



BURULMA PROBLEMLERİNİN
SONLU NOKTA SIRALAMA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

(*SOLUTION OF TORSION PROBLEMS
USING FINITE POINT COLLOCATION METHOD*)

Sabahattin AYKAÇ, İzzet Ufuk ÇAĞDAŞ*

ÖZET/ABSTRACT

Bu çalışmada, burulma problemlerinin çözümünün genel denklemi olan Poisson denkleminin SNSU (Sonlu nokta sıralama yöntemi) ile çözümü yapılmış ve sonuçlar analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar göstermektedir ki, SNSU bu tür problemlerin çözümünde makalede belirtilen koşullar sağlandığında etkili ve güvenilir bir yöntemdir.

In this study, Poisson equation, the governing equation of the torsion problems, is solved using FPCM (Finite Point Collocation Method) and the results are compared with the theoretical results. The results show that, when the conditions stated in this study are satisfied, FPCM is an effective and a trustworthy method.

ANAHTAR KELİMELELER/KEYWORDS

Ağırsız yöntemler, Sonlu nokta sıralama yöntemi, Poisson denklemi
Mesh less methods, Finite point collocation method, Poisson equation

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan alışılmış yöntemler; sonlu farklar, sonlu elemanlar (SEY) ve sonlu hacim yöntemleri olarak özetlenebilir. Bu yöntemlerin kullanımlarında bazı zorluklar bulunmaktadır. Özellikle sonlu farklar yöntemi yapı mekaniğinin pratik uygulamalarda pek kullanılmamaktadır. Sıklıkla kullanılan SEY'in temel zorluğunun çözüm ağının oluşturulması olduğu söylenilebilir. Mevcut yöntemlerin kullanışsızlıkları veya kullanım zorlukları nedeniyle son on sene içinde pek çok değişik ağsız yöntem, oldukça yoğun olarak kullanılmaya başlanmıştır. Bu yöntemlerde çözüm ağı bulunmamakta, ancak belli bir düzende bulunması gerekmeyen noktalar kullanılmaktadır.

Ağsız yöntemlerin bazılarında sayısal entegrasyona ihtiyaç olduğundan geri planda yardımcı bir ağa ihtiyaç vardır. Bunun temel nedeni çözülen denklemin zayıf halinin elde edilmesi için Galerkin Yöntemi'nin kullanılmasıdır. Galerkin Yöntemi'nin kullanımına en uygun örnek EFG (Element Free Galerkin Method) olarak verilebilir (Dolbow ve Belytschko, 1998). Ancak EFG yönteminde sınır şartlarının yerine konulması başlı başına bir sıkıntı oluşturmaktadır. Hatta sınır şartlarının yerine konulması için sonlu elemanlarla ortak çözümlere dahi gidilmektedir (Belytschko vd., 1996).

Bu çalışmada kullanılan Sonlu Nokta Sıralama Yöntemi, SNSY, (Finite point collocation method) sayısal entegrasyon kullanılmadığından ve sınır şartlarının yerine konulması kolay olduğundan diğer yöntemlere göre çok daha kolay uygulanabilmektedir (Onate vd., 2001).

2. SONLU NOKTA SIRALAMA YÖNTEMİ

2.1. Şekil Fonksiyonu

Bu çalışmada, şekil fonksiyonu olarak hareketli en küçük kareler yaklaşımı (HEK) kullanılmıştır. Kısaca özetlenecek olursa HEK bir eğri ve yüzey uydurma yöntemidir (Barnhill, 1977; Lancaster ve Salkauskas, 1981).

HEK yaklaşımları; her düğüm etrafında bir mesnet oluşturan bir ağırlık fonksiyonu, bir polinom olan taban ve düğümün konumuna bağlı olan katsayılardan ibarettir. Her bir düğüm için, ağırlık fonksiyonu sadece düğüm etrafındaki mesnet denilen küçük bir bölgede (etki bölgesi) sıfırdan farklıdır. Bu etki bölgelerinin kesişimi düğümler arasındaki bağlantıyı sağlar. HEK yaklaşımlarının önemli bir özelliği sürekliliklerinin ağırlık fonksiyonunun sürekliliğine bağlı olmasıdır (Dolbow ve Belytschko., 1998). HEK fonksiyonları genellikle verilerin tam üzerinden geçmediğinden, bunlar yaklaşımlar olarak tanımlanırlar. $u(x)$ fonksiyonunun yaklaşımı olan $u^h(x)$ sabit katsayılı olmayan m. dereceden bir polinom kullanılarak oluşturulmuştur. Polinomun derecesi taban fonksiyonunun derecesine eşittir. 1 boyut için denklemler aşağıda verilmiştir.

$u^h(x)$, polinom şeklindeki $p(x)$ taban fonksiyonunun devriği ile $a(x)$ katsayılar vektörünün skaler çarpımından elde edilmektedir (Eşitlik 1).

$$u^h(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x) \quad (1)$$

Burada $p(x)$ m. dereceden bir boyutlu tam bir polinomdur (Eşitlik 2).

$$\mathbf{p}^T(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^m] \quad (2)$$

$$\mathbf{a}^T(x) = [a_0(x) \ a_1(x) \ \dots \ a_m(x)] \quad (3)$$

Eşitlik 3'teki $\mathbf{a}_j(x)$ değişkenleri düğümdeki u_i değişkenleri ile düğümdeki yaklaşımlar arasındaki farkı en küçük yapacak şekilde hesaplanırlar. Gerekli düzenlemeler yapıldığında şekil fonksiyonu, $\phi_i(x)$ elde edilir (Eşitlik 4).

$$\phi_i(x) = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i \quad (4)$$

Eşitlik 4'teki A ve B ifadeleri sırasıyla Eşitlik 5.a'da ve Eşitlik 5.b'de tanımlanmışlardır.

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n w(x-x_i) \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \quad (5.a)$$

$$\mathbf{B}_i = w(x-x_i) \mathbf{p}(x_i) \quad (5.b)$$

2.2. Ağırlık Fonksiyonu $w(r)$

Bu çalışmada, mesnet parametresi $r = |x-x_i|/rm_i$ olarak seçilmiştir (Dolbow ve Belytshko, 1998). Burada rm_i etki alanının büyüklüğü olup düzensiz düğüm seçimi yapıldığında her düğüm için farklıdır. $|x-x_i|$ ise yıldız düğüm ile etki alanındaki düğüm arasındaki mesafedir. Etki alanı Şekil 1'de bulut olarak adlandırılan bölgedir.

Ağırlık fonksiyonu, $w(r)$, sadece yıldız düğümünden belli bir uzaklıkta (etki bölgesinde) sıfırdan farklıdır. Yıldız düğümünden (x_i) uzaklaştıkça r azalır ve $w(r)$ artar (Eşitlik 6). Şekilde Ω ve Γ sırasıyla çözüm bölgesini ve sınırları göstermektedir (Ohs ve Aluru, 2001).

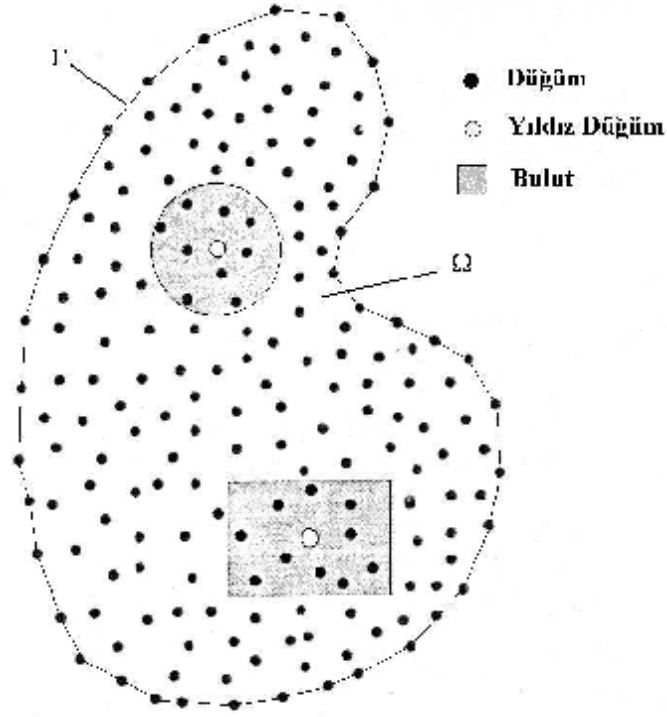
$$w(x-x_i) \equiv w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (6)$$

\mathbf{A} 'nın ve \mathbf{B} 'nin türevlerini hesaplamak için ağırlık fonksiyonunun türevlerinin de zincir kuralı kullanılarak hesaplanması gerekir (Eşitlik 7).

$$\frac{d(w(x-x_i))}{dx} = \frac{d(w(x-x_i))}{dr} \frac{dr}{dx} = \begin{cases} (-8r + 12r^3)/rm_i & r \leq \frac{1}{2} \\ (-4 - 8r - 4r^2)/rm_i & \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (7)$$

\mathbf{A} matrisinin tekil olmaması için yıldız düğümün etrafındaki düğüm sayısı yeteri kadar büyük olmalıdır. Bunu sağlamak için çözüm bölgesinden seçilen toplam düğüm sayısı artırılmalıdır. Bu rm_i değişkenine farklı değerler verilerek sağlanır.

2 boyutlu problemlerde HEK yaklaşımı kullanıldığında, yeterli düğüm sayısına, n etki alanındaki toplam düğüm sayısı ve m taban fonksiyonunun derecesi olmak üzere, $n=15\sim 30$ ve $m=3\sim 6$ şartlarının sağlanması ile ulaşılabılır (Chati ve Mukherjee, 2000).



Şekil 1. Çözüm bölgesinin düğümlerle gösterimi

3. SIRALAMA YÖNTEMİ (COLLOCATION METHOD)

Sıralama yönteminde ayrık denklemler, diferansiyel denklem $\Omega-\Gamma$ içindeki bir grup düğüm üzerinde zorlanarak elde edilir. Ω bölgesi içindeki NN adet düğümden oluşan bir küme göz önünde bulundurulursa, yapılan yaklaşım düğümlerdeki parametrelerdir (Belytschko vd., 1996).

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{NN} \phi_i(\mathbf{x}) u_i \quad (8)$$

Çözüme gitmeden önce şekil fonksiyonunu oluşturan değişkenler ve türevlerinin hesaplanması konunun daha kolay anlaşılmasını sağlayacaktır (Eşitlik 9, 10, 11, 12).

$$\mathbf{A}_{,x} = \sum_{i=1}^n \frac{dw(x-x_i)}{dx} \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \quad (9)$$

$$\mathbf{A}_{,x^2} = \sum_{i=1}^n \frac{d^2w(x-x_i)}{dx^2} \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{,x}^{-1} &= (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1})_{,x} \\ &= \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,x} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}_{,x}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,x} \mathbf{A}^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{B}_{i,x} = \frac{dw(x-x_i)}{dx} \mathbf{p}(x) \quad (12)$$

Yukarıda ifade edilen denklemler kullanılarak şekil fonksiyonunun türevleri kolaylıkla hesaplanabilir. Çözülen problemi ifade eden denklem Poisson denklemi olduğundan sadece 1. ve 2. türevlerin hesaplanması yeterlidir. Şekil fonksiyonlarının bağımsız değişkenlere göre türevleri zincir kuralı kullanılarak kolayca elde edilebilir (Yunhua ve Haussler, 2002). İlgili türevler Eşitlik 13 ve Eşitlik 14'te verilmiştir.

$$\begin{aligned}\phi_{i,x}(x) &= \left(\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i \right)_{,x} \\ &= \mathbf{p}_{,x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B}_i + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{i,x}\end{aligned}\quad (13)$$

$$\begin{aligned}\phi_{i,x^2}(x) &= \left(\mathbf{p}_{,x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i \right)_{,x} + \left(\mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B}_i \right)_{,x} + \left(\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{i,x} \right)_{,x} \\ &= \mathbf{p}_{,x^2}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_i + \mathbf{p}_{,x}^T \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B}_i + \mathbf{p}_{,x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{i,x} + \mathbf{p}_{,x}^T \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B}_i \\ &\quad + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,x^2}^{-1} \mathbf{B}_i + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B}_{i,x} + \mathbf{p}_{,x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{i,x} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B}_{i,x} \\ &\quad + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{i,x^2}\end{aligned}\quad (14)$$

\mathbf{p} vektörünün toplam eleman sayısındaki artış verimliliği, hassasiyeti ve dengeyi artırır. Bununla birlikte, bu artışın getirdiği bazı önemli sorunlar da vardır. Öncelikle düğüm sayısındaki artışa bağlı olarak bilinmeyen sayısı, daha doğrusu çözülecek denklem sayısı ve buna bağlı olarak ta çözüm süresi artacaktır. Bu çalışmada, bu durum göz önünde bulundurularak ve çok sayıda deneme yapılarak denge sorunu olmaması için Eşitlik 15'te gösterildiği üzere, eldeki diferansiyel denklem için en uygun \mathbf{p} vektörü (2 boyutlu problemlerde, 3. dereceden taban vektörü) elde edilmiştir.

$$\mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \end{bmatrix}\quad (15)$$

Benzer şekilde yukarıda Eşitlik 15'te verilen \mathbf{p} 'nin bağımsız değişkenlere göre türevleri de elde edilebilir.

4. BURULMA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Burulma problemleri genellikle denge denklemlerini sağlayan, *Prandtl gerilme fonksiyonu*, $\Phi(x, y)$ yardımıyla çözülür (Ugural, 1995). Süreklilik denklemleri ise Eşitlik 16'da gerilme fonksiyonu cinsinden verilmiştir. Burada G kayma modülü ve θ birim boy için burulma açısıdır, (rad/cm). Bu çalışmada malzemenin uniform olduğu varsayılmıştır.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta\quad (16)$$

Gerilme fonksiyonunun süreklilik denklemlerini sağlaması için Poisson denklemini sağlaması gerekmektedir. Φ uygulanan tork'u (T) içermez. Gerilme fonksiyonu bulununca, T Eşitlik 17 kullanılarak hesaplanır.

$$T = 2 \int_A \Phi dA\quad (17)$$

Düğümdeki bilinmeyen Φ olmak üzere, Eşitlik 16 herhangi bir i düğümü için şekil fonksiyonu ve türevleri cinsinden ifade edilebilir. Burada NN , Ω bölgesindeki toplam düğüm sayısıdır. Eşitlik 18'de $j \in \Omega$ ve $i \in \Omega - \Gamma$ dur ve $(\phi)_{i,j}$ ise $\phi_j(x_i)$ ı ifade etmektedir.

$$\sum_{j=1}^{NN} (\phi_{,xx})_{i,j} \cdot \Phi_j + \sum_{j=1}^{NN} (\phi_{,yy})_{i,j} \cdot \Phi_j = 2G\theta \quad (18)$$

Sınırlardaki düğümlerin bilinen değerlerinin de (sıfır) Eşitlik 18'de verilen denklem takımına ilave edilmesi gerekir. Sınırlarda Eşitlik 19'da gösterildiği üzere Φ_i sıfıra eşittir. Burada $j \in \Omega$ ve $i \in \Gamma$ 'dur.

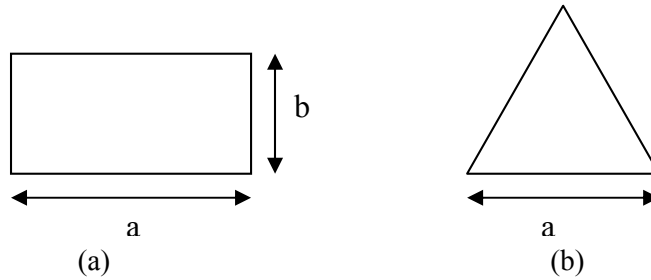
$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{NN} (\phi)_{i,j} \cdot \Phi_j = 0 \quad (19)$$

$\Omega - \Gamma$ ve Γ içindeki bütün düğümler için sırasıyla Eşitlik 18 ve Eşitlik 19 kullanılarak düğümlerdeki parametreleri veren NN adet denklemden oluşan bir doğrusal denklem takımı elde edilir. Bu parametreler bulunduğu düğümlerdeki aranan değişkenler (veya yaklaşım), Φ^h , Eşitlik 8 kullanılarak kolayca elde edilebilir (Liu, 2002).

5. SAYISAL ÖRNEKLER

Kare ve eşkenar üçgen kesitli iki adet çubuğun burulması problemleri SNSY ile analiz edilmiştir. Her iki örnekte de, en büyük kayma gerilmesi değerinin belirlenebilmesi için toplam düğüm sayısı değiştirilerek farklı çözümler yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 1 ve Çizelge 2'de teorik sonuçlarla karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Yapılan bütün çözümlerde $a=8$, $d_{maks}=2$ ve $x_s=4$ alınmıştır. d_{maks} ve x_s değişkenleri sırasıyla düğümler arası mesafe ve bulut boyutunu belirleyen değişkenlerdir.



Sekil 2. Kesitler

Şekil 2.a ve b'de gösterilen kesitler için en büyük kayma gerilmelerinin teorik değerleri, τ_{maks} , sırasıyla Eşitlik 20 ve Eşitlik 21'de verilmiştir (Ugural, 1995).

$$\tau_{maks} = \frac{T}{\alpha ab^2} \quad \theta = \frac{T}{\beta a^3 G} \quad \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \alpha = .208, \beta = .141$$

$$\tau_{maks} = 0.6779G\theta a \quad (20)$$

$$\tau_{maks} = \frac{20T}{a^3} \quad \theta = \frac{46.2T}{a^4 G} \quad \tau_{maks} = 0.4329 G\theta a \quad (21)$$

Çizelge 1. Kare kesitli çubuk için sonuçlar

Çözüm	Toplam düğüm sayısı	$\tau_{maks} (X G\theta a)$ (SNSY)	$\tau_{maks} (X G\theta a)$ (analitik)	Hata(%)
1	25	0.7019	0.6779	3.53
2	49	0.6752	0.6779	0.41
3	81	0.6822	0.6779	0.61

Çizelge 2. Eşkenar üçgen kesitli çubuk için sonuçlar

Çözüm	Toplam düğüm sayısı	$\tau_{maks} (X G\theta a)$	$\tau_{maks} (X G\theta a)$ (analitik)	Hata(%)
1	7	0.2763	0.4329	36.18
2	15	0.4330	0.4329	0.03

Kare kesitli çubuklar için düğüm sayısı 25 iken sonuca %3.5 lik bir hata ile ulaşılabilmektedir. Düğüm sayısı yaklaşık iki katına çıkarıldığında hatanın %0.4 düzeyine indiği görülmektedir. Ancak, oluşan hatayı daha da küçültmek için düğüm sayısının 81'e çıkarılması yuvarlama hataları nedeniyle başarılı olamamış ve hata %0.6'ya çıkmıştır.

Üçgen kesitli çubuklarda ise 7 düğüm kullanıldığında hatanın %36 gibi kabul edilemez bir düzeyde olduğu görülmektedir. Ancak, bu hatanın düğüm sayısının gerekenin çok altında olmasından kaynaklandığı ve uygulamada bu kadar az düğüm ile işlem yapılamayacağı açıktır. Ne var ki, düğüm sayısı 15'e çıkarıldığında hatanın yaklaşık olarak sıfır olduğu görülmektedir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada SNSY tanıtılmış ve iki basit örnek üzerinde uygulama yapılarak sonuçlar değerlendirilmiştir. Çalışmanın sonunda yeterli sayıda düğüm kullanılması halinde doğru sonuçlara kabul edilebilir düzeyde yaklaşıldığı görülmüştür. Ayrıca, çalışmada nokta sayısının gereğinden fazla artırılmasının yuvarlama hatalarından kaynaklanan hatalara yol açabileceği ve bu durumun kontrol altında tutulması gerektiği görülmüştür. Yöntemin uygulanması oldukça kolay olmasına rağmen elde edilen sonuçların yukarıdaki örneklerle sınırlı olduğu ve genellenmemesi gerektiği unutulmamalıdır.

KAYNAKLAR

- Barnhill R.E. (1977): "Representation and approximation of surfaces", Mathematical Software III, Academic Press, New York.
- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Krysl P. (1996): " Meshless Methods: An Overview And Recent Developments", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., (139), s. 3-47.
- Chati M.K., Mukherjee S. (2000): "The Boundary Node Method For Three-Dimensional Problems In Potential Theory", Int. J. Num. Meth. Eng., (47), s. 1523-1547.
- Dolbow J., Belytschko T. (1998): "An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method", Archives of Comp. Methods in Engineering , (5;3), s. 207-241.
- Lancaster P., Salkauskas K. (1981): "Surfaces Generated By Moving Least Squares Methods", Math. Comput., (37), s.141-158.
- Liu G.R. (2002): "A Point Assembly Method For Stress Analysis Of Two Dimensional Solids", International Journal of Solids and Structures, (39), s. 261-276.
- Ohs R.R., Aluru N.R. (2001): "Meshless Analysis Of Piezoelectric Devices", Computational Mechanics, (27), s. 23-36.
- Onate E., Perazzo F., Miquel J. (2001): "A Finite Point Method For Elasticity Problems", Computers And Structures, (79), s. 2151:2163.
- Ugural A.C., Fenster S.K. (1995): "Advanced Strength and Applied Elasticity", 3rd Ed., Prentice Hall, NJ.
- Yunhua L., Haussler U. (2002): "A Generalized Finite Difference Method Based On Minimizing Global Residual", Comput. Meth. Appl. Eng., (191), s. 1421-1438.