakat Batı Dünyası'nda matematiksel ihtiyaçların, ondalık kesirlerin doğuşunda ve kuramsallaşmasında biraz daha etkili olduğu anlaşılmaktadır. Bu nisbeten farklı durumu, Batı'nın Bizans aritmetik metinleri vasıtasıyla (ve bilmediğimiz daha erken vasıtalarla) Doğu'dan, yani İslâm Dünyası'ndan etkilenmiş olması ile açıklamak mümkündür. Çünkü Batılı nakilciler için asıl önemli olan şey, Doğulu bilginlerin bu konudaki tecrübelerini aynen yaşamak değil, bu tecrübe neticesinde üretmiş oldukları bilgiden istifade etmektir ve konuya bu açıdan bakıldığında, ondalık kesirlerin keşfedilmesi, daha ziyade matematiksel bir nitelik arzettiği için, Batılıların konunun bu yönüyle daha fazla ilgili olmaları gâyet doğaldır.

19 Remzi Demir, a.g.tez, s.129.
20 Remzi Demir, a.g.tez, s.131.

Ondalık kesirler fikri, Batı'da Simon Stevin (1548-1620) ile kuramsallaştırılmadan ve kurumlaştırılmadan önce, iki ayrı konu üzerindeki çalışmalar esnasında bir ihtiyaç olarak belirmiştir:

1) Bunlardan birisi, herhangi bir tek sayının karekökünün kolayca alınabilmesi için ondalık olarak büyütülmesidir.

2) İkincisi ise, trigonometrik fonksiyonların kolayca hesaplanması maksadıyla, birim büyüklük olarak benimsenen yarıçapın ondalık olarak büyütülmesidir.

Batı'da bu iki konu üzerinde yapılan çalışmaların neticelerini birleştiren kimse, Hollandalı matematikçi Simon Stevin olmuştur. Stevin, Batı'da, Aristoteles'in ağır cisimlerin hafif cisimlerden daha hızlı düşeceğini savlayan görüşünün yanlış olduğuna ilişkin kanıtmasıyla da meşhurdur.

Simon Stevin'in Felemenkçe olarak yazdığı ve 1585'de Leiden'de yayımladığı 32 sayfalık *De Thiende (Ondalık)* adlı eseri, ondalık kesirleri konu edinen ilk müstakil kitap olarak tanınmaktadır. *De Thiende*, Stevin tarafından *La Disme* adıyla Fransızca'ya da tercüme edilmiş ve aynı yıl aynı yerde basılmıştır. Eser, bir giriş, iki bölüm ve bir ekten oluşmuştur; girişte ondalık kesirlerin yararları anlatıldıktan sonra, birinci bölümde ondalık kesirler tanıtılmış ve ikinci bölümde ise bu tür kesirlerle dört işlemin nasıl yapılacağı gösterilmiştir; eserin eki çok değerlidir; çünkü bu bölümde ondalık kesirlerin günlük hayatta kullanılan ölçü birimlerine uygulanmış olduğu görülmektedir.[21]

Takiyüddin ibn Maruf ile Simon Stevin'in katkılarının mukayesesi

Takiyüddin'in *Buğyetü't-Tüllâb*'ı ile Simon Stevin'in *De Thiende*'si içerdikleri bilgiler açısından mukâyese edildiklerinde şu sonuçlara ulaşılacaktır:

1) Takiyüddin bir tam sayıyı kesrinden ayırmak için herhangi bir sembol kullanmadığı halde, Stevin mesela 8,937 sayısını, "8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③" biçiminde göstermiş, yani kullanışlı olmasa da sembollerden yararlanmak istemiştir.

2) Stevin, Batı geleneğine uygun olarak sadece dört işlemi anlatmış, ama yarılama, iki katını ve karekökünü alma gibi işlemlere yer vermemiştir.

3) Takiyüddin ondalık kesirlerin astronomiye uygulanabilmesi için, altmışlık kesirlerin ondalık kesirlere ve ondalık kesirlerin altmışlık kesirlere nasıl dönüştürüleceği meselesini ayrıntılı bir şekilde incelemişken, Stevin bir dâirenin

21 Remzi Demir, a.g.tez, s.64-67. Ayrıntılı bilgi için George Sarton'un şu üç makalesine bakılabilir: "Simon Stevin of Bruges (1548-1620)", *ISIS*, XXI, 1934, 241-303; "The First Explanation of Decimal Fractions and Measures (1585)", *ISIS*, XXIII, 1935, 153-244; "Decimal Systems Early and Late", *OSIRIS*, IX, 1950, 581-601.

çevresi 360 dereceye taksim edildikten sonra, derece aksâmının ondalık taksimata uygun olarak alınabileceğini bildirmekle yetinmiştir.

4) *De Thiende*'de ondalık kesirlerin trigonometriye tatbikine ilişkin herhangi bir bilgi mevcut değildir; oysa Takiyüddin, nasıl tatbik edileceğini göstermekle kalmamış, sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant tablolarını da hesaplayarak konuyu olgunlaştırmıştır.

5) *De Thiende*'nin sonuna 6 makale eklenmiş ve bunlarda onluk sistemin, ölçümleri ve hesaplamaları kolaylaştırması maksadıyla uzunluk, ağırlık, hacim ve para birimlerine nasıl uygulanacağı gösterilmiştir. Böylece metrik sistemin temelleri atılmıştır. Takiyüddin de *Bugyetü't-Tüllâb*'ın üçüncü makalesinin ikinci faslında, bu konuyu ele almış ama dinar, dirhem, kile ve zira gibi ölçü birimlerinin geleneksel askatları üzerinde bilgi vermekle yetinmiştir.[22]

Bu serimlemeden de açıkça görülmektedir ki Stevin bir ondalık simgesi geliştirme ve onluk sistemi ağırlık, hacim ve para birimlerine uygulayarak metrik sistemin temellerini atma gibi düşünceleri açısından Takiyüddin'den daha ilerdedir ama Takiyüddin ondalık kesirleri Stevin'den çok daha geniş bir kuramsal çerçeve içerisinde tasarlamış ve incelemiştir; ondalık kesirlerin trigonometri ve astronomiye uygulanabilmesi için gerekli olan dönüşüm ilkelerini belirlemiş ve dönüşüm işlemlerini yapmıştır; kaleme almış olduğu zîclerde, bütün tabloları ondalık kesirleri kullanarak hazırlamış ve bu yolla astronominin hesap yöntemleri açısından çok daha mükemmel bir hale getirilebileceğini göstermek istemiştir.

Sonuç

Takiyüddin ibn Maruf, gerçekten de matematik ve astronomi alanlarında seçkin bir bilgindir ve bu seçkinliğini kısmen 15. yüzyılda Semerkand'da gerçekleştirilen araştırmaların ürünlerine ve kısmen de şahsî yeteneklerine borçludur. Bir müderrisin ve bir hâkimin bütün sorumluluklarını ve görevlerini yüklenmiş olmasına rağmen, bilimsel araştırmalarını yürütecek fırsatları ve vakitleri değerlendirmesini bilmiştir.

Çok çalışkandır; oldukça uzun ve yoğun bir çalışmanın sonucunda, Gıyâsüddin Cemşid el-Kâşî'nin ondalık kesirlere ilişkin bilgilerini, aritmetik alanından, trigonometri ve astronomi alanlarına aktarmayı başarmıştır. Aslında astronomiyi geleneksel hesap yöntemlerinden arındırarak mükemmelleştirmeyi tasarlamaktadır ve ondalık kesirleri astronomiye uygulayabilmek için yeni

22 Remzi Demir, a.g.tez, s.67-69.

yöntemler geliştirmesi, oldukça geniş kapsamlı olduğu anlaşılan bu tasarının bir boyutunu teşkil etmektedir.

Çok yeteneklidir; yapıtları yaratıcılığının misalleriyle doludur. Bilgi karşısında hiçbir zaman pasif olmamıştır; bu nedenle, mevcut bilgi birikimini öğrenmekle yetinmemiş, bu birikimin eksiklerini ve hatalarını gidermek ve düzeltmek için bütün gücüyle çalışmıştır; ondalık kesirler konusunda varmış olduğu sonuçlar, bu yargının en güvenilir kanıtlarından biridir.

Bu verilerin ışığı altında, hem İslâm Dünyası'ndaki bilimsel araştırmaları konu edinen bilim tarihi eserlerinin (ve özellikle de aritmetik, trigonometri ve astronomi tarihlerinin) ve hem de genel bilim tarihi eserlerinin yeniden gözden geçirilmesi ve Takiyüddin ibn Maruf'un konuya yapmış olduğu katkıları gösterir yeni bölümlerle düzeltilmesi gerekmektedir.

Tablo 1

SAYILAR	1		2		3		4		5		6		7		8		9	
	tam	kesir	tam	kesir	tam	kesir	tam	kesir	tam	kesir	tam	kesir	tam	kesir	tam	kesir	tam	kesir
1	0	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	6	0	7	0	8	0	9
2	0	2	0	4	0	6	0	8	1	0	1	2	1	4	1	6	1	8
3	0	3	0	6	0	9	1	2	1	5	1	8	2	1	2	4	2	7
4	0	4	0	8	1	2	1	6	2	0	2	4	2	8	3	2	3	6
5	0	5	1	0	1	5	2	0	2	5	3	0	3	5	4	0	4	5
6	0	6	1	2	1	8	2	4	3	0	3	6	4	2	4	8	5	4
7	0	7	1	4	2	1	2	8	3	5	4	2	4	9	5	6	6	3
8	0	8	1	6	2	4	3	2	4	0	4	8	5	6	6	4	7	2
9	0	9	1	8	2	7	3	6	4	5	5	4	6	3	7	2	8	1

Tablo 2

Bölünenin türü

Bölenin türü

Çarpanlardan birinin ya da karekökün türü

Karekökü Alınacak Kesirli Sayı	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}	Birler
10^{5}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{-5}
10^{4}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{-4}
10^{3}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}	10^{-3}
10^{2}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{-2}
10^{1}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{-1}
1	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}	1
10^{-1}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}	10^{6}	10^{1}
10^{-2}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}	10^{6}	10^{7}	10^{2}
10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}	10^{6}	10^{7}	10^{8}	10^{3}
10^{-4}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}	10^{6}	10^{7}	10^{8}	10^{9}	10^{4}
10^{-5}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}	10^{6}	10^{7}	10^{8}	10^{9}	10^{10}	10^{5}
Birler	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}	Karekökü Alınacak Tam Sayı

Diğer Çarpanın ya da Karekökün Türü

Tablo 3

YAY	SİNÜS	FARK
1	0 1 7 5	0 1 7 4
2	0 3 4 9	0 1 7 4
3	0 5 2 3	0 1 7 5
4	0 6 9 8	0 1 7 4
5	0 8 7 2	0 1 7 3
6	1 0 4 5	0 1 7 4
7	1 2 1 9	0 1 7 3
8	1 3 9 2	0 1 7 4
9	1 5 6 4	0 1 7 2
10	1 7 3 6	0 1 7 2
11	1 9 0 8	0 1 7 1
12	2 0 7 9	0 1 7 1
13	2 2 5 0	0 1 6 9
14	2 4 1 9	0 1 6 9
15	2 5 8 8	0 1 6 8
16	2 7 5 6	0 1 6 8
17	2 9 2 4	0 1 6 6
18	3 0 9 0	0 1 6 6
19	3 2 5 6	0 1 6 4
20	3 4 2 0	0 1 6 4
21	3 5 8 4	0 1 6 2
22	3 7 4 6	0 1 6 1
23	3 9 0 7	0 1 6 0
24	4 0 6 7	0 1 5 9
25	4 2 2 6	0 1 5 8
26	4 3 8 4	0 1 5 6
27	4 5 4 0	0 1 5 5
28	4 6 9 5	0 1 5 3
29	4 8 4 8	0 1 5 2
30	5 0 0 0	0 1 5 0

31	5150	0149
32	5299	0147
33	5446	0146
34	5592	0144
35	5736	0142
36	5878	0140
37	6018	0139
38	6157	0136
39	6293	0135
40	6428	0133
41	6561	0130
42	6691	0129
43	6870	0127
44	6947	0124
45	7071	0122
46	7193	0121
47	7314	0117
48	7431	0116
49	7547	0113
50	7660	0111
51	7771	0109
52	7880	0106
53	7986	0104
54	8090	0102
55	8192	0098
56	8290	0097
57	8387	0093
58	8480	0092
59	8572	0088
60	8660	0086

61	8 7 4 6	0 0 8 3
62	8 8 2 9	0 0 8 1
63	8 9 1 0	0 0 7 8
64	8 9 8 8	0 0 7 5
65	9 0 6 3	0 0 7 2
66	9 1 3 5	0 0 7 0
67	9 2 0 5	0 0 6 7
68	9 2 7 2	0 0 6 4
69	9 3 3 6	0 0 6 1
70	9 3 9 7	0 0 5 8
71	9 4 5 5	0 0 5 6
72	9 5 1 1	0 0 5 2
73	9 5 6 3	0 0 5 0
74	9 6 1 3	0 0 4 6
75	9 6 5 9	0 0 4 4
76	9 7 0 3	0 0 4 1
77	9 7 4 4	0 0 3 7
78	9 7 8 1	0 0 3 5
79	9 8 1 6	0 0 3 2
80	9 8 4 8	0 0 2 9
81	9 8 7 7	0 0 2 6
82	9 9 0 3	0 0 2 2
83	9 9 2 5	0 0 2 0
84	9 9 4 5	0 0 1 7
85	9 9 6 2	0 0 1 4
86	9 9 7 6	0 0 1 0
87	9 9 8 6	0 0 0 8
88	9 9 9 4	0 0 0 4
89	9 9 9 8	0 0 0 2
90	10 0 0 0	0 0 0 0

Tablo 4

YAY	TANJANT	FARK	YAY
1	0 0 0 1 7 5	0 0 0 1 7 4	89
2	0 0 0 3 4 9	0 0 0 1 7 5	88
3	0 0 0 5 2 4	0 0 0 1 7 5	87
4	0 0 0 6 9 9	0 0 0 1 7 6	86
5	0 0 0 8 7 5	0 0 0 1 7 6	85
6	0 0 1 0 5 1	0 0 0 1 7 7	84
7	0 0 1 2 2 8	0 0 0 1 7 7	83
8	0 0 1 4 0 5	0 0 0 1 7 9	82
9	0 0 1 5 8 4	0 0 0 1 7 9	81
10	0 0 1 7 6 3	0 0 0 1 8 1	80
11	0 0 1 9 4 4	0 0 0 1 8 2	79
12	0 0 2 1 2 6	0 0 0 1 8 3	78
13	0 0 2 3 0 9	0 0 0 1 8 4	77
14	0 0 2 4 9 3	0 0 0 1 8 6	76
15	0 0 2 6 7 9	0 0 0 1 8 8	75
16	0 0 2 8 6 7	0 0 0 1 8 9	74
17	0 0 3 0 5 6	0 0 0 1 9 3	73
18	0 0 3 2 4 9	0 0 0 1 9 4	72
19	0 0 3 4 4 3	0 0 0 1 9 6	71
20	0 0 3 6 3 9	0 0 0 2 0 0	70
21	0 0 3 8 3 9	0 0 0 2 0 1	69
22	0 0 4 0 4 0	0 0 0 2 0 5	68
23	0 0 4 2 4 5	0 0 0 2 0 7	67
24	0 0 4 4 5 2	0 0 0 2 1 1	66
25	0 0 4 6 6 8	0 0 0 2 1 4	65
26	0 0 4 8 7 7	0 0 0 2 1 8	64
27	0 0 5 0 9 5	0 0 0 2 2 2	63
28	0 0 5 7 1 7	0 0 0 2 2 6	62
29	0 0 5 5 4 3	0 0 0 2 3 1	61
30	0 0 5 7 7 4	0 0 0 2 3 5	60

31	0 0 6 0 0 9	0 0 0 2 4 0	59
32	0 0 6 2 4 9	0 0 0 2 4 5	58
33	0 0 6 4 9 4	0 0 0 2 5 1	57
34	0 0 6 7 4 5	0 0 0 2 5 7	56
35	0 0 7 0 0 2	0 0 0 2 6 3	55
36	0 0 7 2 6 5	0 0 0 2 7 1	54
37	0 0 7 5 3 6	0 0 0 2 8 7	53
38	0 0 7 8 1 3	0 0 0 2 8 5	52
39	0 0 8 0 9 8	0 0 0 2 9 3	51
40	0 0 8 3 9 1	0 0 0 3 0 2	50
41	0 0 8 6 9 3	0 0 0 3 1 1	49
42	0 0 9 0 0 4	0 0 0 3 2 1	48
43	0 0 9 3 2 5	0 0 0 3 3 2	47
44	0 0 9 6 5 7	0 0 0 3 4 3	46
45	0 1 0 0 0 0	0 0 0 3 5 5	45
46	0 1 0 3 5 5	0 0 0 3 6 9	44
47	0 1 0 7 2 4	0 0 0 3 8 2	43
48	0 1 1 1 0 6	0 0 0 3 9 7	42
49	0 1 1 5 0 4	0 0 0 4 1 4	41
50	0 1 1 9 1 8	0 0 0 4 3 1	40
51	0 1 2 3 4 9	0 0 0 4 5 0	39
52	0 1 2 7 9 9	0 0 0 4 7 1	38
53	0 1 3 2 7 0	0 0 0 4 9 4	37
54	0 1 3 7 6 4	0 0 0 5 1 7	36
55	0 1 4 2 8 1	0 0 0 5 4 5	35
56	0 1 4 8 2 6	0 0 0 5 7 3	34
57	0 1 5 3 9 9	0 0 0 6 0 4	33
58	0 1 6 0 0 3	0 0 0 6 4 0	32
59	0 1 6 6 4 3	0 0 0 6 7 8	31
60	0 1 7 3 2 1	0 0 0 7 1 9	30

61	0 1 8 0 4 0	0 0 0 7 6 7	29
62	0 1 8 8 0 7	0 0 0 8 1 9	28
63	0 1 9 6 2 6	0 0 0 8 8 7	27
64	0 2 0 5 0 3	0 0 0 9 4 2	26
65	0 2 1 4 4 5	0 0 1 0 1 5	25
66	0 2 2 4 6 0	0 0 1 0 9 9	24
67	0 2 3 5 5 9	0 0 1 1 9 2	23
68	0 2 4 7 5 1	0 0 1 3 0 0	22
69	0 2 6 0 5 1	0 0 1 4 2 4	21
70	0 2 7 4 7 5	0 0 1 5 6 7	20
71	0 2 9 0 4 2	0 0 1 7 3 1	19
72	0 3 0 7 7 7	0 0 1 9 1 2	18
73	0 3 2 7 0 9	0 0 2 1 6 5	17
74	0 3 4 8 7 6	0 0 2 4 4 7	16
75	0 3 7 3 2 1	0 0 2 7 8 4	15
76	0 4 0 1 0 8	0 0 3 2 0 7	14
77	0 4 3 3 1 5	0 0 3 7 4 1	13
78	0 4 7 0 4 6	0 0 4 4 0 0	12
79	0 5 1 4 4 6	0 0 5 2 6 7	11
80	0 5 6 7 1 3	0 0 6 4 2 5	10
81	0 6 8 1 3 8	0 0 7 9 0 5	9
82	0 7 1 0 4 3	0 1 0 4 0 0	8
83	0 8 1 4 4 3	0 1 3 7 0 1	7
84	0 9 5 1 1 4	0 2 9 1 5 7	6
85	1 1 4 3 0 1	0 2 9 7 0 6	5
86	1 4 3 0 0 7	0 4 7 8 0 4	4
87	1 9 0 8 1 1	0 9 5 5 5 2	3
88	2 8 6 3 6 3	2 8 6 5 3 8	2
89	5 7 2 9 0 1	∞>tg 90°|ctg0°	1
90	∞	∞>tg 90°|ctg0°	0
YAY	**KOTANJANT**	**FARK**	**YAY**

Tablo 5

ALTMIŞLI	ONLU	ALTMIŞLI	ONLU
1	0 1 7	31	5 1 7
2	0 3 3	32	5 3 3
3	0 5 0	33	5 5 0
4	0 6 7	34	5 6 7
5	0 8 3	35	5 8 3
6	1 0 0	36	6 0 0
7	1 1 7	37	6 1 7
8	1 3 3	38	6 3 3
9	1 5 0	39	6 5 0
10	1 6 7	40	6 6 7
11	1 8 3	41	6 8 3
12	2 0 0	42	7 0 0
13	2 1 7	43	7 1 7
14	2 3 3	44	7 3 3
15	2 5 0	45	7 5 0
16	2 6 7	46	7 6 7
17	2 8 3	47	7 8 3
18	3 0 0	48	8 0 0
19	3 1 7	49	8 1 7
20	3 3 3	50	8 3 3
21	3 5 0	51	8 5 0
22	3 6 7	52	8 6 7
23	3 8 3	53	8 8 3
24	4 0 0	54	9 0 0
25	4 1 7	55	9 1 7
26	4 3 3	56	9 3 3
27	4 5 0	57	9 5 0
28	4 6 7	58	9 6 7
29	4 8 3	59	9 8 3
30	5 0 0	60	10 0 0

Tablo 6

ALTMIŞLI	ONLU	ALTMIŞLI	ONLU
1	0 0	31	0 9
2	0 0	32	0 9
3	0 0	33	0 9
4	0 1	34	0 9
5	0 1	35	1 0
6	0 1	36	1 0
7	0 2	37	1 0
8	0 2	38	1 1
9	0 2	39	1 1
10	0 3	40	1 1
11	0 3	41	1 2
12	0 3	42	1 2
13	0 3	43	1 2
14	0 4	44	1 3
15	0 4	45	1 3
16	0 4	46	1 3
17	0 5	47	1 3
18	0 5	48	1 3
19	0 5	49	1 4
20	0 5	50	1 4
21	0 6	51	1 4
22	0 6	52	1 4
23	0 6	53	1 5
24	0 7	54	1 5
25	0 7	55	1 5
26	0 7	56	1 6
27	0 8	57	1 6
28	0 8	58	1 6
29	0 8	59	1 6
30	0 8	60	1 6