

**PİYASA RİSKİ HESABI VE SİÇRAMALI STOKASTİK SÜREÇLER:
İMKB 100 ENDEKSİNE AİT UYGULAMA****Kasırğa YILDIRAK¹****ÖZET**

Bu makalede İMKB 100 endeksi ile ilgili risk hesabı için sıçramalı stokastik bir süreç kullanılmıştır. Portföyün sadece bir adet endeks ürününden oluştuğu varsayılmıştır. Risk ölçütü olarak tutarlılığı ispat edilmiş olan beklenen kayıp alanı yöntemi seçilmiştir ve bu alanın hesabı Monte Carlo yöntemi ile yapılmıştır. Düzgün ve sürekli kısmı geometrik Brown hareketi, sıçramalı kısmı bileşik Poisson süreç ile temsil edilmiş sıçramalı stokastik süreç tahmin edilerek risk hesabında kullanılmıştır. Sıçrama büyüklükleri hem Normal hem Gamma dağılım varsayımı altında incelenmiştir. Sonuçlar diğer risk hesabı metotları ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Piyasa Riski, Monte Carlo Simülasyonu, Sıçramalı Stokastik Süreçler.

**JUMP DIFFUSION PROCESSES AND MARKET RISK:
IMPLEMENTATION ON İMKB 100 INDEX****ABSTRACT**

A jump diffusion model is considered for risk computations of İMKB 100 index. A portfolio with only one index product is considered. A coherent risk measure Expected Shortfall is chosen to be the measure of the risk. Expected Shortfall is computed by Monte Carlo method. Smooth part of the stochastic process is modeled by geometric Brownian motion while the jump part follows compound Poisson process. Magnitude of the jumps are assumed to come from normal and gamma distribution for two different models. Results are compared with other expected shortfall computation methods.

Key Words: Market Risk, Monte Carlo Simulation, Jump Diffusion Processes

¹ Yrd. Doç. Dr., Trakya Üniversitesi, İktisat Bölümü, kasirgayildirak@gmail.com

Giriş

Finansal risk ve riskten korunma modellerinde stokastik süreçler önemli bir yer tutmaktadır. Bu süreçler özellikle türev ürün fiyatlamaları ve riske maruz değer hesaplamalarında yoğun olarak kullanılmaktadır. Uluslararası literatür incelendiğinde, düzgün, kırılmalara izin vermeyen süreçlerin yoğun olarak kullanıldığı görülür. Bu süreçlerin en çok bilinen ve kullanılan Geometrik Brown Hareketidir. Avrupa tipi Vanilya opsiyonlar için analitik çözümler sağlaması, bu sürecin önemini arttırmıştır². Ancak, gerçekçi olmayan bazı varsayımlar ile analitik çözüme ulaşma çabası modelin gerçeği yansıtmaya gücünü azaltmıştır. Bu makalede, bu varsayımlardan bir tanesi olan süreklilik varsayımı esnetilerek elde edilen sıçramalı stokastik süreçlerin riske maruz değer hesabında nasıl kullanılabileceği gösterilecektir.

1990'lı yılların ortalarından itibaren Riske Maruz Değer (RMD) hesabı ve bu hesaba ilişkin raporlamalar bankacılık sektöründe büyük önem kazanmıştır. Bankaların günlük RMD hesabını BDDK'ya rapor etmeleriyle, bankacılık sistemi piyasa riski bağlamında denetlenebilmeye başlanmıştır. Beynelminel piyasa modelleri genellikle aşırı oynaklıklara müsaade etmeyen modellerdir. Burada temel amaç, çözümün hızlı olduğu analitik sonuçlara ulaşabilmektir. Modern finans matematiği disiplinin ana gayesi bir çok farklı piyasa modeli için analitik çözümler aramaktır. Black Scholes modelini piyasa gerçeklerinden uzaklaştıran varsayımlarından biri, fiyatların lognormal ve getirilerin de normal dağıldığı varsayımdır. Bu modelde getirilerin (dolayısı ile fiyatların) aşağıdaki süreci takip ettiğini varsayılır³:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

Burada, S_t finansal varlığın t zamanındaki fiyatını, μ ve σ ise, varlık getirilerinin ortalama ve standart sapmasını göstermektedir. Rasgeleliğin modellendiği W_t ise, Wiener süreci temsil etmektedir. Bu stokastik süreç Geometrik Brown hareketi olarak anılır. Eşitlik 1'de tanımlanan stokastik diferansiyel denklemin $[t-1, t]$ aralığı için risk nötral ölçü Q altındaki çözümü

² Black, F., and M. Scholes (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, 81, 637-654

³ Black, F., and M. Scholes (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, 81, 637-654

aşağıdaki gibidir⁴.

$$S_t = S_{t-1} \exp \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma W_t^Q \right) \quad (2)$$

Bu çalışmada ise, aşağıdaki süreç ele alınacaktır:

$$d \log S_t = \mu dt + \sigma dW_t + dJ_t \quad (3)$$

Burada, J_t değişkeni sıçramayı temsil etmektedir. Eşitlik 3'te verilen modelin risk nötral olasılık ölçüsü Q altındaki çözümü aşağıdaki gibidir:

$$S_T = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T \right\} \prod_j \log Y_j \quad (4)$$

Burada Y_j sıçramaların büyüklüğünü temsil etmektedir. (4) nolu denklemin Euler yaklaşımı ile P olasılığı altında⁵ $t_i - t_{i+1}$ zaman aralığındaki kesikli ifadesi ise, aşağıdaki şekilde gösterilir.⁶

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \sum_j \log Y_j \quad (5)$$

Burada,

- $X_t = \log S_t$,
- $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sim N(0, (t_{i+1} - t_i))$,
- $N_{t_{i+1}-t_i} \sim Poisson(\lambda(t_{i+1} - t_i))$ ve
- $Y \sim N(\alpha, \beta^2)$, (alternatif olarak $Y \sim \Gamma(a, b)$) şeklinde tanımlanmıştır.

Riske Maruz Değer, Beklenen Kayıp Alanı ve Monte Carlo Simülasyonu

Risk ölçümleri içerisinde en yaygın olarak kullanılan ölçüm tekniği Riske Maruz Değer (RMD) tekniğidir. Riske Maruz Değer belli bir elde tutma süresi için, pozisyonlar sabit iken belli bir güven aralığında portföyün tecrübe edebileceği en zararlı değişimi gösterir⁷.

Riske Maruz Değer, risk ölçümü olma açısından matematiksel olarak tutarlı bir ölçüm olma özelliğini her zaman garanti edemez. Eliptik dağılımlar için tutarlı bir ölçü olmasına rağmen RMD tarafından üretilen

⁴ Kasırga Yıldırak - Nilüfer Çalışkan - Şirzat Çetinkaya, "Türev Ürün Fiyatlama Teknikleri", Literatür Yayınevi, 2008, sfi 34

⁵ Risk hesabı yapılacağından Q olasılık ölçüsü altında çalışmamız gerekmektedir

⁶ Paul Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag 2003 s 78

⁷ Phillippe Jorion, *Value at Risk*, 2nd Edition, McGraw Hill, 2000, s 75

bilgi, analizciye çoğu zaman fazla bilgi verememektedir⁸⁹. Buna rağmen, yaygın kullanım alanı bulmuştur. Bunun en önemli nedeni ise, diğer ölçümlere göre basit ve hızlı olmasıdır. Bankaların ya da risk hesabı yapmak durumunda olan finansal kurumların portföylerinin çok geniş olduğu ve sık aralıklarla ölçüm yapmak durumunda oldukları düşünüldüğünde Riske Maruz Değer ölçüm yöntemi haklı olarak kendine yaygın bir kullanım alanı bulmuştur.

Portföy değeri portföyü oluşturan finansal araçların net pozisyonlarının aynı para cinsinden değerlerinin toplamıdır. Portföy değeri PD, pozisyon değeri de P ile gösterildiğinde, N farklı pozisyondan oluşan bir portföyün değeri,

$$PD = P_1 + P_2 \dots + P_N$$

şeklinde gösterilir. Pozisyon enstrümanının elde tutulan miktarı ile hesabın yapıldığı andaki enstrüman değerinin fiyatı ile çarpımına eşittir. Miktarı Φ , fiyatı S ile gösterecek olursak matris gösterimi aşağıdaki ifade olur.

$$P = \Phi'S$$

Bir pozisyonun t zamanındaki değeri P_t ve fiyatı ise, S_t olarak gösterildiğinde bir portföyün pozisyonlar cinsinden t noktasındaki değeri aşağıdaki şekilde yazılır:

$$PD_t = P_{1,t} + P_{2,t} + P_{3,t} + \dots + P_{N,t}$$

Bu ifade miktar ve fiyat cinsinden ise,

$$PD_t = \phi_{1,t}S_{1,t} + \phi_{2,t}S_{2,t} + \dots + \phi_{N,t}S_{N,t} \quad (6)$$

şeklinde gösterilecektir. Portföy değerindeki Δt kadar bir periyotta yaşanan değişim, kesikli zamanda $\Delta PD_{\Delta t}$ ile gösterilir.

$$\Delta PD_{\Delta t} = PD_{t+\Delta t} - PD_t$$

Miktar ve fiyat cinsinden Δt zaman sonraki portföy değeri ise,

$$PD_{t+\Delta t} = \phi_{1,t+\Delta t}S_{1,t+\Delta t} + \phi_{2,t+\Delta t}S_{2,t+\Delta t} + \dots +$$

$$\phi_{N,t+\Delta t}S_{N,t+\Delta t}$$

dır. Görüldüğü üzere portföyün ileri bir zamandaki değeri miktar ve fiyat değişkenlerinin alacağı değerlere bağlıdır. Bu durum iki adet belirsizliği beraberinde getirir. Bu iki değişken arasında yatırımcı açısından bir fark

⁸ Paul Embrechts - Alexander Mc Neil - Daniel Strauman, Correlation: Pitfalls and Alternatives, Risk Magazine, 1999, s 69-71

⁹ Philippe Artzner - Freddy Delbaen - Jean-Marc Eber - David Heath, "Coherent Measures of Risk". *Mathematical Finance* 9 (3) 1999 s. 203-228

mevcuttur. Miktarlar yatırımcı tarafından belirlenebilir ya da *kontrol* edilebilirken, fiyatlar tamamen yatırımcılardan bağımsız olarak, piyasa tarafından belirlenmektedir. Finansal risk hesabı yapılırken yatırımcı açısından kontrol değişkeni niteliği taşıyan miktarların t anındaki değerini sabit kabul edeceğiz. Bu da RMD tanımı ile uyum göstermektedir. Bu durumda Δt zaman sonraki değer aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$PD_{\Delta t} = \phi_{1,t}S_{1,t+\Delta t} + \phi_{2,t}S_{2,t+\Delta t} + \dots + \phi_{N,t}S_{N,t+\Delta t}$$

Buna göre, belirsizlik sadece fiyattan kaynaklanmaktadır ve bu risk piyasa riskinin bir konusu olarak karşımıza çıkar. Miktarlar sabit diğer bir ifade ile zamandan bağımsız olduğundan değişim aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\Delta PD = \phi_1 \Delta S_1 + \phi_2 \Delta S_2 + \dots + \phi_N \Delta S_N$$

Fiyat değişimlerine ilişkin getiri tanımı ise, kesikli ve sürekli zamanda aşağıdaki şekilde formüle edilir:

$$R_{\Delta t} = \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}, \quad R_{\Delta t} = \log \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right)$$

Portföyün getirisi ise,

$$R_{portfoy} = \frac{PD_{t+\Delta t} - PD_t}{PD_t}$$

olarak hesap edilir. Matris gösterimi ile Portföydeki değişimin R cinsinden değeri,

$$\Delta PD_t = PD_t R_{portfoy} \quad (7)$$

olarak ifade edilir. Portföyün getiri cinsinden Δt dönem sonra gelecekte alacağı değer ise,

$$PD_{t+\Delta t} = PD_t R_{\Delta t}$$

olacaktır. Bu durumda RMD, belli bir güven seviyesinde olabilecek en kötü getiriler bileşiminin bir fonksiyonu olacaktır. Normal dağılım varsayımı altında ve α güven seviyesindeki getiri değeri $R_{\Delta t}^\alpha$ için, Z değeri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$Z_\alpha = \frac{|R_{\Delta t}^\alpha| - \mu}{\sigma}$$

Bu durumda ΔPD_t^α , RMD değerini verir. Yukarıdaki model sıçrama terimi içerdiğinden, parametrik yaklaşım kullanarak RMD değerinin hesaplanması analitik olarak mümkün değildir. Bunun yanı sıra sıçrama terimi, dağılıma kesiklilik unsuru kattığından onun sürekli ve dolayısı ile eliptik bir dağılıma sahip olmasını engellenmektedir. Bu nedenle RMD, tutarlılık özelliğini yitirecektir. Bu çalışmada tutarlı olan Beklenen Kayıp Alan risk ölçüsü kullanılmıştır. Beklenen kayıp alan belli bir kantilden sonraki kuyruğun alanını hesap eder ve bunu risk ölçümü olarak raporlar.

RMD değeri ise kantil seçiminde yardımcı olacaktır. Çalışmada söz konusu olan bu alan Monte Carlo yöntemi ile hesaplanmıştır.

Monte Carlo simülasyonu (5) nolu ifade kullanılarak aşağıdaki adımlar çerçevesinde uygulanmıştır¹⁰. Bunlar:

1. $Poisson(\lambda(t_{i+1} - t_i))$ dağılımdan L rasgele sayısının türetilmesi,
2. L=0 ise, N değişkenini N=0 olarak atanması, L sıfırdan farklı ise, Adım 3'e gidilmesi,
3. L adet Y değerinin $N(\alpha, \beta^2)$ dağılımından üretilmesi, (ya da $\Gamma(a, b)$ dağılımından üretilmesi) ve Y değerlerinin toplamının N'ye eşitlenmesi,
4. Standart normal dağılımdan Z değerinin türetilmesi,
5. X'i değerinin Eşitlik 5 yardımıyla hesaplanması ve
6. Önceden belirlenmiş iterasyon sayısına ulaşıncaya dek Adım 1'e dönülmesidir.

Burada yukarıda verilen adımların izlenmesiyle iterasyon sayısı kadar X değerleri üretilecektir. Bu da X'in dağılımına benzetme yoluyla yaklaşılmasına olanak sağlayacaktır. Parametre vektörü $\Theta = \{\mu, \sigma, \alpha, \beta, \lambda\}$ 'nin tahmin problemi ise, bir sonraki bölümde açıklanmaktadır. X değişkeninin benzetim yolu ile elde edilmesi dağılım hakkındaki tüm istatistiklerin elde edilmesine olanak sağlayacaktır. Beklenen kayıp alanı da önceden belirlenmiş belli bir güven seviyesi α ve sol tarafındaki RMD değerlerinin olasılıkları ile ağırlıklandırılmış ortalaması olacaktır.

Model Parametrelerinin Tahmini

Model iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm sıçrama ve kırılmaların olmadığı bölüm olup, Brown hareketi ile temsil edilmektedir. İkinci bölüm ise, sıçramaların modellendiği bileşik Poisson kısmıdır. Çalışmada bu iki parçayı ayırmak için bir eşik değer tespit edilmesi gerekir. Bu eşik değerinin zaman içinde değiştiği varsayılmıştır. Mancini¹¹, eşik

¹⁰ Paul Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag 2003 s 78

¹¹ Cecillia Mancini, Non-Parametric Threshold Estimation for Models with Stochastic Diffusion Coefficient and Jumps, *Scandinavian Journal of Statistics* (36), 2009

değerinin aşağıdaki şekilde tahmin edilebileceğini göstermiştir.

$$v_t = c * h_t$$

Burada h_t volatilitiyi; c ise, bir sabiti göstermektedir. c değeri, karekök c adet standart sapma analogisi ile anlaşılabilir. Bu çalışmada c değeri sıçramaları %5'lik bir dilime sokacak şekilde "9" olarak belirlenmiştir. h_t ise, GARCH(1,1) kullanılarak oluşturulmuş ve aşağıdaki kural uygulanarak sıçramalar ayrılmıştır:

$$Y_i = \Delta X_t I_{\{\Delta X^2 \geq v_t\}}$$

Sıçramalı kısmın ayrılmasından sonra her iki kısım ayrı ayrı tahmin edilecektir. Brown hareketi kısmı için GARCH(1,1) model uygun görülmüş olup koşullu ortalama ve koşullu varyans hesap edilmiştir:

$$\Delta X_t = \mu_t + h_t^{\frac{1}{2}} Z_t$$

$$h_t = K + p h_{t-1} + q \epsilon_{t-1}^2$$

Sıçramalı kısım için ise sadece bir sıçramanın olduğu varsayımı altında, sıçramalı kısma ait gözlemler normal dağılım ve gözlemlerin mutlak değerleri de Gamma dağılım varsayımı ile modellenmektedir.

Uygulama ve Sonuçlar

Çalışmada elde edilen sonuçlar, sadece geometrik Brown kısmından oluşan Monte Carlo (EWMA ($\lambda = 0.94$), GARCH(1,1), ve Momentler Metodu ile hesap edilmiş 3 ayrı varyans için), klasik ve filtreli (GARCH(1,1) filtresi) tarihsel simülasyon sonuçları ile karşılaştırmıştır. Dikkat edilirse tüm risk hesabı yöntemleri tümünden değerlemeyi (full valuation) esas alır. Doğrulama olarak geriye dönük sınamayı esas almaktayız. Bu sınamada 2 ayrı kriteri aynı anda değerlendirdik. Portföy sahibinin risk modeli bağlamında iki amacı vardır. Birincisi hesap etmiş olduğu risk değerinin gerçekleşen değişimden az olmamasıdır. Örneğin ertesi gün için hesaplanan risk değeri -500 TL gerçekleşen değişim (kayıp) ise -720 TL olsun. Bu durumda model kaybı öngörememiş olur. İkinci kriter ise ekstra sermaye ayırmamaktır ki bu da hesap edilen risk tutarının gerçekleşen risk tutarından fazla ama aradaki farkın minimum olmasını gerektirir. Diyelim ki yukarıdaki örnekte aynı gün için risk hesabı -1000 TL olarak hesap edilmiş olsun. Bu durumda da 280 TL tutarında fazladan sermaye ayrılacaktır.

Hesaplar IMKB 100 indeksi için yapılmış olup 30.07.2002 ile

14.10.2010 tarihleri arasındaki günlük gözlemleri kapsamaktadır ve 2060 adet gözlem bulunmaktadır. EWMA, GARCH gibi koşullu istatistik gerektiren yöntemler için 1000 günlük dönen pencereler halinde hesaplamalar yapıldığından toplam 1060 gün için bir günlük risk değeri hesap edilmiştir.

Aşağıdaki tabloda (Tablo 1) 1060 gün içinde hangi modelin kaç kez gerçekleşen zarardan daha düşük risk değeri hesap ettiği (ki bu durum piyasa da hit olarak anılmaktadır), ortalama olarak ne kadar fazladan sermaye ayırdığı verilmiştir.

Tablo 1: Metotların Karşılaştırılması

Model	Hit	Ekstra (Endeks getirisi cinsinden)
Jump Model Gauss	4	0.224
Jump Model Gamma	3	0.229
Monte Carlo EWMA	7	0.178
Monte Carlo GARCH	7	0.187
Monte Carlo MM	9	0.166
Tarihsel	9	0.177
Tarihsel Filtreli	6	0.203

Yukarıdaki tablodan da görüldüğü üzere Jump Gamma modeli en az hit sayısına sahip iken doğal olarak en çok sermaye ayrılan model olmuştur. Bu tablodan da anlaşılacağı üzere sıramalı modellerin diğer modellere üstün olup olmadığını saptayabilmek mümkün olmamaktadır. Çünkü doğrulama olarak ortalama değerler kullandık ve banka risk dairesinin modele bütün periyot boyunca müdahale etmediğini varsaydık. Oysa aşıkardır ki farklı durumlarda (state) farklı modelin uygulanması gerekecektir. O halde mümkünse tamamen dışsal bir durum değişkeninin belirlenip modellenmesi ve bu durum değişkeninin aldığı değerlere göre yukarıdaki modellerden birinin uygulanması gerekir. Bankalar açısından bunu yapabilmek kolaylıkla mümkün olmamaktadır. Bunun en önemli sebebi bankaların risk hesabı ve raporlaması yapmasındaki en önemli itici gücün BDDK'nın getirdiği zorunluluk olmasıdır. Bir başka ifade ile risk hesap ve raporlaması, bankaların kendileri tarafından öngörülen bir faaliyetten ziyade BDDK tarafından mecbur edilmeleri neticesinde gündemlerine aldıkları bir

meseledir. Bankalar da bu bağlamda BDDK'nın daha kolay onay vereceği yöntemleri dolayısı ile daha çok kabul görmüş model ve tahmin yöntemlerini seçmektedirler.

Sıçramalı modelleri bir çok başka şekilde modellemek mümkündür. Yukarıdaki modellere stokastik volatilité eklenip Gibbs örnekleme algoritması ile tahmin edilebilir. Ayrıca sıçrama ifadesi stokastik volatilité denklemine eklenerek Stochastic Volatility Jump Diffusion modeller elde edilir ki bu modellerin tanım itibari ile daha esnek çalışması beklenir. Bu makalenin amacı sadece sıçramalı stokastik süreçlerin kurgulanma ve tahmin problemini ortaya koymak ve olası çözümlerden bir kaçını aktarmaktır.

Yukarıda, sürecin adımlarını modellediğimiz zaman aralığında, sadece bir sıçrama olduğu varsayımı ile model kesikli halde ifade edilmişti. Bu ciddi varsayımın sebebi bir entervalde birden fazla sıçrama olduğunda (bileşik Poisson) hem sıçrama sayısında hem de sıçrama büyüklüklerindeki belirsizlikten dolayı parametrelerin tahmin edimesindeki zorluktur.

KAYNAKÇA

- Artzner P., Delbaen F., Eber J., Heath D., "Coherent Measures of Risk". *Mathematical Finance* 9 (3) 1999 s. 203–228
- Black, F., and M. Scholes (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, 637–654
- Embrechts P., McNeil A., Strauman D., Correlation: Pitfalls and Alternatives, *Risk Magazine*, 1999, s 69-71
- Glasserman P, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer-Verlag 2003 s 78
- Jorion J., *Value at Risk*, 2nd Edition, McGraw Hill, 2000, s 75
- Mancini C, Non-Parametric Threshold Estimation for Models with Stochastic Diffusion Coefficient and Jumps, *Scandinavian Journal of Statistics* (36), 2009
- Yıldırak K., Çalışkan N., Çetinkaya Ş., "Türev Ürün Fiyatlama Teknikleri", Literatür Yayınevi, 2008, sf 34