



## TABAKALI EĞRİ ÇUBUKLARIN DİNAMİK KARARLILIK ANALİZİ

### (*DYNAMIC STABILITY ANALYSIS OF LAMINATED CURVED BEAMS*)

Ali GÜNYAR<sup>1</sup>, Hasan ÖZTÜRK<sup>1</sup>, Mustafa SABUNCU<sup>1</sup>

#### ÖZET/ABSTRACT

Bu çalışmada, düzlem içerisinde belirli bir eğriliğe sahip tabakalı kompozit dairesel bir yay parçasının, merkez açısının ve tabakalardaki fiber açılarının değişiminin dinamik kararlılığa etkileri sonlu elemanlar metodu kullanılarak araştırılmıştır. Ayrıca birinci doğal frekans ve burkulma yükü değerleri ANSYS programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve eğri çubuğun merkez açısının, fiber açılarının, statik ve dinamik yük parametresinin kararlılık bölgeleri üzerindeki etkileri grafikler ile gösterilmiştir.

*In this study, the effects of variations of subtended angle and orientation angle of a laminated curved beam having an in-plane curvature, on the dynamic stability have been investigated by using the Finite Element Method. In addition, the results obtained from this study are compared with the results obtained from ANSYS program for the fundamental natural frequency and critical buckling load. The effects of variations of subtended angle, orientation angle, static and dynamic load parameters on the stability regions are shown in graphics.*

#### ANAHTAR KELİMELELER/KEYWORDS

Dinamik kararlılık, Tabakalı kompozit eğri çubuk, Titreşim, Sonlu elemanlar  
*Dynamic stability, Laminated curved beam, Vibration, Finite elements*

<sup>1</sup> DEÜ, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 35397 Buca, İZMİR

## 1. GİRİŞ

Kompozit malzemelerin ortaya çıkışı ile bunların kullanımı giderek artmaktadır. Özellikle ileri teknoloji kullanılan uçak, savunma sanayi ve buna benzer alanlarda kompozit eğri çubuklar önem kazanmaktadır. Bu alanlarda ortaya çıkan dinamik ve statik stabilite problemleri kompozit eğri çubukların bu alanlarda kullanımıyla, bu malzemeler üzerinde araştırma yapmayı ilginç hale getirmiştir.

Kompozit çubuklar ile ilgili bir çok araştırma bulunmaktadır. Bu çalışmalardan bazıları özetlersek: Loja vd., isotropik olmayan tabakalı kompozit çubuğun lineer burkulma davranışını yüksek dereceli kesme deformasyonu teorisi kullanarak sonlu elemanlar metodu ile incelemiştir (Loja vd., 1997). Ayrıca çalışmada çubuğu oluşturan plaklar simetrik ve asimetric olarak ele alınmıştır. Qatu, kompozit eğri çubuklar için tutarlı bir eşitlik geliştirmiş ve farklı sınır koşullarına sahip bu tür çubuklar için sonuçlar elde etmiştir (Qatu, 1992). Tseng vd., dinamik rijitlik analizi ile değişken eğrilikli kompozit eğri çubukların düzlem içi titreşimlerini incelemiştir (Tseng vd., 2000). Qatu, ince ve modellenmiş kalın tabakalı kompozit eğri çubuklar için kesme deformasyonu, atalet momenti, eğrilik ve kalınlık oranları ve malzeme özelliklerinin doğal frekanslar üzerindeki etkisini çalışmıştır (Qatu, 1993).

Eğri çubukların titreşim ve elastik kararlılıkları üzerine yapılan çalışmalarda kısaca özetlenir ise: Sabuncu, değişik yer değiştirme fonksiyonları için eğrisel çubukların doğal frekans analizini incelemiştir (Sabuncu, 1978). Sabir ve Ashwel, seçtikleri dört değişik yer değiştirme fonksiyonu için doğal frekans analizi yapmışlardır (Sabir ve Ashwel, 1971). Petyt ve Fleischer, değişik sınır şartlarında eğrisel çubuğun serbest titreşimlerini incelemiştir (Petyt ve Fleischer, 1971). Bolotin, değişik sınır şartlarında eğri çubukların dinamik ve statik stabilite problemini incelemiştir (Bolotin, 1964). Thomas ve Abbas eksenel periyodik yük altındaki Timoshenko çubuğunun dinamik stabilitesini sonlu elemanlar ve Bolotin yaklaşımı ile araştırmışlardır (Thomas ve Abbas, 1976). Bazant ve Cedolin, eğri çubukların burkulma analizini analitik ve enerji metodlarını kullanarak yapmışlardır (Bazant ve Cedolin, 1991). Timoshenko ve Gere, iki ucu mafsallı Bernoulli-Euler eğrisel çubuğunun burkulmasını analitik metotla incelemiştir (Timoshenko ve Gere, 1961). Yoo vd., sonlu elemanlar metodu kullanarak eğri çubukların burkulma analizini araştırmışlardır (Yoo vd., 1996). Karaagac vd., eğri bir çubuktaki çatlağın, dinamik yük altındaki dinamik kararlılığına olan etkisini incelemiştir (Karaagac vd., 2011). Kawakami vd., değişik kesitli ve rasgele şekilli yatay eğri çubukların hem düzlem içi hem de düzlem dışı serbest titreşiminin analizini araştırmak için yaklaşık bir metod kullanmışlardır (Kawakami vd., 1995).

Bu çalışmada, düzlem içerisinde belirli bir eğriliğe sahip tabakalı kompozit dairesel bir yay parçasının merkez açısının, tabakalardaki fiber açılarının, statik ve dinamik yük parametrelerinin değişiminin dinamik kararlılığa etkileri sonlu elemanlar metodu kullanılarak araştırılmıştır. Çubuk, Sonlu Elemanlar Metodu ile modellenmiştir. Birinci ve ikinci dinamik kararsızlık bölgeleri, statik ve dinamik parametreye göre grafikler halinde verilmiştir.

## 2. ELASTİSİTE MODÜLÜ YAKLAŞIMI

Klasik tabakalı plak teorisine göre simetrik tabakalı çubuğun düzlem içi yer değiştirmelerin ve düzlem içi kuvvetlerin sıfır olduğu düşünüldüğü zaman birim uzunluktaki Moment Eşitlik 1 elde edilir (Reddy, 1997).

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Eşitlik 1'in tersini yazarsak

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

elde edilir. Burada  $D_{ij}^* = D^{-1}_{ij}$  eşittir.

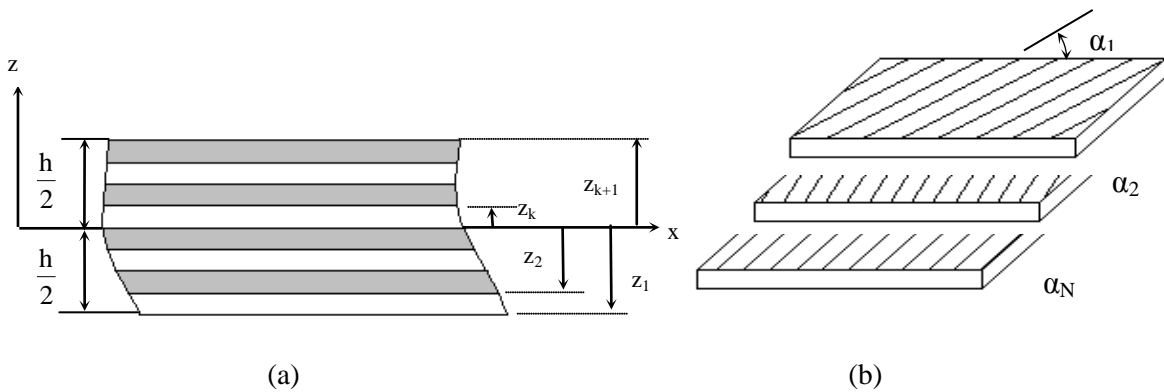
Tabakalı çubuk teorisinde  $M_{yy} = M_{xy} = 0$  olarak kabul edersek Eşitlik 2'den

$$\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} = -D_{11}^* M_{xx}, \quad \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} = -D_{12}^* M_{xx}, \quad 2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} = -D_{16}^* M_{xx} \quad (3)$$

elde edilir. Eşitlik 3'te dikkat edilirse  $\omega_0$  yer değiştirmesi, Poisson etkisi ( $D_{12}^*$ ) ve anizotropik kesme kuvvet çifti ( $D_{16}^*$ ) sebebiyle  $y$  koordinatından bağımsız değildir. Eğer çubuk boyu ile çubuk genişliği arasındaki oran büyük ise yukarıdaki etkileri ihmal edebiliriz. Böylece Eşitlik 3'ten sadece  $\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} = -D_{11}^* M_{xx}$  denklemini göz önüne alırız. Bu eşitlik ile Euler çubuk teorisinde bilinen  $M(x)$  moment denklemi kullanarak, tabakalı kompozit bir çubuk için yaklaşık bir elastisite modülü:

$$M = b M_{xx} \rightarrow E_{xx}^b = \frac{12}{h^3 D_{11}^*} \quad (4)$$

olarak elde edilir. Burada  $b$  genişlik,  $h$  ise tabaka kalınlığıdır.



Şekil 1. Çubuğu oluşturan tabakalar

Eğilme rijitlik matrisi olarak adlandırılan  $D_{ij}$  matrisi şekil 1-b' de gösterilen her tabaka için hesaplanır (Her tabaka için  $\bar{Q}_{ij}$  Ek-1'de verilmiştir).

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (5)$$

Burada tabakalar Şekil 1a'da görüldüğü gibi x eksenini boyunca kalınlıkları aynı olacak şekilde sayı bakımından simetrik yerleştirilmiştir.

### 3. EĞRİ ÇUBUĞUN SONLU ELEMANLAR MODELİ

Bu çalışmada kullanılan ve belirli bir eğrilik açısına ( $\theta$ ) sahip eğri çubuk Şekil 2a'da gösterilmiştir. Dinamik kararlılık analizi için yük şeklinde gösterildiği gibi  $P(t) = P_0 + P_t \cos \omega t$  yayılı yük kabul edilmiştir. Tabakalı kompozit eğri çubuğun sonlu elemanlarla incelenmesinde Şekil 2b'de gösterilen model kullanılmıştır. Elemanın her düğüm noktasındaki radyal ve eksenel yer değiştirmeler sırasıyla  $w, v$  dönme ise  $i$  ile gösterilmiştir. Yer değiştirme fonksiyonları (Sabır ve Ashwell, 1971);

$$w = a_1 \cdot \cos \phi + a_2 \cdot \sin \phi + a_4 - a_6 \cdot \phi \quad (6)$$

$$v = -a_1 \cdot \sin \phi + a_2 \cdot \cos \phi + a_3 + a_5 \cdot \phi + a_6 \phi^2 / 2 \quad (7)$$

$$i = \frac{dw}{dy} - \frac{v}{R} \quad (8)$$

şeklinde tanımlanabilir. R yarıçap,  $\phi$  açısal değişimi gösterir. Şekil 2b'deki eğri çubuğu sonlu eleman olarak düşündüğümüzde 1 ve 2 ile gösterilen noktalardaki yer değiştirmeler aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$[q]^T = [v_1 \ w_1 \ i_1 \ v_2 \ w_2 \ i_2] \quad (9)$$

Burada,  $\{q\}$  Çubuğun genelleştirilmiş koordinatlarıdır.

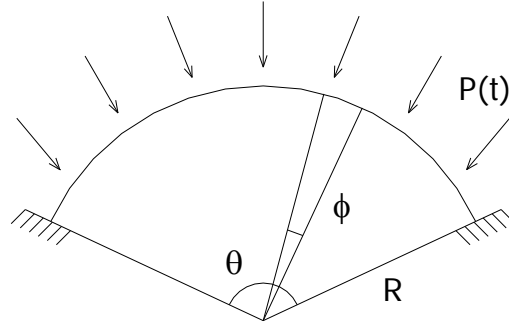
### 4. ENERJİ VE HAREKET DENKLEMLERİ

Sistemde, hareket denklemini çıkarmak için sonlu eğri çubuğun enerji ifadeleri kullanılacaktır.

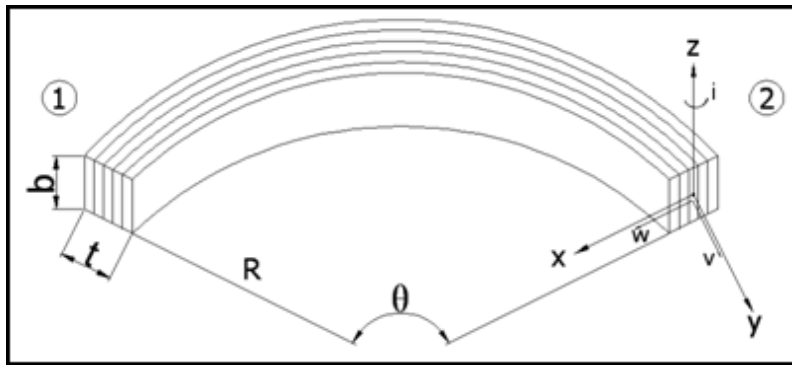
Elastik Potansiyel Enerji,

$$U = \frac{1}{2} \left( \int_0^d \left( \ddot{w} - \frac{\dot{v}}{R} \right)^2 EI_{xx} + \left( \frac{w}{R} + \dot{v} \right)^2 EA \right) dy \quad (10)$$

E elastisite modülünü,  $I_{xx}$  çubuğun x eksenine göre alan atalet momentini, A kesit alanını ve d sonlu eğri çubuk elemanın uzunluğunu gösterir.



(a)



(b)

Şekil 2. a) Yayılı yük altındaki eğrisel çubuk, b) Tabakalı kompozit eğri çubuk

Kinetik Enerji,

$$T = \frac{1}{2} \left[ \int_0^d \rho A (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) dy \right] \quad (11)$$

Burada  $\rho$  yoğunluğu verir.

Eksenel kuvvetin yaptığı iş,

$$V = \int_0^d PR \left( \frac{dw}{dy} - \frac{v}{R} \right)^2 dy \quad (12)$$

P eğri çubuğa etki eden yayılı yükü gösterir.

Eşitlik 6 ve Eşitlik 9 arasındaki terimler enerji ifadeleri olan Eşitlik 10, Eşitlik 11 ve Eşitlik 12'de yerine konursa, bir eleman için  $[k_e]$  direngenlik matrisini,  $[k_{ge}]$  geometrik matrisini ve  $[m_e]$  kütle matrisini elde edebiliriz. Tüm çubuğa ait elastik, geometrik ve kütle matrisleri sonlu elemanlar algoritmasına göre oluşturulup; Lagrange denkleminde, enerji ifadelerinin kullanımı ile hareket eşitliği:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} - P(t)[K_{ge}]\{q\} = 0 \quad (13)$$

şeklinde ifade edilebilir. Yukarıda verilen denklemin çözümünün araştırılması dinamik stabilite problemini oluşturur. Periyodik katsayılı lineer denklemler teorisinden bu denklemin stabil ve instabil çözümleri arasındaki sınırların  $T = 2\pi/\omega$  ve  $T = 4\pi/\omega$  periyotlu çözümler olduğu bilinmektedir. İnstabil çözümler aynı periyotlu, periyodik çözümlerle sınırlandırılmıştır. Eşitlik çözüldüğünde,

i)  $P_{kr} = 0$  ve  $p = \omega/2$  durumu serbest titreşim problemi

$$[[K_e] - p^2[M]]\{q\} = 0 \quad (14)$$

ii)  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  ve  $\omega = 0$  durumu statik stabilite problemi

$$[[K_e] - P_{kr}[K_{ge}]]\{q\} = 0 \quad (15)$$

iii) Tüm terimleri düşünürsek dinamik kararlılık problemi olur.

$$\left[ [K_e] - (\alpha \pm \frac{1}{2}\beta)P_{kr}[K_{ge}] - \frac{\omega^2}{4}[M] \right] \{q\} = 0 \quad (16)$$

Esas instabil bölge  $p = \omega/2$  da olduğu için denklemler bu şart için çözülmüştür. Burada,  $P_{kr}$  kritik burkulma yükünü,  $\alpha = \frac{P_0}{P_{kr}}$ ,  $\beta_d = \frac{P_t}{P_{kr}}$  ise sırasıyla statik ve dinamik parametrelerini gösterir.

## 5. NÜMERİK UYGULAMA

Kabul edilen modelin doğruluğu için ANSYS programı ile tabakalı kompozit eğri çubuğun statik ve serbest titreşim analizleri yapılmıştır. Eğri çubuğun dört tabakadan meydana geldiği kabul edilmiştir. Yapılan çalışmada elde edilen sonuçlar, Ansys programından elde edilen değerlerle karşılaştırılarak kullanılan modelin uygunluğu Çizelgelerde gösterilmiştir. Çalışmadaki sonlu eleman analizi için, tüm çalışmalarda eleman sayısı 30 alınmıştır.

Çizelge 1'de tabakalı kompozit eğri çubuk için Sonlu Elemanlar Metodunda elde edilen ilk iki doğal frekans değeri Ansys programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çizelge 1 ve Çizelge 2'ye bakıldığında, [90 0 0 90] fiber açılı eğri çubuğunun; sonlu elemanlar modelinden elde edilen doğal frekans ve burkulma değerlerinin, ANSYS programından elde edilen değerlerden en fazla sapmaya sahip olduğu görülür. Bu durum elastisite modülü yaklaşımında, fiber açılarının oryantasyonunun oldukça etkili olduğunu göstermektedir. Bununla birlikte hata payı oldukça düşüktür.

## 6. DİNAMİK KARARLILIK ANALİZİ VE SONUÇLAR

Nümerik uygulamalardan elde edilen sonuçları daha kolay açıklayabilmek için incelenen tabakalı kompozit eğri çubukları: L1=[0 0 0 0], L2=[90 90 90 90], L3=[0 90 90 0], L4=[90 0 0 90], L5=[0 45 -45 0], L6=[0 60 -60 0], şeklinde kısaltmalar ile ifade edeceğiz. Şekil 3'de,

birinci ve ikinci dinamik kararsız bölgelerin, merkez açısı arttıkça daraldığı ve dinamik kararsız bölgelerin orijine doğru hareket ettiği ve birbirine doğru yaklaştığı görülebilir. L1 çubuğu diğer çubuklarla kıyaslandığında daha az stabildir. Ayrıca dinamik yük parametresi arttığında kararsız bölge genişlemektedir. Şekilde, kararlılık bölgeleri  $\theta=60^\circ$  ve  $\theta=120^\circ$  de büyükten küçüğe doğru L1, L3, L5, L6, L4 ve L2 fiber oryantasyon açılarına göre sıralanmaktadır.

Çizelge 1. Tabakalı kompozit eğri çubuk için Sonlu Elemanlar Metodunda elde edilen ilk iki doğal frekans değerinin Ansys programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması ( $E_1=129.207$  GPa,  $E_2=E_3=9.42512$  GPa,  $G_{12}=5.15658$  GPa,  $G_{13}=4.3053$  GPa,  $G_{23}=2.5414$  GPa,  $\nu_{12}=0.3$ ,  $\nu_{21}=\nu_{12} \cdot E_2/E_1$ ,  $b=0.0254$  m,  $t=0.004$  m,  $\rho=1550.0666$  kg/m<sup>3</sup>,  $\theta=120^\circ$ )

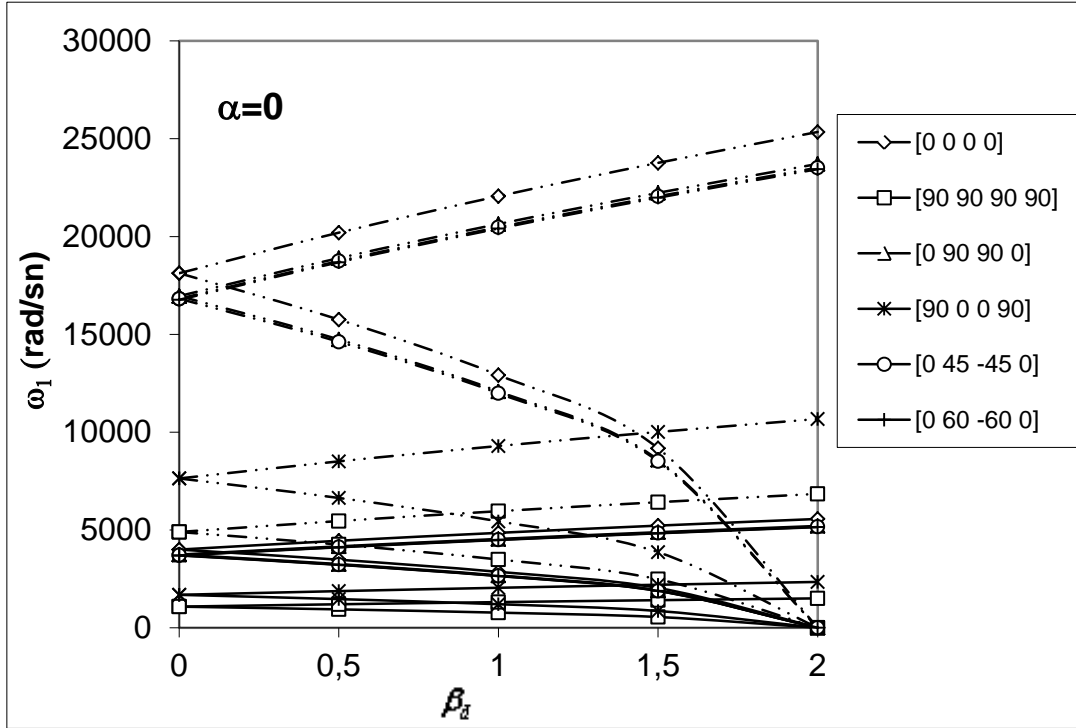
| Fiber açısı   | Doğal Frekanslar (rad/s) |         |        |         |
|---------------|--------------------------|---------|--------|---------|
|               | $f_1$                    | $f_1$   | $f_2$  | $f_2$   |
|               | Ansys                    | Çalışma | Ansys  | Çalışma |
| [0 0 0 0]     | 315.13                   | 318.01  | 622.83 | 632.851 |
| [90 90 90 90] | 85.816                   | 85.889  | 170.70 | 170.923 |
| [0 90 90 0]   | 296.32                   | 297.514 | 584.64 | 592.062 |
| [90 0 0 90]   | 138.17                   | 133.931 | 274.87 | 266.528 |
| [0 45 -45 0]  | 298.17                   | 295.120 | 588.89 | 587.297 |
| [0 60 -60 0]  | 296.51                   | 294.172 | 585.32 | 585.412 |

Çizelge 2. Tabakalı kompozit eğri çubuk için Sonlu Elemanlar Metodunda elde edilen kritik burkulma yükünün Ansys programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması ( $E_1=129.207$  GPa,  $E_2=E_3=9.42512$  GPa,  $G_{12}=5.15658$  GPa,  $G_{13}=4.3053$  GPa,  $G_{23}=2.5414$  GPa,  $\nu_{12}=0.3$ ,  $\nu_{21}=\nu_{12} \cdot E_2/E_1$ ,  $b=0.0254$  m,  $t=0.004$  m,  $\rho=1550.0666$  kg/m<sup>3</sup>,  $\theta=120^\circ$ )

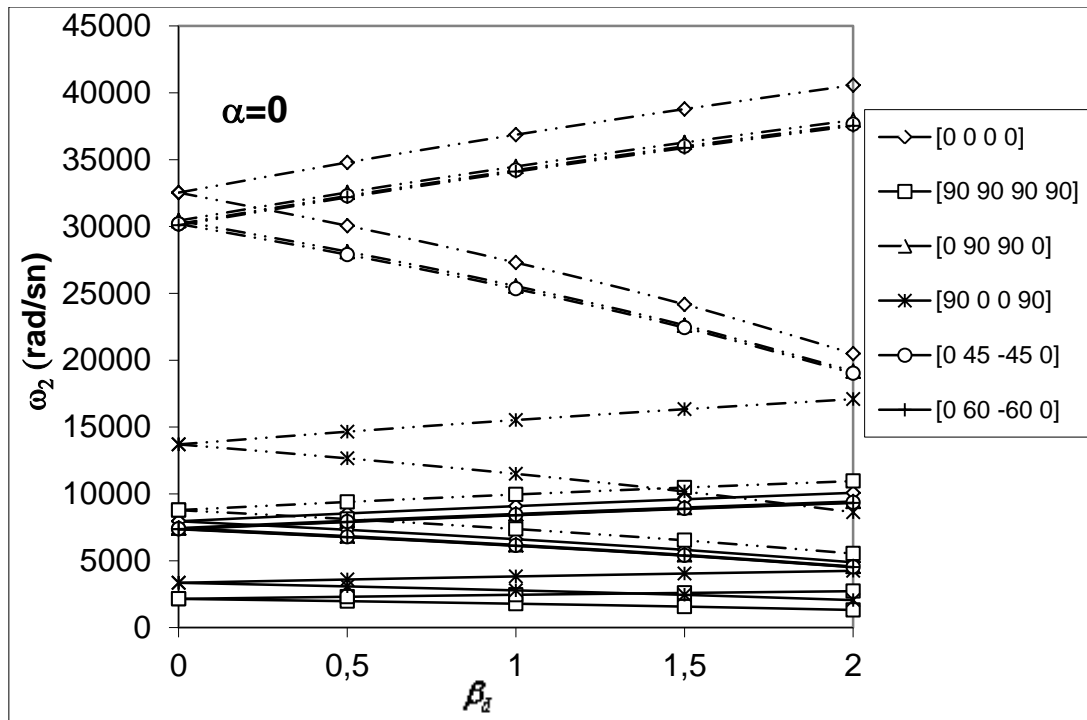
| Fiber açısı   | $P_1$ (N/m)<br>(Ansys) | $P_1$ (N/m)<br>(Çalışma) | % hata |
|---------------|------------------------|--------------------------|--------|
| [0 0 0 0]     | 21647,15               | 21941,341                | -1.34  |
| [90 90 90 90] | 1599,3618              | 1600,53                  | -0.072 |
| [0 90 90 0]   | 19166,586              | 19204,142                | -0.195 |
| [90 0 0 90]   | 4146,296               | 3891,768                 | 6.54   |
| [0 45 -45 0]  | 19329,4                | 18896,296                | 2.292  |
| [0 60 -60 0]  | 19164,554              | 18775,190                | 2.073  |

Şekil 4 a ve Şekil 4b'de gösterildiği üzere, eğer statik yük parametresi artarsa, zorlama frekansı orijine doğru hareket eder. Böylece periyodik yük altındaki kompozit eğri çubuk küçük dinamik yük parametresi ve küçük bir zorlama frekansında kararsız hale gelir. Ayrıca, Şekil 5 ve Şekil 6'da da aynı durum söz konusudur.

Eğri çubukların kullanılacakları yere bağlı olarak fiber oryantasyon açılarının önemi oldukça büyüktür. Uygun fiber açısı seçilerek eğri çubuğun kararlı bölgede tutulması sağlanabilir. Kompozit malzemelerin hafifliği çelik malzemelere göre oldukça fazladır. Bu çalışmada modellenen eğri çubuğa yarıçap doğrultusunda açılacak delikler, bu çubuğu daha hafif hale getirecektir. Delik sayısının ve çapının dinamik stabilite üzerindeki etkisinin araştırılması bundan sonraki çalışma olarak düşünülmüştür.



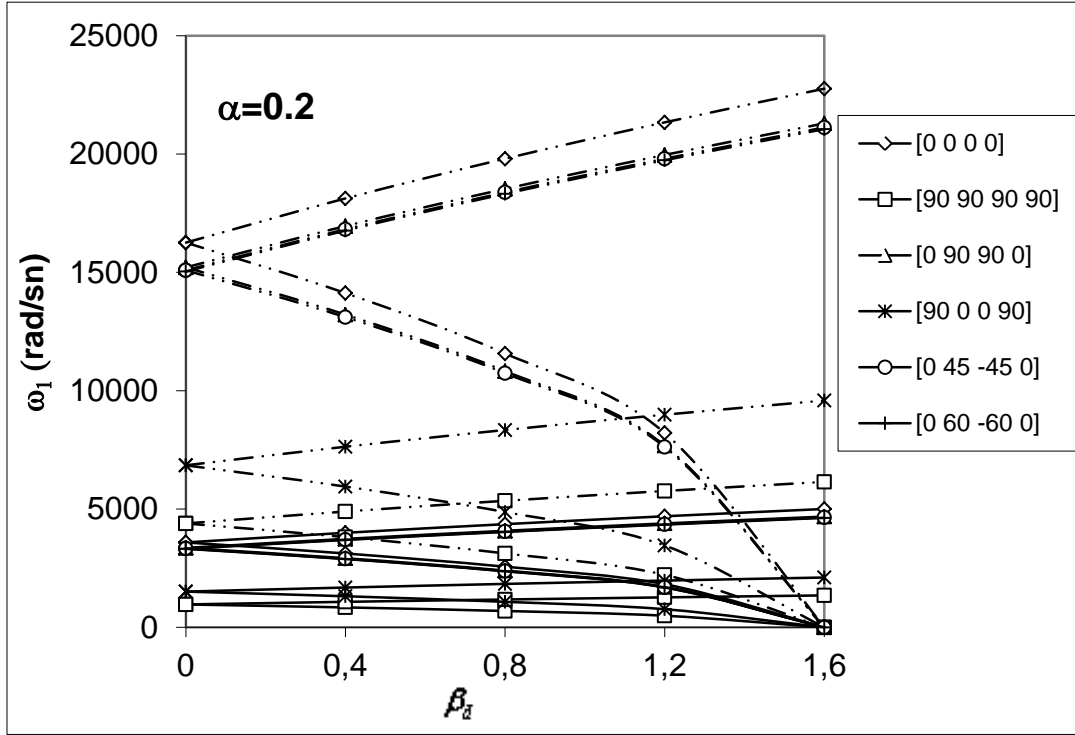
(a)



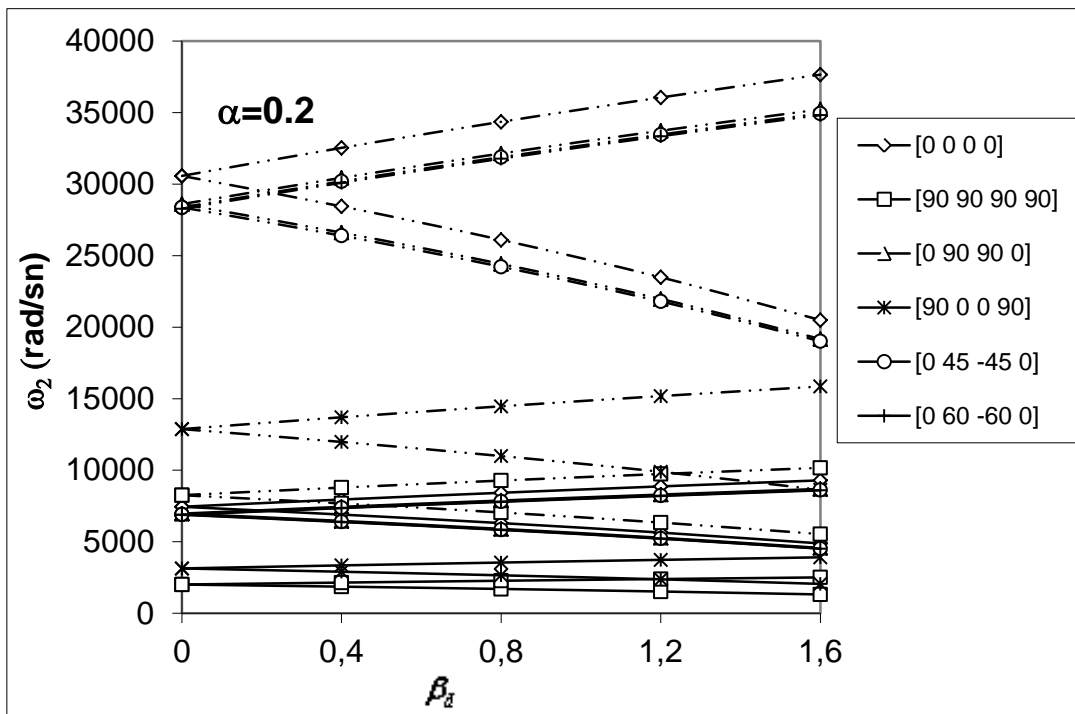
(b)

Şekil 3. İki farklı merkez açısı için kompozit eğri çubuğun birinci ve ikinci dinamik kararsızlık bölgeleri üzerinde dinamik yük parametresinin etkisi. (a) Birinci kararsız bölge. (b) İkinci kararsız bölge ( $E_1=129.207$  GPa,  $E_2=E_3=9.42512$  GPa,  $G_{12}=5.15658$  GPa,  $G_{13}=4.3053$  GPa,  $G_{23}=2.5414$  GPa,  $\nu_{12}=0.3$ ,  $\nu_{21}=\nu_{12} \times E_2/E_1$ ,  $b=0.0254$  m,  $t=0.004$  m,  $\rho=1550.0666$  kg/m<sup>3</sup>,  $R=0.25$  m,  $\theta=60^\circ$ ,  $\theta=120^\circ$ )



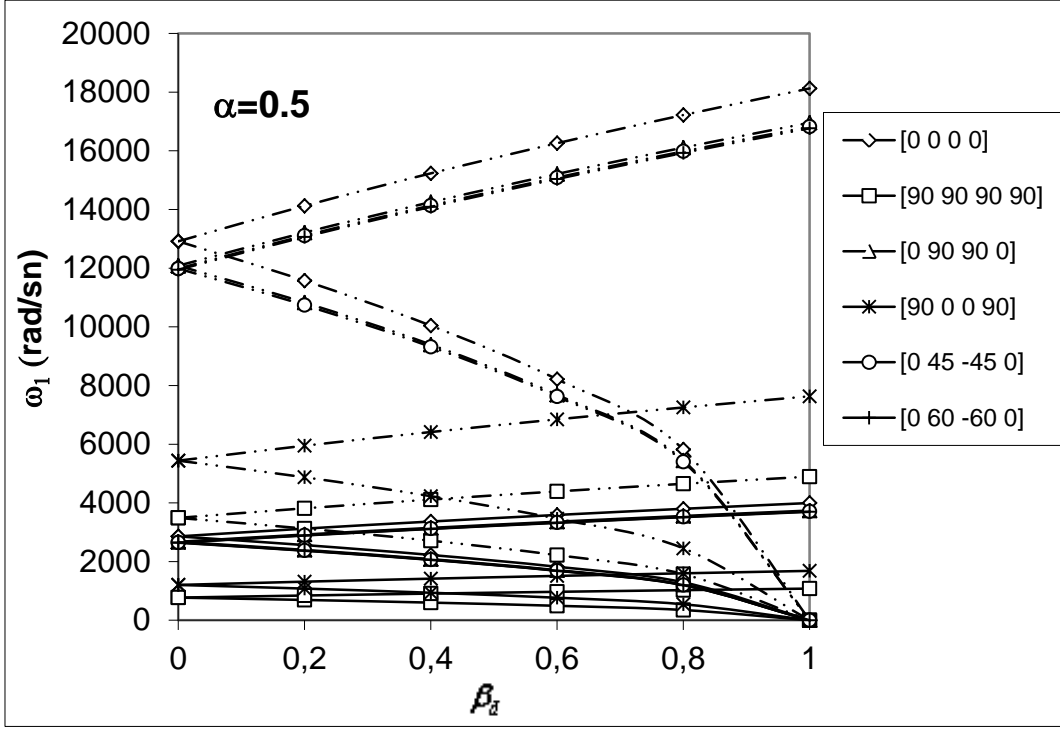


(a)

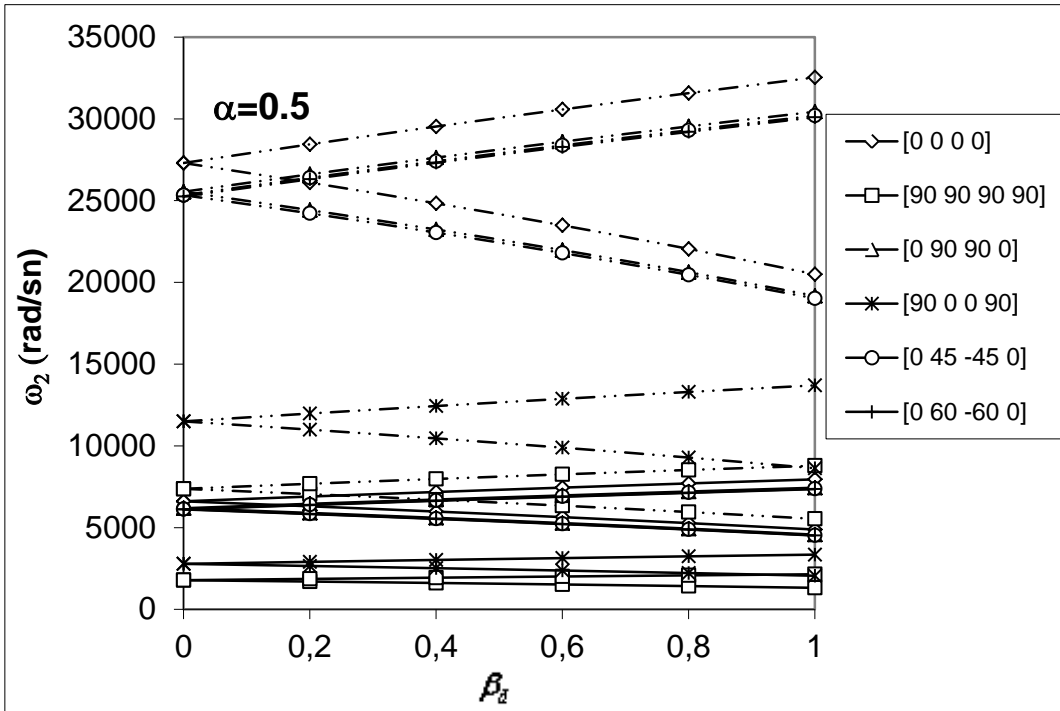


(b)

Şekil 4. İki farklı merkez açısı için kompozit eğri çubuğun birinci ve ikinci dinamik kararlılık bölgeleri üzerinde dinamik yük parametresinin etkisi. (a) Birinci kararsız bölge. (b) İkinci kararsız bölge ( $E_1=129.207$  GPa,  $E_2=E_3=9.42512$  GPa,  $G_{12}=5.15658$  GPa,  $G_{13}=4.3053$  GPa,  $G_{23}=2.5414$  GPa,  $\nu_{12}=0.3$ ,  $\nu_{21}=\nu_{12} \times E_2/E_1$ ,  $b=0.0254$  m,  $t=0.004$  m,  $\rho=1550.0666$  kg/m<sup>3</sup>,  $R=0.25$ m,  $\theta=60^\circ$ ,  $\theta=120^\circ$ )

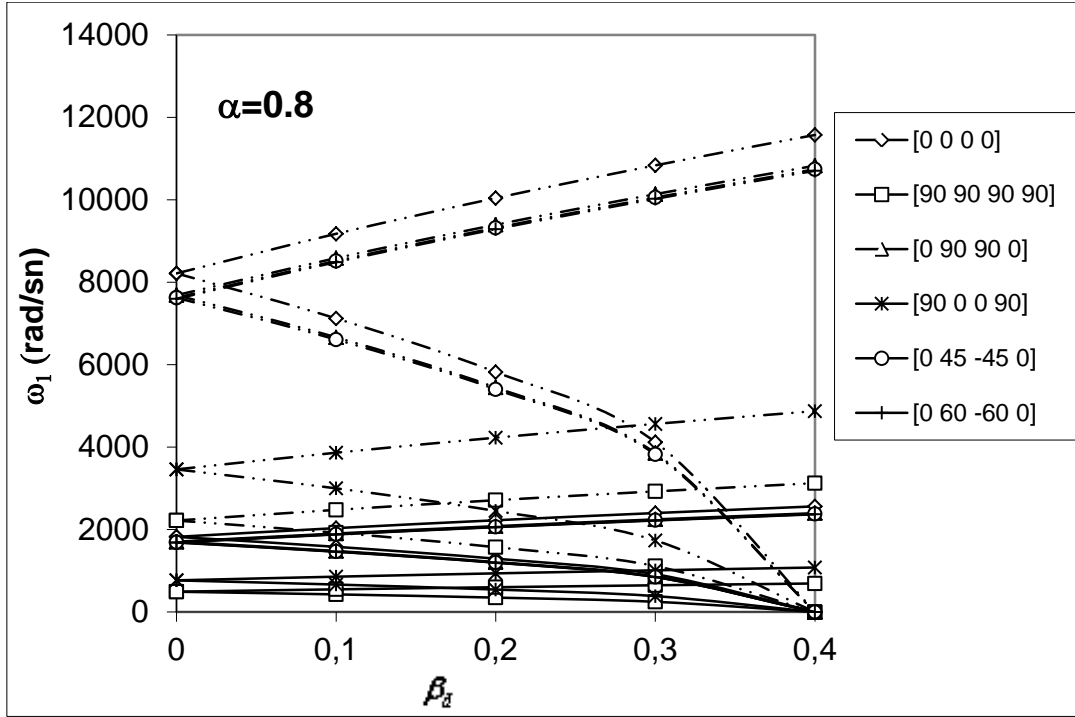


(a)

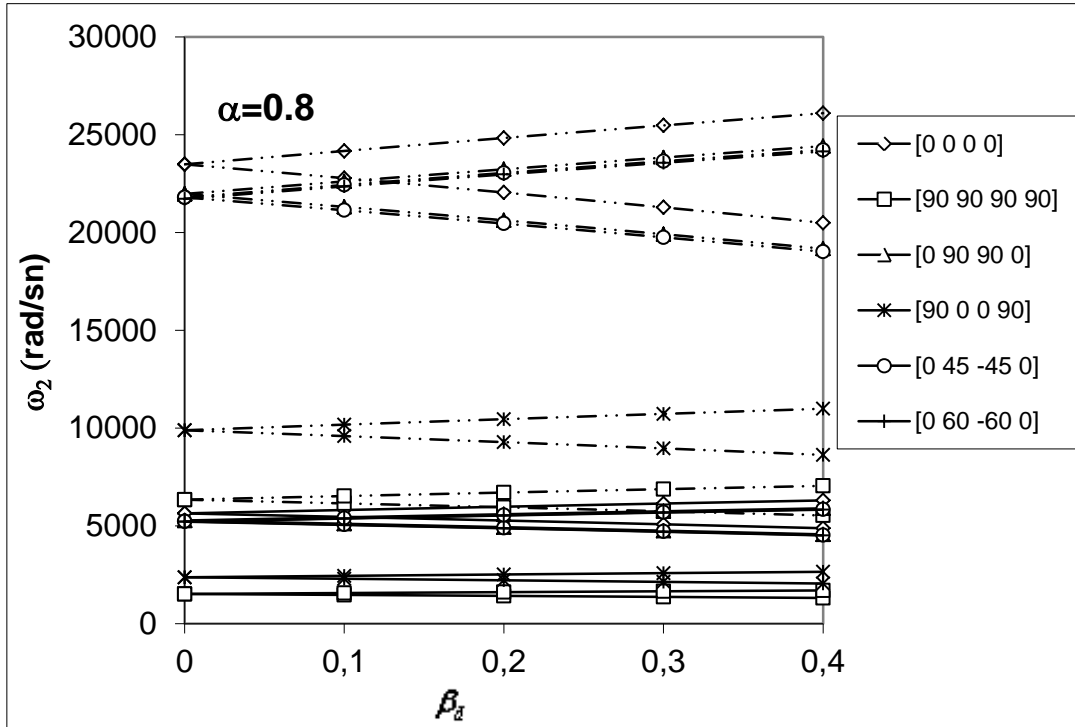


(b)

Şekil 5. İki farklı merkez açısı için kompozit eğri çubuğun birinci ve ikinci dinamik kararlılık bölgeleri üzerinde dinamik yük parametresinin etkisi. (a) Birinci kararlılık bölgesi. (b) İkinci kararlılık bölgesi ( $E_1=129.207$  GPa,  $E_2=E_3=9.42512$  GPa,  $G_{12}=5.15658$  GPa,  $G_{13}=4.3053$  GPa,  $G_{23}=2.5414$  GPa,  $\nu_{12}=0.3$ ,  $\nu_{21}=\nu_{12} \times E_2/E_1$ ,  $b=0.0254$  m,  $t=0.004$  m,  $\rho=1550.0666$  kg/m<sup>3</sup>,  $R=0.25$  m,  $\theta=60^\circ$ ,  $\theta=120^\circ$ )



(a)



(b)

Şekil 6. İki farklı merkez açısı için kompozit eğri çubuğun birinci ve ikinci dinamik kararsızlık bölgeleri üzerinde dinamik yük parametresinin etkisi. (a) Birinci kararsız bölge. (b) İkinci kararsız bölge ( $E_1=129.207$  GPa,  $E_2=E_3=9.42512$  GPa,  $G_{12}=5.15658$  GPa,  $G_{13}=4.3053$  GPa,  $G_{23}=2.5414$  GPa,  $\nu_{12}=0.3$ ,  $\nu_{21}=\nu_{12} \times E_2/E_1$ ,  $b=0.0254$  m,  $t=0.004$  m,  $\rho=1550.0666$  kg/m<sup>3</sup>,  $R=0.25$ m,  $\theta=60^\circ$ ,  $\theta=120^\circ$ )

**KAYNAKLAR**

- Bazant Z. P., Cedolin L. (1991): “Stability of Structures”, Oxford University Press, New York.
- Bolotin V. (1964): “The Dynamic Stability of Elastic Systems”, Holden-Day, San Francisco.
- Karaağaç C., Öztürk H., Sabuncu M. (2011): “Crack Effects on the In-plane Static and Dynamic Stabilities of a Curved Beam with an Edge Crack”, Journal of Sound and Vibration, Cilt 330, s. 1718-1736.
- Kawakami M., Sakiyama T., Matsuda H., Morita C. (1995): “In-Plane and out-of-Plane Free Vibrations of Curved Beams with Variable Sections”, Journal of Sound and Vibration, Cilt 187, s. 381-401.
- Loja M. A. R., Barbosa J. I., Soares C. M. M. (1997): “Buckling Behaviour of Laminated Beam Structures Using a Higher-Order Discrete Model”, Composite Structures, Cilt 38, s.119-131.
- Petyt M., Fleischer C. C. (1971): “Free Vibration of a Curved Beam”, Journal of Sound and Vibration, Cilt 18, s.17-30.
- Qatu M. S. (1992): “In-Plane Vibration of Slightly Curved Laminated Composite Beams”, Journal of Sound and Vibration, Cilt 159, s.327-338.
- Qatu M. S. (1993): “Theories and Analyses of Thin and Moderately Thick Laminated Composite Curved Beams”, International Journal of Solids and Structures, Cilt 30, s.2743-2756.
- Reddy J. N. (1997): “Mechanics of Laminated Composite Plates Theory and Analysis”, CRS Press, New York, s.856.
- Sabır A. B., Ashwell D. G. (1971): “A Comparasion of Curved Beam Finite Elements when Used in Vibration Problem”, Journal of Sound and Vibration, Cilt 18, s.555-563.
- Sabuncu M. (1978): “Vibration Characteristics of Rotating Aerofoil Cross Section Bladed Disc Assembly”, University of Surrey, Ph.D Thesis, s.548.
- Thomas J., Abbas B. A. H. (1976): “Dynamic Stability of Timoshenko Beam by Finite Element Method”, Journal of Engineering for Industry, Transaction of ASME Cilt 98, s.1145–1151.
- Timoshenko S. P., Gere J. M. (1961): “Theory of Elastic Systems”, McGraw-Hill Book Company, s.560.
- Tseng Y. P., Huang C. S., Kao M. S. (2000): “In-plane Vibration of Laminated Curved Beams with Variable Curvature by Dynamic Stiffness Analysis”, Composite Structures, Cilt 50, s.103-114.
- Yoo C. H., Kang Y. J., Davidson J. S. (1996): “Buckling Analysis of Curved Beams by Finite Element Discretization”, Journal of Engineering Mechanics, Cilt 122, s.762-770.

**EK 1:**

$c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$ ,  $\alpha$ : Fiber açısı

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})s^2c^2 + Q_{22}s^4$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{33})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{33})s^2c^2 + Q_{22}c^4$$

$$\bar{Q}_{13} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})sc^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})s^3c$$

$$\bar{Q}_{23} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{33})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{33})sc^3$$

$$\bar{Q}_{33} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{33})s^2c^2 + Q_{33}(s^4 + c^4);$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad \nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}$$