
EKONOMİK BİR UYGULAMA İLE KENDİNDEN UYARIMLI EŞİKSEL DEĞİŞEN VARYANSLI OTOREGRESİF MODEL

Ümran M. *TEKŞEN KAHRAMAN**, Aşır *GENÇ***

ÖZET

Bu çalışmada, eşiksel otoregresif (TAR) modeller sınıfından kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif (SETAR) modelin yapısı üzerinde durulmuştur. Model parametrelerini belirlemek için Tsay (1989)'in önerdiği yöntem kullanılmıştır. Farklı rejimlerde ortalamanın yanı sıra varyansta da eşiksellik yapısı düşünülerek varyansın modellenmesine çalışılmıştır. Uygulama verisi olarak 03.01.2005-30.12.2011 dönemini kapsayan serbest piyasadaki günlük altın fiyatları serisi TL cinsinden alınarak bir model oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kendinden Uyarımlı Eşiksel Ototoregresif Model, Lineer Olmama Testi, Eşiksel ARCH Model

SELF-EXCITING THRESHOLD AUTOREGRESSIVE MODEL WITH A ECONOMIC PRACTICE

ABSTRACT

In this study, structure of a self-exciting threshold autoregressive (SETAR) model which belongs to threshold autoregressive (TAR) model class and choosing its parameters are emphasized. To determine parameters of model, method which was offered by Tsay (1989), was used. Besides mean in different regime, it was considered variance has threshold. A model which was based on daily gold prices which were taken as Turkish lira and in period 03.01.2005-30.12.2011 were applied for numerical example was created.

Keywords: Self-Exciting Threshold Autoregressive Model, Nonlinearity Test, Threshold ARCH Model

* Dr., Selçuk Üniversitesi, İstatistik Bölümü.

** Prof.Dr., Selçuk Üniversitesi İstatistik Bölümü.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, bir zaman serisi için rejim değişimine imkân veren modeller ele alınacaktır. Eşiksel model serinin ortalamasında veya varyansında (veya her ikisinde) farklı parametrelere izin verebilmektedir. Zaman içinde bilinen bir noktada rejimini değiştiren süreçler için deterministik süreç ifadesi kullanılmaktadır. Rejim değişimi olan fakat yeri kestirilemeyen süreçler ise stokastik rejim gösteren süreçlerdir. Deterministik süreçler için doğrusal zaman serisi modelleri kullanılmaktadır. Stokastik rejim gösteren süreçler için ise farklı modeller bulunmaktadır. Bunlardan her rejiminde doğrusal bir AR modeli ile modellenen zaman serilerinin dinamik davranışı bu çalışmanın konusunu oluşturmaktadır. Yani, otoregresif parametreleri rejime bağlı olarak değişen AR modelleri ile modellenen zaman serileri ele alınacaktır.

Modellerden en çok öne çıkanı, eşiksel otoregresif (TAR) modelidir. İlk olarak Tong (1978) ve Tong ve Lim (1980) tarafından ele alınmıştır. Daha sonra Tong kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif modeli (SETAR) (1990) geniş bir biçimde açıklamıştır.

Tong (1978)'un geliştirdiği kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif modeller oldukça geniş bir uygulama alanına sahip olmuştur. Örneğin, Tong ve Yeung (1991) su kirliliği verisi, Yadav, Pope, Paudyal (1994) Future piyasalar, Watier ve Richardson (1995) epidemiyolojik uygulamalar, Lewis ve Ray (1997) deniz yüzeyi sıcaklığı, Montgomery ve diğ. (1998) US işsizlik oranları, Fuetch ve diğ. (1998) medikal çalışmalar, Clements ve Smith (2001) borsa oranları, Baragona ve diğ. (2003) eşiksel modellerde genetik algoritma kullanımı, Feng ve Liu (2003) Kanada GDP verisi, Kajitani, Keith ve Mcleod (2005) SETAR modelde yapay sinir ağları kullanımı, Khadaroo (2005) enflasyon verisi, Huang, Hwang ve Peng (2005) petrol fiyatları verisi, Hutchison ve diğ. (2010) Hindistan sermaye kontrolleri verisi, Pinson ve diğ. kıyı rüzgarları verisi, Campenhout (2006) yiyecek piyasası trendleri, Chen (2011) Çin sermaye kontrolleri, Yang ve Li (2012) DNA optimizasyonu için SETAR modeli kullanmıştır.

SETAR model, bir zaman serisinin ortalamasında farklı rejimlere izin vermektedir. Her bir rejimdeki süreç doğrusal AR süreci olarak ifade edilmektedir. Bu çalışmada, ayrıca, her rejimde değişen varyanslı bir sürece izin veren koşullu değişen varyanslı eşiksel otoregresif (SETARCH) model ele alınacaktır. Böylece finansal serilerin asimetrik yapısının modellenmesi amaçlanmaktadır.

Çalışmanın içeriği, ikinci bölümde SETAR model ve yapısal parametrelerinin belirlenmesi, üçüncü bölümde SETAR modelin SETARCH modele genişletilmesi ve modelin özellikleri ile son bölümde de Türkiye'deki altın fiyatları serisinin ele alınarak SETARCH modelin oluşturulması şeklinde düzenlenmiştir.

2. TEK DEĞİŞKENLİ SETAR MODELİ

Kendinden uyarımlı eşiksel otoregresif (SETAR) modeller, sınırlı döngü ve eşiksellik kavramlarıyla ilgili olduğu için geniş bir uygulama alanına sahiptir. SETAR modelin çok kullanılmasının bir diğer nedeni de diğer lineer olmayan zaman serisi modellerine göre daha kolay uygulanmasıdır.

k rejimli bir SETAR($d; p_1, p_2, \dots, p_k$) modeli,

$$Y_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{j=1}^{p_1} \phi_j^{(1)} Y_{t-j} + \varepsilon_t^{(1)}, & Y_{t-d} \leq r_1 \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{j=1}^{p_2} \phi_j^{(2)} Y_{t-j} + \varepsilon_t^{(2)}, & r_1 < Y_{t-d} \leq r_2 \\ \vdots & \vdots \\ \phi_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{p_k} \phi_j^{(k)} Y_{t-j} + \varepsilon_t^{(k)}, & r_{k-1} < Y_{t-d} \end{cases} \quad (1)$$

şeklinde kurulur (Chan ve diğ., 2004). Burada k , modeldeki rejim sayısı, d , gecikme parametresi ve p_i de modelin i . rejimindeki otoregresif sürecin sırasındır. Eşik parametreleri,

$$-\infty = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{k-1} < r_k = \infty \quad (2)$$

sınırlarını sağlar. Her bir i . Rejimdeki normal iid rasgele değişkenler $\varepsilon_t^{(i)}$, sıfır ortalamalı ve sabit $\sigma_i^2 < \infty$ ($i = 1, 2, \dots, k$) varyanslıdır. SETAR sürecinde üç önemli durum göze çarpar:

- AR modelin derecesi p , rejimler arasında farklılık gösterebilir.
- Rejimler arasında sadece gürültü terimlerinin varyansı $\sigma_j^2 = \text{Var}(a_t^{(j)})$ farklılık gösteriyorsa SETAR modeli homojen olmayan doğrusal bir AR modeli haline gelir.
- Farklı j 'ler için yalnızca sabit terim $\phi_0^{(j)}$ farklılık gösteriyorsa bu kez de model, düzeyin rasgele değiştiği bir modele indirgenir (Tsay, 1989).

Modeldeki üstsimgeler rejimleri göstermektedir. Her bir rejimde zaman serisi değişkeninin dinamik davranışı doğrusal bir otoregresif süreçtir. Herhangi bir t zamanındaki rejim $\{Y_t\}$ 'nin geçmiş gözlemlerine bağlıdır. Özellikle de Y_{t-d} değerine bağlıdır.

2.1. Eşiksel Doğrusal Olmama için Test

Eşitlik (1) ile verilen SETAR modeli ele alınsın. $p_1 = p_2 = \dots = p_k$ ve $\phi_i^{(1)} = \phi_i^{(2)} = \dots = \phi_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \dots, p$ olursa SETAR modeli p sıralı doğrusal bir otoregresif sürece dönüşür. Doğrusal olmayan eşiksel bir durumun varlığını test etmek için sıralı otoregresyon sürecine dayalı bir test geliştirilmiştir (Tsay,

1989). Hazırlanan test sıralı otoregresyona ve bu regresyonun artıklarına bağlıdır.

n gözlemleri Y_t serisi için, $Y_t = (1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})\beta + a_t$, $t = p+1, \dots, n$ şeklinde AR(p) regresyonu elde edilsin. Burada, β , ($p+1$) boyutlu katsayılar vektörü ve a_t gürültü sürecidir. Burada $(Y_t, 1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})$, AR(p) modeli için bir durumdur. Sıralı otoregresyon regresörlerin yeniden sıralanmış durumuna bağlı olarak oluşturulursa,

$$Y_t = \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(j)} Y_{t-i} + a_t^{(j)}, \quad r_{j-1} \leq Y_{t-d} \leq r_j \quad (3)$$

olmak üzere, $p = \max\{p_1, \dots, p_k\}$ ve $d \leq p$ değerleri için $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ zaman serisi gözlenmiş olsun. (i), $\{Y_{p+1-d}, \dots, Y_{n-d}\}$ dizisinin i . en küçük gözleminin zaman indeksini gösterebilir. Sıralı otoregresyon,

$$\begin{pmatrix} Y_{(1)+d} \\ Y_{(2)+d} \\ \vdots \\ Y_{(j)+d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Y_{(1)+d-1} & \cdots & Y_{(1)} & \cdots & Y_{(1)+d-p} \\ 1 & Y_{(2)+d-1} & \cdots & Y_{(2)} & \cdots & Y_{(2)+d-p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & Y_{(j)+d-1} & \cdots & Y_{(j)} & \cdots & Y_{(j)+d-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{(1)+d} \\ a_{(2)+d} \\ \vdots \\ a_{(j)+d} \end{pmatrix} \quad (4)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $j = m, m+1, \dots, n-p$ dir. m , sıralı regresyondaki başlangıç gözlemlerinin sayısıdır. $m \approx (n/10) + p$ olarak önerilmiştir (Tsay, 1989).

Eşitlik (4)'deki sıralı otoregresyonlar, genellikle, SETAR modelinin rejim göstergesi olan Y_{t-d} değişkeni ile ayrılır. Burada her j için, bir adım ileri öngörü hatası $\hat{e}_{(j+1)+d}$ hesaplanabilir. Modelin doğrusal AR(p) sürecine sahip olduğu varsayımı altında, standardize öngörü hataları yalnızca bağımsız ve aynı dağılımlı olmakla kalmaz, aynı zamanda $\{Y_{(j+1)+d-1}, \dots, Y_{(j+1)+d-p}\}$ regresörleri ile de ortogondur. Ancak gerçek model doğrusal olmayan SETAR süreci ise, ortogonallik bozulur. Bu özellik kullanılarak,

$$\underline{e} = \underline{Y}\underline{\beta} + \underline{\eta} \quad (5)$$

regresyon modeli oluşturulsun. Burada \underline{e} , $(\hat{e}_{(m+1)+d}, \dots, \hat{e}_{(n-p)+d})'$ vektörü, \underline{Y} , $j = m, m+1, \dots, n-p-1$ olmak üzere $\{Y_{(j+1)+d-1}, \dots, Y_{(j+1)+d-p}\}$ regresörlerinin matrisi, $\underline{\beta}$, p boyutlu parametre vektörü ve $\underline{\eta}$ hata vektörüdür.

Eşitlik (5)'teki regresyon modelinde

$$H_0 : \underline{\beta} = \underline{0}$$

hipotezinin testi için kullanılan F istatistiği ortogonalitesi ve SETAR tip doğrusal olmamayı test etmede de kullanılabilir. F istatistiği, doğrusal regresyon modelinin anlamlılığını test eden varyans analizi tablosu yardımıyla hesaplanır (Tsay, 1989).

Eşitlik (5)'te F testinin uygulanması için p ve d değerlerinin verilmesi gerekir. Ancak uygulamada, bunlar genellikle bilinmez.

2.2. Yapısal Parametrelerin Seçimi

p 'nin seçimi için X_t serisinin kısmi otokorelasyon fonksiyonunun (PACF) kullanılması önerilmiştir (Tsay, 1989). p değeri belirlendikten sonra en büyük F istatistiği değerini veren d seçilir. Rejim sayısı k ve eşik parametrelerinin yerlerini belirlemek için de çeşitli saçılım grafiklerinin kullanılması önerilmiştir. Eşitlik (4)'deki sıralı otoregresyon denkleminde $l \leq p$ olmak üzere $j = m, \dots, n - p$ değerleri için l AR katsayısının t oranları hesaplanabilir. t oranı, regresyon katsayısının sıfırdan farklı olup olmadığını test etmek için hesaplanan test istatistiğidir. Katsayı önemli olduğu zaman t oranları kademe kademe ve yumuşak bir geçişle belirli bir değer etrafında yinelemeli hareketler yapmaya başlar. Bir eşiğe ulaşıldığında tahmin edilen AR katsayısı değişmeye başlar, t oranı da değişmeye başlar, bazen de yön değiştirir. Böylece, t oranlarına karşı çizilen X_{t-d} rejim değişkeninin saçılım grafiği eşik değerlerinin yeri konusunda oldukça faydalı bilgiler sağlayabilir. Son olarak da, AR sırasını ($p_k \leq p$) iyileştirmek için her bir rejimde Akaike bilgi kriteri (AIC) kullanılır (Chan ve diğ., 2004).

p ve d değerlerini belirlemek için aşağıdaki yol önerilebilir.

Adım 1 X_t serisine ilişkin PACF değerleri yardımıyla p belirlenir.

Adım 2 İndislerde gerekli sıralamalar yapılarak Eşitlik (5)'deki regresyon modeli oluşturulur.

Adım 3 Mümkün $d = 1, 2, \dots, p$ değerleri için sırasıyla $j = m, m + 1, \dots, n - p - 1$ gözlemlerle otoregresyon eşitlikleri ile bir sonraki gözlem hatası $\hat{e}_{(j+1)+d}$ bulunur.

Adım 4 Eşitlik (5) yardımıyla her bir d değeri için F istatistiği değeri hesaplanır.

Adım 5 En büyük F değerini veren d seçilir.

Rejim sayısı ve eşik parametrelerinin yerlerini belirlemek için ise şu adımlar verilebilir.

Adım 1 Eşitlik (4)'den $j = m, \dots, n - p$ gözlem sayıları için l AR katsayısının önemliliğini test eden t istatistikleri hesaplanır.

Adım 2 Y_{t-d} değişkenine karşı t değerlerinin grafiği çizilir.

Adım 3 t değerlerinin ani değişme yaptığı bölgelerde eşik parametresi AIC kullanılarak araştırılır. Rejim sayısı eşik parametresi sayısından 1 fazla olacaktır.

2.3. Parametre Tahmini ve Model Yeterliliği

Eşitlik (4)'deki sıralı otoregresyon matrisi, $(d, k, p_1, \dots, p_k, r_1, \dots, r_{k-1})$ değerleri belirlendiğinde k rejime bölünmüş olur. π_l , l 'nin en büyük değeri olsun. Bu durumda $l = 1, \dots, k-1$ için $\{r_{l-1} < Y_{(\pi_l)}\} \leq r_l$ olur. $\pi_0 = 0$ ve $\pi_k = n - p$ olarak tanımlansın. Verinin j . rejimi için

$$\underline{Y}_j = \underline{A}_j \underline{\phi}^{(j)} + \underline{a}_j \quad (6)$$

doğrusal modeli elde edilir. Burada \underline{Y}_j ve \underline{A}_j , sırasıyla, gözlemlerin vektörü ve sıralı otoregresyonun j . rejimindeki veri matrisidir.

$$\underline{\phi}^{(j)} = (\phi_0^{(j)}, \phi_1^{(j)}, \dots, \phi_{p_j}^{(j)})' \quad (7)$$

ve

$$\underline{a}_j = (a_{(\pi_{j-1}+1)+d}^{(j)}, a_{(\pi_{j-1}+2)+d}^{(j)}, \dots, a_{(\pi_j)+d}^{(j)})' \quad (8)$$

şeklindedir.

En küçük kareler tahminleri $\underline{\phi}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, k$ için klasik en küçük kareler yöntemi ile elde edilebilir. Dolayısıyla,

$$\underline{\hat{\phi}}^{(j)} = (\underline{A}_j' \underline{A}_j)^{-1} (\underline{A}_j' \underline{Y}_j) \quad (9)$$

şeklindedir.

Model tahmin edildikten sonra artıklara ilişkin histogram ve otokorelasyonlar incelenerek modelin yeterliliğine karar verilebilir (Chan ve diğ. 2004). Hata terimlerinin normal dağılıma sahip olup olmadığına çeşitli istatistiksel testler aracılığıyla veya grafik yöntemleriyle karar verilebilir.

3. SETARCH MODELİNİN TANITIMI VE VARSAYIMLARI

Engle (1982)'in geliştirdiği ARCH tipi modellerin en büyük dezavantajı, model katsayılarının gözlem dönemi boyunca aynı olduğunu varsayması ve asimetrik rejim değişimi olasılığını hesaba katmamasıdır. Finansal zaman serilerinde koşullu varyansın davranışı, çoğunlukla bir önceki getiriye göre asimetrik yapıdadır (Franses ve Dijk, 2000). Durgunluk dönemlerinde, finansal varlıkların oynaklığı yüksek seviyelerdedir. Bir Wall Street deyimine göre, yükselen piyasada işlem hacmi görece daha çok, düşen piyasada ise daha azdır. Böyle bir asimetri yapısı fiyat-işlem hacmi için de geçerlidir. Böylece denilebilir ki, asimetrik oynaklık finansal zaman serilerinin karakteristik özelliğidir (Li ve

Li, 1996). Bu yapıdaki serileri modellemek için kendinden uyarımlı eşiksel koşullu değişen varyanslı otoregresif (SETARCH) model hazırlanmıştır.

F_{t-1} , $\{a_{t-i} | i = 1, 2, \dots\}$ rasgele değişkenleri ile üretilmiş bir σ -alanı olsun. F_{t-1} verildiğinde, her t için, a_t sıfır ortalamalı ve $E(a_t^2 | F_{t-1}) = h_t$ koşullu varyanslı normal dağılıma sahip rasgele değişkendir. Burada, $E(a_t | F_{t-1})$, verilen F_{t-1} için koşullu beklenen değerdir. Bir $\{Y_t\}$ zaman serisi,

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{p_j} \phi_i^{(j)} Y_{t-i} + a_t^{(j)}, \quad r_{j-1} \leq Y_{t-d} \leq r_j \\ h_t &= \alpha_0^{(j)} + \sum_{r=1}^{q_j} \alpha_r^{(j)} a_{t-r}^2, \quad r_{j-1} \leq Y_{t-d} \leq r_j \end{aligned} \quad (10)$$

koşullarını sağlıyorsa eşiksel koşullu değişen varyanslı otoregresif süreçtir denilir. Model, ortalama ve varyans için farklı gecikme ve eşik parametrelerine olanak sağlar. Ayrıca, eşiksellik etkisi ortalama ve varyansa aynı anda ortaya çıkmayabilir.

SETARCH model, Tong (1978)'un eşiksel modelinin bir genişletilmesidir. SETARCH model de eşiksel modele özgü koşullu ortalama yapısına sahip olduğundan aynı lineer olmama karakteristikleri geçerlidir. (10) modeli SETARCH $(d; p_1, p_2, \dots, p_k; q_1, q_2, \dots, q_k)$ ile gösterilir. Burada p_1, p_2, \dots, p_k parametreleri her bir rejimdeki AR sırasını göstermektedir. q_1, q_2, \dots, q_k ise aynı rejimdeki ARCH sırasını göstermektedir. Eğer bir rejimdeki ARCH sırası sıfır ise, bu rejimin koşullu varyansı sabittir. Eşitlik (10)'da Y_{t-d} yerine h_{t-d} veya a_{t-d}^2 ifadesi de gelebilir.

ARCH modelin varsayımları Weiss(1986) tarafından altı koşul halinde özetlenmektedir.

- (1) $\{Y_t\}$ zaman serisi durağan ve ergodiktir.
- (2) $E(Y_t^2) < \infty$
- (3) Koşullu varyansın tüm parametreleri sıfır veya sıfırdan büyüktür. $\alpha_0^{(k)} > 0$ ve $\alpha_r^{(k)} \geq 0$, $r = 1, 2, \dots, q_j$ ve $j = 1, 2, \dots, k$
- (4) $(1, \alpha_{t-1}^2, \alpha_{t-2}^2, \dots, \alpha_{t-q_k}^2)$ doğrusal olarak bağımsızdır.
- (5) h_t , her rejimde sabitse (10) modeli durağandır.
- (6) $\alpha^{(k)} = (\alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_{q_k}^{(k)})'$ olsun. $k \neq k'$ ise $\alpha^{(k)} \neq \alpha^{(k')}$ 'dir. Aynı durum $\phi^{(j)} = (\phi_0^{(j)}, \phi_1^{(j)}, \dots, \phi_{p_j}^{(j)})'$ için de geçerlidir.

Koşullardan (1), (2), (3) ve (5) durağan bir koşullu değişen varyanslı ve eşiksel lineer olmayan zaman serisi süreci için verilen varsayımlardır (Tong, 1990). (4) koşulu $\alpha^{(j)}$ parametrelerinin tanımlı olmasını sağlar (Weiss, 1986). (6) koşulu ise tam bir SETARCH modelin tanımlı olması için gereklidir (Li ve Li, 1996).

SETARCH modelin oluşturulmasında ilk olarak modelin koşullu ortalama yapısındaki gecikme, eşik parametreleri ve AR sırası belirlenir. Eğer bir eşiksellik yapısı saptanırsa ikinci kısımda (10) eşitliği ile verilen koşullu varyans ARCH yapısı belirlenir. Eşiksellik saptanamazsa, en uygun AR modelden elde edilen artık karelere Tsay'in yöntemi uygulanarak eşiksellik yapısı ve ARCH sırası belirlenir. Bir eşiksellik yapısı belirlenirse tam bir SETARCH modeli düşünülür. İkinci adım Tsay'in yöntemini koşullu varyansa genişletir. Modelleme süreci şöyle özetlenebilir:

Ekonomik Bir Uygulama İle Kendinden Uyarımlı Eşiksel Değişen Varyanslı Otoregresif Model

Adım 1 Önceki bölümde ele alınan SETAR modelleme süreci uygulanarak bir koşullu ortalama eşitliği oluşturulur.

Adım 2 Adım 1’de oluşturulan geçici modelden $\hat{\sigma}_t^2$ artık kareleri hesaplanır.

Adım 3 Artık kareleri kullanılarak her bir rejimdeki ARCH sırası belirlenir.

Adım 4 (10)’daki koşullu ortalama ve koşullu varyans eşitlikleri belirlendikten sonra SETARCH modelin parametreleri en çok olabilirlik yöntemiyle hesaplanır.

Adım 5 Her rejimdeki AR ve ARCH sırası AIC ile düzenlenir.

Adım 6 Adım 5 ile elde edilen en son modele model yeterliliği kriterleri uygulanır ve gerekiyorsa (1)-(5) adımları yeniden uygulanır.

Koşullu ortalama modelinin yeterliliğini test etmek için artık otokorelasyonları hesaplanır. Ardışık bağımlılık testleri, artık varyansının sabitliğine ilişkin testler ve artıkların normallik incelemesi yapılarak model yeterliliği ile ilgili karar verilir.

4. UYGULAMA

Bu bölümde, altın fiyatları verisi kullanılarak SETAR modelleme yöntemi gösterilecektir. Uygulama verisi olarak, 03.01.2005-30.12.2011 dönemini kapsayan 1311 gözlemlili serbest piyasadaki günlük altın fiyatları TL cinsinden alınmış ve ($\times 10^{-3}$) işlemi uygulanmıştır. Veri (Y_t), web üzerinden http://www.iab.gov.tr/ay_veri.asp adresinden derlenmiştir. Sayısal hesaplamalar ve grafikler MATLAB 7.7.0(R2008b) ortamında hazırlanmıştır.

Bir zaman serisinde Tsay (1989)’in yöntemiyle eşiksel doğrusal olmama testi yapmak için ilk olarak serinin durağan zaman serilerindeki gibi AR sırası belirlenir (Yue ve Xiaonan, 2011). Y_t serisi için birim kök araştırması yapılmış ve genişletilmiş Dickey-Fuller (ADF) test istatistiği sonuçları üç model için, Tablo 1’deki gibi elde edilmiştir. Modele dahil edilen gecikme sayısı SIC ile seçilmiştir.

Tablo 1. Altın fiyatları serisi için ADF testi sonuçları

<i>ADF</i>	<i>p</i>
Kesmeli ve trendli	0.5807
Kesmeli ve trendsiz	0.3155
Kesmesiz ve trendsiz	0.9978

Altın fiyatları verisi birim kök içerdiğinden getiri serisi hesaplanarak işlem yapılacaktır.

$$R_t = [\ln(Y_t) - \ln(Y_{t-1})] \times 100$$

Bu dönüşüm finans ve ekonomi literatüründe standart bir dönüşümdür. Altın fiyatları serisi ve R_t getiri serisinin zamana göre değişimini gösteren grafik Şekil 1 ile verilmiştir. R_t serisi için de ADF testi ile birim kök incelemesi yapılmış ve serinin birim kök içermediği görülmüştür (Tablo 2).

Tablo 2. R_t serisi için ADF testi sonuçları

ADF	P
Kesmeli ve trendli	0.0001
Kesmeli ve trendsiz	0.0001
Kesmesiz ve trendsiz	0.0001

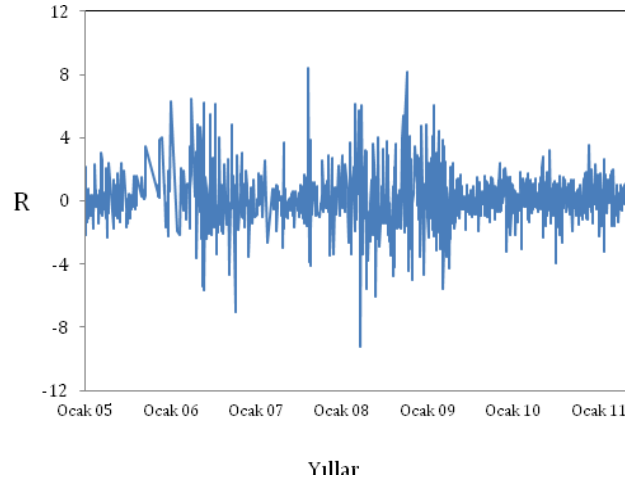
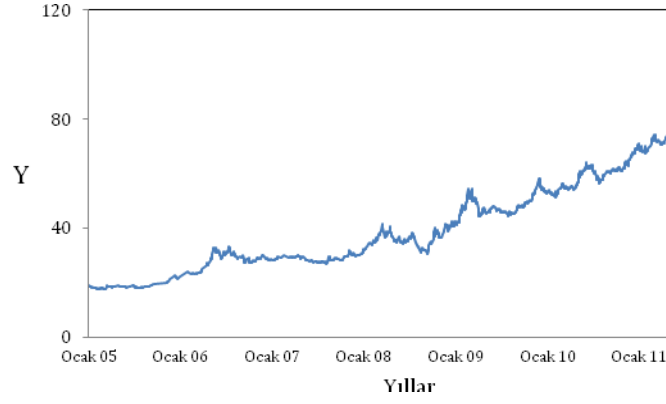
Serinin kısmi otokorelasyon fonksiyonları Tablo 3'deki gibi hesaplanarak AR sırası $p = 7$ olarak belirlenmiştir. Kısmi otokorelasyon grafiği Şekil 2'de yer almaktadır.

Tablo 3. R_t serisinin kısmi otokorelasyonları*

Sıra	PACF	Sıra	PACF	Sıra	PACF	Sıra	PACF	Sıra	PACF
1	-.065	11	-.006	21	-.028	31	-.015	41	.010
2	-.019	12	.037	22	.005	32	-.001	42	-.007
3	-.026	13	-.003	23	-.049	33	.001	43	.0151
4	-.025	14	-.014	24	-.028	34	.024	44	.0104
5	.084	15	-.008	25	-.013	35	-.028	45	-.019
6	.046	16	.025	26	-.013	36	.033	46	-.048
7	-.065	17	.012	27	.046	37	-.001	47	-.012
8	.006	18	.033	28	.001	38	.028	48	-.046
9	.048	19	-.033	29	-.026	39	.021	49	.015
10	.045	20	.004	30	-0.01	40	.024	50	-.052

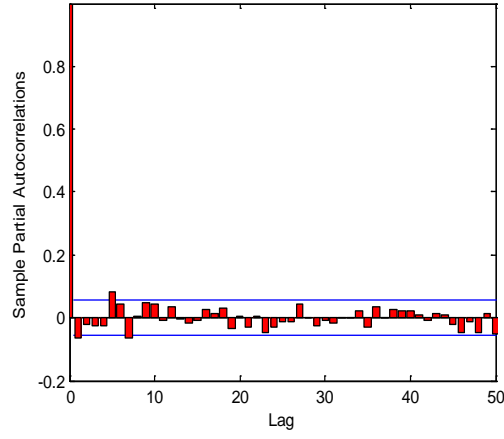
*Sınırlar -0.0553 ve 0.0553'tür.

Şekil 1. Altın fiyatları serisi ve getiri serisinin zamana göre değişim grafiği



AR sırası belirlendikten sonra $d = 1, 2, \dots, 7$ kümesi için F istatistikleri Tablo 4'deki gibi hesaplanmıştır. F tablo değeri $F_{8,1158;0.05} = 1.94$ olduğundan bir lineer olmama durumunun varlığından söz edilir. d için en yüksek F istatistiğini veren $d = 2$ değeri eşik değeri belirlemede kullanılacaktır. Öncelikle $d = 2$ için yinelemeli regresyon artıklarının ve anlamlı çıkan katsayılar için t oranlarının R_{t-2} rejim değişkenine karşı grafikleri elde edilmiştir (Şekil 3 ve 4).

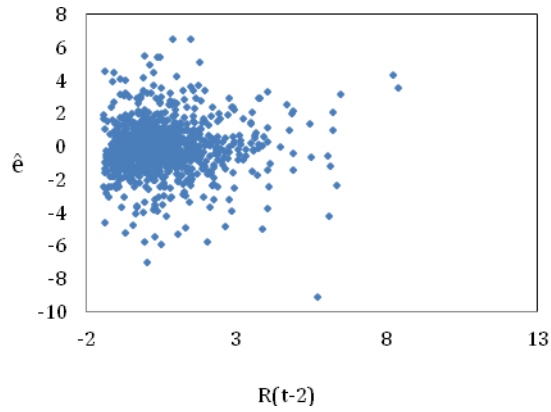
Şekil 2. R_t serisinin PACF grafiği



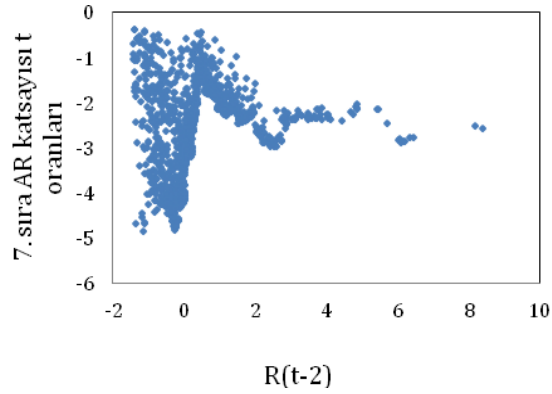
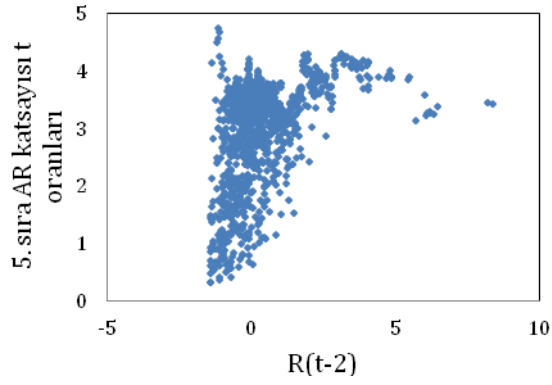
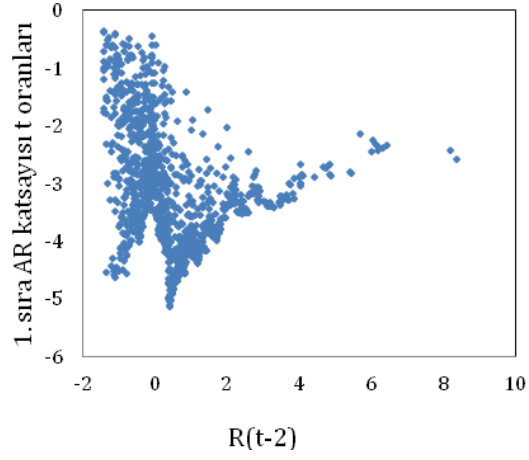
Tablo 4. F istatistiği değerleri

p	d	F
7	1	4.140
7	2	4.328
7	3	3.067
7	4	2.798
7	5	3.293
7	6	2.449
7	7	3.249

Şekil 3. R_{t-2} rejim değişkenine karşı $\hat{\epsilon}$ saçılım grafiği



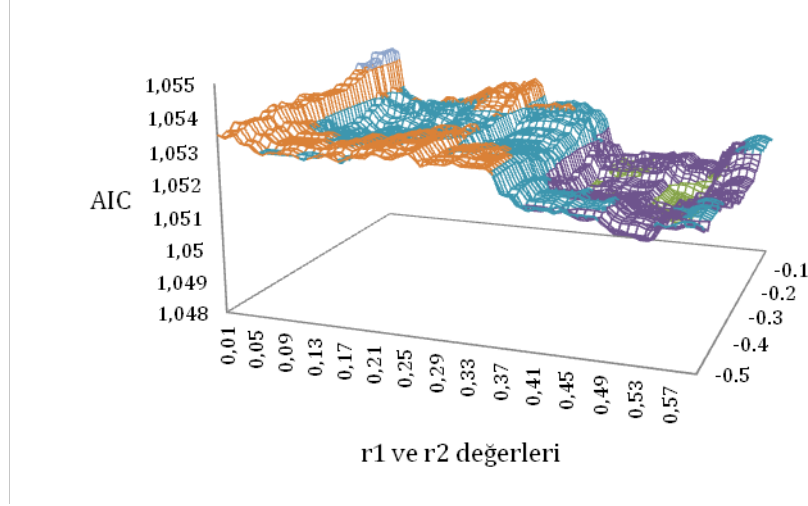
Şekil 4. Yinelemeli regresyon AR katsayıları t oranlarının R_{t-2} rejim değişkenine karşı saçılım grafiği



Rejim değişkeni R_{t-2} 'ye karşı $\hat{\epsilon}$ artıklarının saçılım grafiği rejim değişkeni konusunda açık bir bilgi vermemektedir. Anlamli çıkan 1, 5 ve 7. gecikmelerin AR katsayılarının R_{t-2} 'ye karşı grafikleri incelenecek olursa 1. ve 7. gecikme katsayılarının 0'dan önce ve sonra olmak üzere açık bir şekilde yön değiştirdiği görülmektedir. Bu nedenle, iki eşikli ve üç rejimli bir model

oluşturulmaya çalışılacaktır. İlk eşik değeri r_1 için $[-0.5,1]$ aralığından ve ikinci eşik değeri r_2 için $[0,0.6]$ aralığından modelin AIC değerini en küçük hale getirecek şekilde seçim yapılmıştır. Birinci ve ikinci eşik değerinin AIC değerini gösteren grafikler Şekil 5 ile verilmiştir. Buna göre, $r_1 = -0.399$ ve $r_2 = 0.544$ olarak belirlenmiştir.

Şekil 5. Eşik değerine göre modelin AIC değerleri



Eşik değerleri belirlendikten sonra $d = 2$ olmak üzere SETAR(3,7,7,7) modelinin artıklarının değerlendirilmesine geçilmiştir. Artıklara ve artık karelerine ilişkin otokorelasyon fonksiyonu değerleri Tablo 5'de verilmiştir. Artıkların otokorelasyon değerleri sınır değerlerin altında kalırken artık kareleri için 4. sıra otokorelasyonunun anlamlı olduğu görülmektedir.

Tablo 5. Artıkların ve artık karelerinin otokorelasyon fonksiyonu değerleri*

Sıra	ACF(\hat{a})	ACF(\hat{a}^2)	Sıra	ACF(\hat{a})	ACF(\hat{a}^2)
1	-0.0092	0.0279	11	0.0402	0.0094
2	0.0081	0.0062	12	0.0323	0.0234
3	-0.019	0.0404	13	0.0023	0.0026
4	-0.0017	0.0676	14	-0.0149	0.0046
5	-0.0177	0.0217	15	0.0268	0.0481
6	0.043	0.0055	16	0.018	0.03
7	-0.0233	0.0425	17	0.0202	-0.0133
8	-0.0422	0.0321	18	0.012	0.0536
9	-0.0464	0.0066	19	-0.0118	0.0072
10	-0.0195	0.0091	20	-0.0081	0.0609

* Sınırlar -0.0554 ve 0.0554'dür.

$(d, k, r_1, r_2) = (2, 3, -0.399, 0.544)$ parametrelerine göre AIC değerini en küçük hale getirecek şekilde rejimlerde AR sıraları güncellenmiş ve ARCH-LM

Ekonomik Bir Uygulama İle Kendinden Uyarımlı Eşiksel Değişen Varyanslı Otoregresif Model

testi uygulanarak ARCH sırası belirlenmiştir. ARCH-LM testi yalnızca ilk rejim için anlamlı çıkmıştır. İstatistik değeri 11.864 ($p = 0.0185$) olarak elde edilmiş ve ARCH sırası da 4 olarak belirlenmiştir. Buna göre SETARCH modeli,

$$R_t = \begin{cases} 0.172(0.078) - 0.078(0.0404)R_{t-1} + 0.0798(0.0423)R_{t-5} \\ \quad - 0.099(0.0403)R_{t-7}, & R_{t-2} \leq -0.399 \\ 0.189(0.065) - 0.117(0.048)R_{t-1} - 0.158(0.051)R_{t-3} - 0.125(0.052)R_{t-4} \\ \quad + 0.128(0.049)R_{t-7}, & -0.399 < R_{t-2} \leq 0.544 \\ 0.038(0.137) + 0.053(0.045)R_{t-1} + 0.024(0.066)R_{t-2} + 0.006(0.045)R_{t-3} \\ \quad - 0.027(0.045)R_{t-4} + 0.051(0.046)R_{t-5} + 0.0012(0.046)R_{t-6} \\ \quad - 0.099(0.048)R_{t-7}, & R_{t-2} > 0.544 \end{cases}$$

$$h_t = \begin{cases} 1.514(0.161) + 0.038(0.034)\alpha_{t-1}^2 + 0.141(0.048)\alpha_{t-2}^2 + 0.115(0.051)\alpha_{t-3}^2 \\ \quad + 0.219(0.060)\alpha_{t-4}^2, & R_{t-2} \leq -0.399 \\ 2.917, & -0.399 < R_{t-2} \leq 0.544 \\ 2.671, & R_{t-2} > 0.544 \end{cases}$$

olarak elde edilmiştir. Parantez içindeki sayılar parametrelerin standart sapmalarını göstermektedir. Her rejim için gözlem sayıları $n_1 = 412$, $n_2 = 464$ ve $n_3 = 427$ 'dir. Hata kareler ortalaması ise sırasıyla 2.917, 1.916 ve 2.671'dir.

SETARCH modelin artıklarını incelerken ilk olarak artıkların tanımlayıcı istatistikleri ele alınabilir. Tablo 4'den görüleceği gibi artıklarda hafif sağa çarpık ve sivri bir dağılım gözlenmiştir. Otokorelasyon fonksiyonu ve histogram grafikleri Şekil 7 ile verilmiştir.

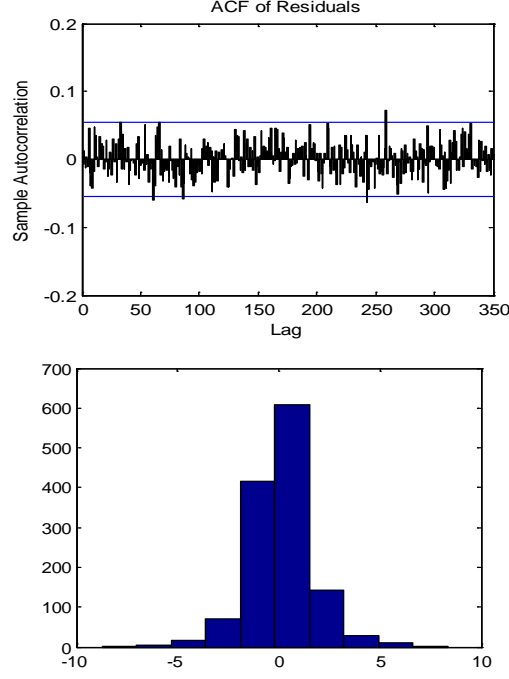
Tablo 4. Artıkların tanımlayıcı istatistikleri

n	En küçük	En büyük	Ortalama	Std. Sapma	Çarpıklık	Basıklık
1303	-8.7258	8.3518	0.1273	1.5650	0.1633	3.6307

Artıkların ardışık bağımlılığını incelemek için otokorelasyon fonksiyonları ve Ljung-Box Q test istatistiği kullanılmıştır. $Q(30)=23.516$ ve $Q(60)=44.216$ olarak hesaplanmıştır. İstatistikleri kıyaslamak için tablo değerleri $\chi^2(22)=33.92$ ve $\chi^2(52)=67.5$ olduğundan artıkların ardışık bağımlılık göstermediği söylenebilir.

Artıkların varyansının sabitliğini test etmek için ise McLeod testi kullanılmıştır. McLeod testi de Ljung-Box Q istatistiği ile aynı tablo değerleri ile karşılaştırılır. $Q(30)=39.178$ ve $Q(60)=102.016$ olarak hesaplandığından artıkların varyansının sabit olmadığı söylenir. Artıkların normalliğini sınamak için de Kolmogorov-Smirnov ve Jarque-Bera test istatistikleri kullanılmış ve K-S test istatistiği değeri 2.962 ($p = 0.0001$) ve JB test istatistiği de 57.05 olarak elde edilmiştir. Jarque-Bera testi için kritik değer $\chi^2(2)=5.99$ 'dur. Her iki istatistiğe göre de artıklar normal dağılıma uymamaktadır.

Şekil 7. SETARCH modelinin artıklara ait otokorelasyon fonksiyonu grafiği ve histogram



Tahmin edilen doğrusal zaman serisi modelinin geçerli olabilmesi için modelin artıklarının korelasyonsuz olması ve beyaz gürültü sürecine sahip olması gerekmektedir (Kınacı, 2005). Ancak elde edilen modelin artıkları beyaz gürültü sürecine uymamaktadır. Bu nedenle varyansı modellemek için genelleştirilmiş ARCH (GARCH) model veya diğer ARCH ve GARCH model türevleri kullanılabilir. Bu çalışmada ARCH dışındaki modeller konu dışı olduğundan burada değinilmeyecektir.

5. SONUÇ

Zaman serilerinin nasıl bir davranış sergilediğini öngörmek oldukça zordur. Özellikle ekonomik ve finansal zaman serilerini her zaman doğrusal olarak modellemek yetersiz kalabilmektedir. Bu nedenle geliştirilen doğrusal olmayan zaman serisi modellerinden eşiksel modeller, farklı rejimlere izin vermesi açısından faydalıdır. Eşiksel otoregresif modeller ekonomik verilerde getiri serilerinin modellenmesinde oldukça kullanışlı olmaktadır. Ortalama ve varyans için farklı rejimlerde farklı katsayıların oluşturulması otoregresif kalıba daha esnek bir yapı vermektedir.

Türkiye’de 03.01.2005-30.12.2011 dönemindeki günlük altın fiyatları verisinin doğrusal olmayan bir yapıda olduğu görülmüştür. SETAR tipi doğrusal olmamayı test eden Tsay (1989)’in F testine göre eşiksel model uygulanabilir. Altın getirisinin -0.399 ’dan küçük olması ve 0.544 ’den büyük olması ile bu iki değer arasında kaldığında farklı modeller ile modellenebileceği görülmüştür.

Ancak artık varyanslarının sabit olmaması ve artıkların beyaz gürültü sürecine uyum göstermemesi açısından varyansın modellenmesi ile ilgili bu çalışmada değinilmeyen diğer modellerin de incelenmesinin fayda getireceği söylenebilir.

Alıntı

Bu çalışma, Ümran M. Tekşen Kahraman tarafından Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Bölümüne sunulan “Çok Değişkenli Eşiksel Otoregresif Modeller Üzerine Bir Çalışma” isimli Doktora tez çalışmasının (Konya, Türkiye, 2012) bir parçasıdır. Çalışma, Selçuk Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinatörlüğü tarafından 2011/11201051 proje numarasıyla destek almıştır.

KAYNAKLAR

- Baragona, R., Battaglia, F., (2004), "Estimating threshold subset autoregressive moving-average models by generic algorithms", METRON- International Journal of Statistics, vol. LXII, No:1, 39-46.
- Campenhout B.V., (2006), "Modelling trends in food market integration: Method and an application to Tanzanian maize markets", Food Policy, Volume 32, Issue 1.
- Chen, J., (2012), "Crisis, Capital Controls and Covered Interest Parity: Evidence from China in Transformation", Paris-Jourdan Sciences Economiques, CNRS : UMR8545.
- Clements, M., Smith, J., (2001), "Evaluating Forecasts from SETAR Models of Exchange Rates", Journal of International Money and Finance, vol.20, 133-148.
- Dufrenot, G., Guegan, D., Peguin-Feissolle, A., (2008), "Changing-regime volatility: a fractionally integrated SETAR model" Applied Financial Economics, Taylor and Francis Journals, vol. 18(7), 519-526.
- Engle, R.F., (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", Econometrica, Vol. 50, No. 4, 987-1008.
- Feng, H., Liu, J., (2003), "A SETAR model for Canadian GDP: non-linearities and forecast comparisons", Applied Economics, Volume 35, Issue 18.
- Franses, P.H., Dijk, D., (2000), Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance, Cambridge University Press, Cambridge.
- Galeano, P., Pena, D., (2007), "Improved model selection criteria for SETAR time series models", Journal of Statistical Planning and Inference, Volume: 137, Issue: 9, 2802-2814.
- Gonzalo, J., Wolf, M., (2005), "Subsampling inference in threshold autoregressive models", Journal of Econometrics, 127, 201-224.
- Huang, B.N., Hwang, M.J., Peng, H.P., (2005), "The asymmetry of the impact of oil price shocks on economic activities: An application of the multivariate threshold model", Energy Economics, Volume 27, Issue 3.
- Hutchison, M., Kendall, J., Pasricha, G., Singh, N., (2010), "Indian Capital Control Liberalization: Evidence from NDF markets", Munich Personal RePEc Archive.
- Kajitani, Y., Keith, W.H., Mcleod, A.I., (2005), "Forecasting nonlinear time series with feed-forward neural networks: a case study of Canadian lynx data", Journal of Forecasting, Volume 24, Issue 2.
- Kapetanios, G., Shin, Y., (2006), "Unit root tests in three-regime SETAR models", The Econometrics Journal, Vol. 9, Issue 2, 252-278.
- Khadaroo, A.J., (2005), "A threshold in inflation dynamics: evidence from emerging countries", Applied Economics, Volume 37, Issue 6.
- Kıncı, İ., (2005), Lineer Olmayan Zaman Serisi Modelleri, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, Konya.
- Li, C.W., Li, W.K., (1996), "On a Double Threshold Autoregressive Heteroscedastic Time Series Model", Journal of applied Econometrics, vol. 11, 253-274.
- Montgomery, A., Zarnowitz, V., Tsay, R.S., Tiao, G., (1998), "Forecasting the US unemployment Rate", Journal of the American Statistical Association, vol:93, 478-493.
- Pinson, P., Christensen, L.E.A., Madsen, H., Sørensen, P.E., Donovan, M.H., Jensen, L.E., (2008), "Regime-switching modeling of the fluctuations of offshore wind generation", Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Volume 96, Issue 12.
- Seo, M.H., (2008), "Unit root test in a threshold autoregression: asymptotic theory and residual-based block bootstrap," Econometric Theory, 24, 1699-1716.
- Strikholm, B., Teräsvirta, T., (2006), "A sequential procedure for determining the number of regimes in a threshold autoregressive model," Econometrics Journal, 9, 472-491.
- Tekşen Kahraman, Ü.M., (2012), "Çok Değişkenli Eşiksel Otoregresif Modeller Üzerine Bir Çalışma", Yayımlanmamış Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Tong, H. and Lim, K.S., (1980), "Threshold Autoregression, Limit Cycles and Cyclical Data", Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 42, 245-292.
- Tong, H., (1978), "On a threshold model", In Pattern Recognition and Signal Processing (C. H. Chen, ed.) 101--141. Sijthoff and Noordhoff, Amsterdam.

- Tong, H., (1990), *Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach*, Oxford University Press, New York.
- Tsay, R., (1989), "Testing and Modelling Threshold Autogressive Processes", *Journal of the American Statistical Association*, 84: 231-240.
- Weiss, A.A., (1986), "Asymptotic Theory for ARCH Models: Estimation and Testing", *Econometric Theory*, Vol. 2, No. 1, pp. 107-131.
- Yang, X.H., Li, Y.Q., (2012), "DNA Optimization Threshold Autoregressive Prediction Model and Its Application in Ice Condition Time Series", *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2012, Article ID 191902, 10 pages, doi:10.1155/2012/191902.