



GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU İLE BAZI SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

(ON THE NUMERICAL SOLUTION OF SOME BOUNDARY VALUE
PROBLEMS VIA GENERALIZED DIFFERENTIAL QUADRATURE
METHOD)

Ömer CİVALEK*, Seval ÇATAL*

ÖZET/ABSTRACT

Gerek mühendislik sistemlerinin analizinde ve gerekse uygulamalı disiplinlerde diferansiyel denklemlerin çözümü büyük bir öneme sahiptir. Çoğunlukla bir sınır değer ve/veya başlangıç değer formunda olan bu denklemlerin analitik çözümü çoğu durumda mümkün değildir. Bu amaçla yeter yaklaşıklıkta çözümler elde etmek için günümüze kadar pek çok sayısal analiz yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin her birinin; gerektirdikleri bilgisayar kapasiteleri, zaman ve hassasiyet açısından biri birine göre avantajları ve dezavantajları mevcuttur. Çalışmada genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu kısaca tanıtılmış, mühendislikte ve temel bilimlerde sıkça karşılaşılan bazı tür sınır değer probleminin sayısal çözümü sunulmuştur. Genelleştirilmiş diferansiyel quadrature yönteminin bilinen bazı tip diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılacak alternatif bir metot olduğu vurgulanmıştır.

The solution of differential equations has a great importance in the analysis of engineering systems and applied disciplines. It is not always possible to obtain the analytical solutions of these equations, which has a boundary value and/or initial value form as usual. For this purpose, it has been improved many numerical analysis method to obtain the adequate solutions up to now. All of these methods have a relative advantage and disadvantage with respect to each other because of the time aspect and the sensitivity. In this study, Generalized Differential Quadrature (GDQ) method was briefly introduced and presented the numerical solutions of some type boundary value problems that have been confronted in engineering and basic sciences often. It has been emphasized that generalized Differential Quadrature method is an alternate method for the solution of known type differential equations.

ANAHTAR KELİMELEK/KEYWORDS

Genelleştirilmiş diferansiyel tümlev, Diferansiyel denklem, Nümerik analiz
Generalized differential quadrature, Differential equations, Numerical analysis

*Dokuz Eylül Üniversitesi, Müh. Fak. İnşaat Müh. Böl. Buca (Kaynaklar), İZMİR

1. GİRİŞ

Mühendislik uygulamalarında temel amaç insan yaşamını kolaylaştıracak sistemler ortaya koymaktır. Bu sistemlerin geliştirilmesindeki temel etken insan ihtiyaçlarının karşılanmasıdır. Uygarlaşma yönündeki olumlu gelişmeler ve teknolojinin günümüzde geldiği nokta ihtiyaçların farklılaşmasına neden olmuştur. Değişen bu ihtiyaçlara cevap vermek için teorik ve pratik çalışmalar yapan mühendislerde farklı teknikler üzerinde yoğunlaşmışlardır. Mühendislik sistemlerinin analizi en genel anlamda iki aşamayı içermektedir. Mevcut bir fiziksel sistemi ifade eden matematik modelin kurulması ve elde edilen matematik denklemin analitik olarak veya çeşitli yaklaşık sayısal metotlar kullanılarak çözülmesidir. Bu iki aşamadan birincisi tecrübe, sezgi ve iyi bir matematik alt yapı; ikincisi ise modelleme de kullanılan sezgi ve bilgiye ilaveten hızlı ve kapsamlı bir hesaplayıcıyı gerektirir.

Yapılan modellemenin gerçek modeli yansıtıp yansıtmaması, gerçek fiziksel olay ile uyumluluk derecesiyle ölçülür. Bu modellerin büyük bir çoğunluğu, sınır değer formundaki diferansiyel denklemlerdir. Bu matematik denklemlerin fiziksel modele en yakın sunuş biçimi ise varyasyonel problemlerdir. Giriş verileri üzerine konulan süreklilik ve türevlenebilirlik koşulları açısından, varyasyonel problem kendi özdeşi olan sınır değer problemiyle karşılaştırıldığında, uygulama alanı daha geniş olan problemler sınıfına hitap eder. Matematik modelleme işleminin, modelin varyasyonel problem olarak ifade edilmesinden sonraki aşaması, hesaplayıcıya tanıtımı uygun olan ayrık modelin oluşturulmasıdır (Hasanov, 2001). Günümüzde, diferansiyel denklemlerle ilgili matematik modellerin ayrık benzeşiklerinin oluşturulması ve elde edilen ayrık problemin bilgisayarda çözülmesi açısından en kapsamlı ve bilinen yöntem Sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntemin klasik sonlu farklar yönteminden başlıca ayırt edici özelliği, sonlu elemanlar yöntemi sınır değer problemini değil varyasyonel problemi temel alır.

En genel anlamda, mühendislik problemleri, süreksiz ve sürekli ortam problemleri olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Serbestlik derecesi sonsuz büyük olan sürekli ortam problemlerinin çözümü bir diferansiyel denklem, integral denklem veya denklem sisteminin çözümünü gerektirdiği halde, serbestlik derecesi sonlu olan süreksiz ortam problemlerinin çözümü lineer denklem takımının çözümüyle elde edilebilmektedir (Çakıroğlu vd., 1973). Sonsuz serbestlik dereceli sistemlerinin çözümünde çeşitli matematik güçlükler ortaya çıkmakta buna karşın süreksiz ortam problemlerinin çözümünde gerekli olan hesaplayıcı kapasitesi ve hesap süresi artmaktadır. Bunlardan başka mühendislik problemleri evrensel bir yaklaşımla; kararlı durum problemlerini içeren denge problemleri, kararlı durum problemlerindeki bazı parametrelerin kritik değerlerinin bulunmasını gerektiren özdeğer problemleri ve başlangıç değer formundaki problemleri içeren propagasyon problemleri olarak üç temel gruba da ayırmak mümkündür (Crandall, 1968). Bu tarz bir sınıflandırmada da elde edilen denklem; kapalı yada açık sınır ve/veya başlangıç değerine sahip kısmi veya adi türevli bir diferansiyel denklem yada lineer bir denklem takımı olarak elde edilir. Lineer bir diferansiyel denklem takımını sağlayan fonksiyonların bir bölgedeki değerleri tayin edilirken, bazı matematik güçlüklerle karşılaşılır. Bunun için bu hallerde, önce bu fonksiyonların verilen bölgenin sonlu uzunluktaki bazı noktalarına ait değerleri aranır. Daha sonra, bu değerler kullanılarak diğer bilinmeyen noktalardaki değerler elde edilir. Bu şekilde sürekli bir ortam yerine, cebirsel bir denklem takımının çözümünü gerektiren ayrık bir ortam alınmış olur. Hızlı ve yüksek kapasiteli hesaplayıcıların gelişmesi, ve kullanımının yaygınlaşması nedeniyle sürekli ortam yerine süreksiz ortam modeli üzerinden işlem yapmaya elverişli yöntemler artmıştır (Celia ve Gray, 1992; Mitchell, 1976; Hildebrand, 1965). Bu yöntemler içinde sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar günümüzde yaygın olarak kullanılabilir. Karakteristik büyüklüklerin ortam içinde değişmesini ifade edebilmesi ve karmaşık sınır şartlarının çözüme

katılabilmesine olanak vermesi bakımından sonlu elemanlar daha yaygındır. Kurulan matematik model çoğunlukla sistemi ifade eden ya bir integral denklem yada kısmi veya adi türevli bir diferansiyel denklemdir. Sınır koşullarının karmaşıklığı nedeniyle elde edilen diferansiyel denklemin analitik çözümü çoğu durumda mümkün olmaz. Bu nedenle sayısal analiz tekniklerine başvurulur. Bilgisayar tekniğindeki gelişmeler ve denklemlerin matris formda ifade edilebilmesi sayısal analiz metotlarında büyük bir gelişmeye neden olmuştur. Bu metotlar içinde; sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, varyasyonel (değişim) hesap, Rayleigh-Ritz gibi yaklaşık metotlar günümüze kadar etkin olarak kullanılmıştır. Çoğu sayısal hesap yönteminde sürekli denge problemi sonlu sayıda serbestlik dereceli bir sisteme indirgenerek çözüme ulaşılır (Crandall, 1968).

2. AMAÇ

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için; sonlu elemanlar, sonlu farklar, sınır elemanlar gibi birkaç sayısal çözüm yöntemi mevcut olup, bu metotlar günümüze kadar mühendislikte ve fizikte uygulama alanı olan titreşim, stabilite, akışkanlar mekaniği, sürekli ortam mekaniği, sıvı veya termal etkilere maruz yapıların analizi gibi pek çok probleme başarıyla uygulanmıştır. Gerek sonlu elemanlar ve gerekse sonlu farklar metodunda düğüm noktası sayısı arttıkça elde edilen çözümlerin hassasiyetinin arttığı bilinmektedir. Bununla birlikte, daha hassas sonuçlar elde etmek için düğüm noktası sayısının artırılması, gerekli olan bilgisayar kapasitesi ve hesap süresi de aynı oranda arttırmaktadır. Ancak pek çok problemde gerçek değere yakın hassas sonuçlar fiziksel anlamda ancak birkaç özel noktada gerekmektedir. Bu metotlar içinde sonlu elemanlar ve sonlu farklar metotları kullanım alanı diğerlerine göre daha fazla olan iki analiz tekniğidir. Sonlu elemanlar metodunda çözüm için yaklaşık bir fonksiyon seçilerek çözüme başlanır. Ancak sonlu elemanlar metodunda seçilen enterpolasyon fonksiyonları lokal düzeyde olup elemanlar için geçerlidir (Zienkiewicz, 1977). Sonlu elemanlar metodunda çözüm bölgesi çok fazla elemana ayrılarak yeter hassasiyette sonuçlar elde etmek mümkündür. Özellikle plak veya kabuk elemanların hassas çözümleri ancak yüksek sayıda elemana bölünerek sağlanır (Civalek, 1998). Elemanın çok fazla bölgeye ayrılarak (mesh generation) çözüme ulaşılması durumunda ise gerekli olan hesaplayıcı kapasitesi ve zaman artacaktır. Bununla birlikte yeter yaklaşıpta sonuçlar yani gerçek değere çok yakın sonuçlar mühendislik uygulamalarında çoğunlukla bir veya birkaç spesifik noktada istenir. Daha az grid nokta sayısı kullanılarak yeter hassasiyette sonuçlar verebilecek bir metot olan Diferansiyel Quadrature Metodu (DQM); koordinat doğrultusuna göre bir fonksiyonun türevi, çepeçevre saran bir çözüm bölgesindeki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşım kurabilen sürekli bir fonksiyon ve o doğrultu boyunca bütün ağ noktalarındaki fonksiyon değerlerinin tümünün lineer toplamı olarak ifade edilebileceği prensibine dayanır (Bert vd., 1987; Mingle, 1977). Benzer sayısal yaklaşım yöntemlerinde olduğu gibi, DQ metodu da mevcut türev denklemi, çözüm bölgesinde önceden seçilen düğüm noktalarındaki bilinmeyen fonksiyon değerleri cinsinden, lineer denklem takımına veya titreşim ve burkulma problemlerinde bir özdeğer problemine dönüştürür. Bu denklemlere ilaveten sınır şartları da DQ metoduna uygun formda yazılır. Sınır şartlarının Dirichlet ve/veya Neuman yada karışık olması herhangi bir güçlük doğurmaz (Bert ve Malik, 1996; Civalek ve Çatal, 2002a).

3. DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU

Diferansiyel quadrature metodu; bir fonksiyonun verilen bir ayrık noktadaki bir uzay değişkenine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon

değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamı ile ifade edilir, şeklinde tanımlanan düşünceye dayanır. Yeter yaklaşıpta sonuçlar elde etmek için daha az sayıda grid kullanan diferansiyel quadrature metodu ; fizik ve mühendislikte karşılaşılan başlangıç değer ve sınır değer problemleri için farklı bir yaklaşım ortaya koymuştur. Bu amaçla tek boyutlu bir $u(x)$ fonksiyonun birinci türevini $x_i (i=1,2,\dots,N)$ noktalarında N ayrıık nokta için göz önüne alırsak i .nci ayrıık nokta için birinci türev Eşitlik 1'deki gibi olacaktır.

$$u_x(x_i) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} u(x_j) ; \quad i = 1,2,\dots,N \quad (1)$$

Burada x_j değişken bölgesindeki ayrıık noktaları, $u(x_j)$ bu noktalardaki fonksiyon değerlerini, ve A_{ij} birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayılarını ifade eder. Ağırlık katsayılarının hesabı, karşılık gelen koordinat yönlerinde fonksiyonel yaklaşımlar ile gerçekleştirilir. Test fonksiyonu yada yaklaşım fonksiyonu olarak bilinen bu fonksiyonların seçiminde süreklilik şartına dikkat edilmelidir. Benzer zorunluluk sonlu elamanlar yöntemindeki enterpolasyon fonksiyonlarının seçiminde de vardır. Ancak DQ metodunda, seçilen fonksiyonlarının Ritz metodunda olduğu gibi sınır şartını sağlaması zorunluluğu yoktur. Yaklaşım fonksiyonları, alan değişkenlerinin olası kararlı yani üniform durumlarını tanımlayabilmeli ve diferansiyel denklemdeki yada sınır şartlarındaki mevcut en yüksek dereceli diferansiyele kadar türevinin alınabilmesi gerekir. Yani süreklilik şartı için, bir koordinat yönündeki düğüm sayısı, diferansiyel denklemdeki karşılık gelen bağımsız değişkene göre en yüksek dereceli türevin bir fazlasına eşit olmalıdır. Belmann ve arkadaşları. ağırlık katsayılarının hesabı için iki farklı yöntem önermişlerdir. Bunlardan birincisinde Eşitlik 1'de verilen bağıntı tam olarak alındığında, test fonksiyonu olarak $(N-1)$ veya daha küçük dereceden seçilen polinom fonksiyonu için Eşitlik 2 elde edilir.

$$u_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1,2,\dots,N \quad (2)$$

Bu bağıntı Eşitlik 1'de yerine yazılırsa Eşitlik 3'de belirtildiği formda A_{ij} birinci mertebeden ağırlık katsayıları olmak üzere bir lineer denklem takımı verir.

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^{k-1} ; \quad i = 1,2,\dots,N \quad \text{ve} \quad k = 1,2,\dots,N \quad \text{için} \quad (3)$$

Ancak bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinanı Vandermonde formunda olduğundan tekil bir çözüme sahiptir. Denklem ağırlık katsayıları için analitik olarak Hamming'in önerdiği metotla yada Vandermonde denklemleri için Bjorck ve Pareyra'nın önerdiği gibi bilinen bazı özel algoritmalar ile sayısal olarak çözülebilir (Hamming, 1973; Bjorck ve Pareyra, 1970). Bu tekilliği gidermek için, ağırlık katsayıları, değişik grid nokta sayıları ile Eşitlik 3 eşit grid değerleri için hesaplanmalıdır. Eşitlik 3 matris formda da Eşitlik 4'deki gibi verilebilir.

$$\left\{ \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right\}_i = [A_{ij}] \left\{ u(x) \right\}_j \quad (4)$$

Benzer işlemler iki ve daha fazla derecen türev ifadeleri için de yazılabilir. Böylece, her bir dereceden türev için ağırlık ifadeleri birinci dereceden türev ifadesinden farklı olmaktadır. İkinci dereceden türev için metot Eşitlik 5’de görüldüğü gibi verilir.

$$u_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} u(x_j) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

Burada B_{ij} ikinci dereceden türev için ağırlık katsayısıdır. Eşitlik 5 birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden Eşitlik 6’daki gibi yazılabilir.

$$u_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{jk} u(x_k) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

Eşitlik 2 ile verilen polinom fonksiyon uygulanarak ikinci dereceden türev ifadesi Eşitlik 7’deki gibi olmaktadır.

$$(k-1)(k-2)x_i^{k-3} = \sum_{j=1}^N B_{ij} x_j^{k-1} \quad (7)$$

Eşitlik 7, yukarıda verilen Eşitlik 3 bağıntısına benzer yaklaşımla çözülür. İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden ağırlık katsayıları B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} , sırasıyla Eşitlik 8, Eşitlik 9 ve Eşitlik 10’da görüldüğü formda hesaplanır.

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj} \quad (8)$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} \quad (9)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} C_{kj} \quad (10)$$

Bellman ve arkadaşları tarafından ağırlık katsayılarının hesaplanması için önerilen ikinci metotta birinciye benzer olup farklı bir test fonksiyonu seçilir (Jang vd., 1989). Eşitlik 1’i sağlayacak şekilde x_k ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri olarak fonksiyonu seçilir (Eşitlik 11).

$$u_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x-x_k)L_N^{(1)}(x_k)}, \quad k=1, 2, \dots, N \quad (11)$$

Burada N grid nokta sayısı, $L_N(x)$ N. dereceden legendre polinomu, $L_N^{(1)}(x)$ ise bu polinomun birinci türevidir. Eşitlikteki x_k ötelenmiş legendre polinomunun kökleri olarak

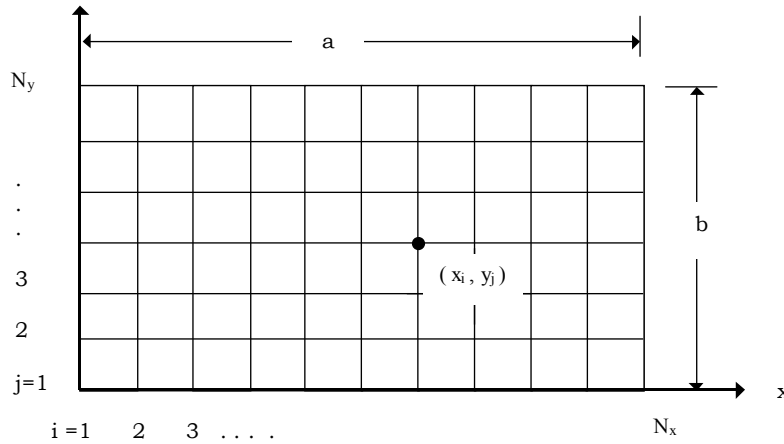
seçilip Eşitlik 11 ile verilen polinom fonksiyon Eşitlik 1'de yazılırsa ağırlık katsayıları Eşitlik 12a ve Eşitlik 12b'de gibi yazılabilir.

$$A_{ij} = \frac{L'_N(x_i)}{(x_i - x_j)L'_N(x_j)} \quad i \neq j \text{ için} \quad (12a)$$

$$A_{ii} = \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_i - 1)} \quad i = j \text{ için} \quad (12b)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

Bu ikinci yaklaşımda, Eşitlik 12a ve Eşitlik 12b ile tanımlanan ağırlık katsayıları birincide olduğu gibi herhangi bir tekillik problemi ve lineer denklem takımı çözmeden elde edilir. Bir boyutlu problemlere benzer olarak iki boyutlu problemler içinde diferansiyel quadrature metodu geliştirilebilir. Şekil 1'de görülen dikdörtgen düzlem için, N_x x-doğrultusundaki grid ve N_y y-doğrultusundaki grid sayısı olmak üzere türev ifadeleri yazılabilir. Bu amaçla $u(x,y)$ fonksiyonunun r -inci mertebeden x 'e göre, s -mertebeden y 'e göre ve $(r+s)$ 'nci mertebeden x ve y değişkenlerine göre (x_i, y_j) ayrıık noktaları için türev ifadeleri Eşitlik 13–Eşitlik 15'de verilmiştir.



Şekil 1. İki boyutlu bölge için grid noktaları

$$\left. \frac{\partial^r u}{\partial x^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} u(x_k, y_j) \quad ; \quad r = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial y^s} \right|_{y=y_j} = \sum_{k=1}^{N_y} B_{jk}^{(s)} u(x_i, y_k) \quad ; \quad s = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial^{(r+s)} u}{\partial x^r \partial y^s} \right|_{x_i y_j} = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \left(\frac{\partial^s u}{\partial y^s} \right)_{x_i y_j} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^{(s)} u(x_k, y_m) \quad (15)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x, \text{ ve } j = 1, 2, \dots, N_y$$

$A_{ij}^{(r)}$ ve $B_{ij}^{(s)}$ $u(x,y)$ fonksiyonunun sırasıyla x 'e ve y 'ye göre r 'inci ve s 'inci mertebeden x_i ve y_j ayrık noktaları için yazılan türev ağırlık katsayılarıdır. Bu katsayılar ilk olarak Shu ve Richards tarafından geliştirilmiştir (Shu vd., 1992). Ağırlık katsayıları Eşitlik 16–Eşitlik 19'daki gibi olmaktadır.

$$A_{ij}^{(r)} = r \left[A_{ii}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x, \quad j \neq i; \quad \text{ve } r = 2, 3, \dots, N_x - 1 \quad (16)$$

$$B_{ij}^{(s)} = s \left[B_{ii}^{(s-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(s-1)}}{y_i - y_j} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_y, \quad j \neq i; \quad \text{ve } s = 2, 3, \dots, N_y - 1 \quad (17)$$

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} A_{ij}^{(r)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad \text{ve } r = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (18)$$

$$B_{ii}^{(s)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} B_{ij}^{(s)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_y \quad \text{ve } r = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (19)$$

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU (GDQ)

Yukarıda temel prensipleri verilen DQ yaklaşımında ağırlık katsayılarının hesaplanmasında çeşitli güçlükler ortaya çıkmaktadır. Birinci yöntemde elde edilen denklemin katsayılar matrisi Vandermonde sistemi olduğundan determinantının hesabında güçlük çıkar ve denklemin çözümü tekindir. Özellikle grid sayısı arttıkça sonuçların hassasiyeti azalabilmektedir. N grid sayısı 20'den büyük olduğu durumlarda sonuçların güvenilirliği azalmaktadır. Bunlara ilaveten, her bir işlem adımında $N \times N$ denklem takımını çözme zorunluluğu vardır. İkinci yaklaşımda ise farklı sınır şartları ve geometri için metodun uygulanabilirliği azalmaktadır. Yani; gerek, daha az sayıda grid noktası seçilerek her işlem adımında bir lineer denklem takımı çözmeyi gerektiren birinci yöntemde gerekse de düğüm noktalarının dağılımını kısıtlayan Legendre yaklaşımında metodun uygulanabilirliği açısından çeşitli güçlükler vardır. Dolayısıyla; hem bu güçlükleri gidermek açısından hem de metodun kullanım alanı ve uygulanabilirliğini kolaylaştırmaya yönelik çabalar sonucunda iki ayrı grup tarafından bağımsız olarak metod geliştirilerek ağırlık katsayılarının hesabı farklı grid noktaları ve yüksek dereceden türevler için uygun bir formda elde edilebilmiş ve genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ortaya çıkmıştır (Lin vd., 1994). Shu ve Richards ağırlık katsayıları için herhangi bir tekilliğe neden olmayan ve büyük sayıda lineer denklem takımı çözümü gerektirmeyen analitik ifadeler önermişlerdir. Bu metotta birinci ve ikinci dereceden türevler için bağıntılar Eşitlik 20 ve Eşitlik 21'de verilmiştir.

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x, \quad j \neq i, \quad (20)$$

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{P^{(1)}(y_i)}{(y_i - y_j)P^{(1)}(y_j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_y, \quad j \neq i, \quad (21)$$

Burada;

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_x} (x_i - x_j), \quad P^{(1)}(y_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_y} (y_i - y_j), \quad (22)$$

ve

$$A_{ij}^{(r)} = r \left[A_{ii}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x, j \neq i; \quad \text{ve } r = 2, 3, \dots, N_x - 1 \text{ için} \quad (23)$$

$$B_{ij}^{(s)} = s \left[B_{ii}^{(s-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(s-1)}}{y_i - y_j} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_y, j \neq i; \quad \text{ve } s = 2, 3, \dots, N_y - 1 \text{ için} \quad (24)$$

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} A_{ij}^{(r)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \text{ ve } r = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad (25)$$

$$B_{ii}^{(s)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} B_{ij}^{(s)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_y \text{ ve } r = 1, 2, \dots, N_y - 1. \quad (26)$$

Üniform grid noktaları için Eşitlik 20 ve Eşitlik 21 ile verilen aşağıdaki forma indirgenir (Eşitlik 27, Eşitlik 28).

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{(i-1)!(N-i)!}{\Delta x (i-j)(j-1)!(N-j)!} \quad i, j = 1, 2, \dots, N, j \neq i \quad (27)$$

$$B_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{(i-1)!(M-i)!}{\Delta y (i-j)(j-1)!(M-j)!} \quad i, j = 1, 2, \dots, M, j \neq i \quad (28)$$

Burada $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ ve $\Delta y = y_i - y_{i-1}$ 'dir. Bütün grid noktalarındaki fonksiyon değerleri hesaplanınca herhangi bir noktadaki türev yaklaşımlar Eşitlik 29–Eşitlik 31'deki gibi olur.

$$U(x, y_j) = \sum_{i=1}^{N_x} U(x_i, y_j) \alpha_i(x) \quad (29)$$

$$U(x_i, y) = \sum_{j=1}^{N_y} U(x_i, y_j) \beta_j(y) \quad (30)$$

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} U(x_i, y_j) \alpha_i(x) \beta_j(y) \quad (31)$$

Burada $\alpha_i(x)$ ve $\beta_j(y)$ değerleri sırasıyla x ve y doğrultularındaki Lagranj enterpolasyon polinom fonksiyonlarıdır (Eşitlik 32 ve Eşitlik 33).

$$\alpha_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{N_x})}{M^{(1)}(x_i)} \quad (32)$$

$$\beta_j(y) = \frac{(y - y_1)(y - y_2) \dots (y - y_{j-1})(y - y_{j+1}) \dots (y - y_{N_y})}{P^{(1)}(y_j)} \quad (33)$$

Benzer olarak $U(x, y)$ fonksiyonunun x ve y koordinatlarına göre herhangi bir noktadaki türevi elde edilir. Eğer x_i Eşitlik 34'de verildiği gibi trigonometrik bir formda seçilirse Eşitlik 20 ve Eşitlik 21 bağıntıları Eşitlik 35 ve Eşitlik 36'da verilen forma indirgenir.

$$x_i = \{ \cos 0, \cos \pi/N, \cos 2\pi/N, \dots, \cos 1 \} \quad (34)$$

$$A_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{c_j(x_i - x_j)} \quad ; 0 < i < N \quad (35)$$

$$A_{ij} = \frac{2(-1)^{i+j}}{c_j(x_i - x_j)} \quad ; i = 0 \text{ ve } i = N \quad (36)$$

Dikkat edilmelidir ki; örnek noktaların sayısı verilen bağıntıların performansında yani ağırlık katsayılarının hesabında etkili değildir. Hesap performansını geliştirmek açısından önemlidir. Bundan başka, bazı durumlarda bu noktalar çözümün doğruluğunu etkileyebilmektedir. Örneğin eşit aralıklı noktalar ile işlem kısmen daha kolay ve uygulaması daha basittir, ancak eşit olmayan nokta aralığı için az da olsa sonuçların hassaslığı düşür. Düşüm noktalarının seçiminde sıkça kullanılan ve önerilen metot her iki doğrultuda yani her bir koordinat yönünde (tek boyutlu problemler için bir yönde) eşit aralıklı seçilen Eşitlik 37 ve Eşitlik 38'de verilen değerlerdir (Du vd., 1994; Bert vd., 1994a).

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1} \quad ; i = 1, 2, \dots, N_x ; j = 1, 2, \dots, N_y \quad (37)$$

$$y_j = \frac{j-1}{N_y-1} \quad ; i = 1, 2, \dots, N_x ; j = 1, 2, \dots, N_y \quad (38)$$

Bazı durumlarda eşit aralıklı olmayan noktaların seçiminin daha iyi sonuç verdiği bilinmektedir. Yine iki boyutlu problemler için eşit olmayan grid noktaları Chebyshev-Gauss-Lobatto noktaları için Eşitlik 39 ve Eşitlik 40'da verilen değerler seçilir (Bert ve Malik, 1996; Du vd., 1996).

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right] \quad , i = 1, 2, \dots, N_x \quad (39)$$

$$y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{j-1}{N_y-1} \pi \right) \right] \quad , j = 1, 2, \dots, N_y \quad (40)$$

Bununla birlikte diferansiyel quadrature çözümlerinde farklı koordinat yönlerindeki grid noktaları sayısı ve tipi bakımından farklı seçilebileceği gibi, farklı koordinat yönlerinde farklı test fonksiyonları da seçilebilir.

5. SAYISAL UYGULAMALAR

5.1. Örnek 1

Üniform yayılı yük etkisindeki lineer elastik kirişlerin çeşitli noktalarındaki düşey deplasman hesabını gözönüne alalım. Moment ile eğrilik arasındaki bağıntı Eşitlik 41'deki gibidir. Bağıntı Eşitlik 42'deki gibi olur.

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{q}{2EI} (Lx - x^2) \quad (41)$$

$$X = x/L \quad , \quad Y = y/\alpha \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{qL^4}{2EI} \quad \text{için boyutsuz halde;}$$

$$\frac{d^2 Y}{d X^2} = X - X^2 \quad (42)$$

Elde edilen bu bağıntıya DQ metodu uygulanırsa Eşitlik 43'deki sonuç elde edilir.

$$\sum_{j=1}^N B_{ij} Y_j = X_i - X_i^2 \quad (43)$$

N=5 grid değeri için çözüm yaparsak, Sınır koşullarından $X=0$ için $Y=0$; $X=L$ için $Y=0$; Yani, $Y_1=Y_5=0$ olur. Böylece Eşitlik 43 mevcut sınır şartları elimine edilerek Eşitlik 44'deki gibi yazılabilir. Bağıntı matris formda Eşitlik 45'deki gibi verilebilir.

$$\sum_{j=2}^4 B_{ij} Y_j = X_i - X_i^2 \quad i = 2, 3, 4 \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_2 - X_2^2 \\ X_3 - X_3^2 \\ X_4 - X_4^2 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

Burada B_{ij} ikinci dereceden ağırlık katsayıları olup yukarıda tanımlanmış formüller yardımıyla eşit aralıklı grid noktaları için hesaplanır. Böylece bilinmeyen Y_i değerleri bulunur. Problem için kesin sonuç $Y = \frac{I}{12}(2X^3 - X^4 - X)$ şeklinde tanımlıdır (İnan,1996).

Hem her iki ucun basit mesnet olması için hem de diğer bazı mesnet koşulları için elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1. Üniform yayılı yük etkisindeki kiriş için karşılaştırmalı deplasman değerleri

Mesnet Şartı	X	0	1/4	1/2	3/4	1
Her iki uç basit mesnet	GDQ(N=5)	0	0.018553	0.026042	0.018553	0
	Kesin değer	0	0.018456	0.026040	0.018456	0
Her iki uç ankastre mesnet	GDQ(N=5)	0	0.0014647	0.00260421	0.00146475	0
	Kesin değer	0	0.0014648	0.00260416	0.0014648	0
Ankastre mesnet-Basit mesnet	GDQ(N=5)	0	0.00002442	0.00005212	0.000043852	0
	Kesin değer	0	0.00002441	0.00005208	0.000043945	0

5.2. Örnek 2

Eşitlik 46, Eşitlik 47a ve Eşitlik 47b'deki koşullar ile verilen sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y + x = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (46)$$

$$y(0) = 0 ; y(1) = 0 \quad (47a;47b)$$

Problemin öncelikle yaygın olarak kullanılan yöntemlerle çözümünü elde edelim.

VARYASYONEL Yöntem

$$I = \int_0^1 \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y^2 - 2xy \right] dx$$

$y(x) = a_1 x(1-x)$ quadratik polinom yaklaşımı ile I (a1) minimum olmalıdır.

$$\frac{dI}{da_1} = 0 \quad \text{için} \quad a_1 = 5/18 \quad \text{ve yaklaşık çözüm}$$

$$y(x) = \frac{5}{18} x(1-x)$$

şeklinde olur.

$y(x) = a_1 x(1-x) + a_2 x^2(1-x)$ şeklinde kübik yaklaşımda

$a_1 = 71 / 369, a_2 = 7 / 41$ bulunarak

$$y(x) = \frac{71}{369} x(1-x) + \frac{7}{41} x^2(1-x) \quad \text{olur.}$$

GALERKİN Metodu

$$Ly - f = y'' + y + x = 0$$

tanımlanır. Sınır şartları

$$y(0) = y(1) = 0$$

$$\int_0^1 (Ly - f) \varphi_1(x) dx = 0$$

$\varphi_i(x) = \{x(1-x), x^2(1-x)\}$ için çözüm $y(x) = \frac{5}{18}x(1-x)$ olarak elde edilir.

GDQM ile

N=5 nokta için GDQ metodu uygulanırsa 1. ve 5.noktalardaki değerler sınır koşullarından bilindiğinden GDQ formülasyonu Eşitlik 46'ya sadece 3 nokta için uygulanır.

$$\sum_{j=2}^4 B_{ij} y_j + y_j = -x_i \quad i = 2, 3, 4 \quad (48)$$

sınır koşullarından N=1 ve N=5 için değerleri $y_1 = 0$, $y_5 = 0$ olarak mevcuttur. Böylece Eşitlik 48, Eşitlik 49'daki gibi hesaplanır.

$$\left\{ \begin{bmatrix} B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X_2 \\ -X_3 \\ -X_4 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Burada ki; B_{ij} katsayıları ikinci dereceden türev ağırlık katsayılarıdır. Problem için analitik (kesin) sonuç

$$y(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

olarak verilmektedir. Hesaplanan sonuçlar Çizelge 2'de verilmiştir.

Çizelge 2. GDQM ile diğer yaklaşımların karşılaştırılması

X	Varyasyonel		Galerkin	GDQM	Kesin Değer
	Quadratik	Kübik			
0	0	0	0	0	0
1/4	0.052	0.044	0.052	0.044	0.044
2/4	0.069	0.069	0.069	0.070	0.070
3/4	0.052	0.060	0.052	0.060	0.060
1	0	0	0	0	0

Kişisel bir PC'de GDQ metodu kullanılarak denklemin çözümü sadece birkaç saniye sürmüştür. Elde edilen sonuçlar kesin çözüm değeri ile aynıdır. Çok kısa bir sürede ve hesaplayıcı bakımından çok az bir kapasite kullanılarak elde edilen bu hassas sonuçlar metodun en önemli avantajıdır. Daha önce yapılan çalışmalarda örneğin elastik bir kolonun burkulma yükü sonlu farklar metodunda 11 grid değeri için, sonlu elemanlarda 7 ayrık nokta için % 1 mertebelerinde hata ile elde edilirken, GDQ metodunda 5 nokta için kesin değer ile

aynı sonuç elde edilebilmiştir (Sherbourne ve Panday, 1991; Civalek ve Çatal, 2002; Choi vd., 2000; Civan ve Sliepcevich, 1983; Civalek, 2001).

5.3. Örnek 3

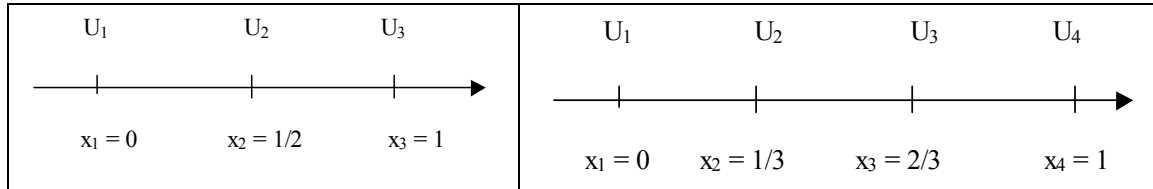
Hareketsiz (durağan) bir akışkan içerisinde çözünen (eriyen) bir maddenin sabit (steady-state) yayılışına ait fiziksel olayı ifade eden matematik bağıntı sınır koşulları ile birlikte Eşitlik 50'de tanımlanmıştır.

$$\Psi \frac{d^2 u}{d x^2} - K u = 0 \quad 0 < x < 1 \text{ cm} \quad (50)$$

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = \varepsilon$$

Çeşitli grid değerleri için GDQ metoduyla çözümü elde edelim (Şekil 2a ve Şekil 2b).



Şekil 2. Probleme ait grid noktaları a) (N=3); b) (N=5)

Seçilen 3 grid noktası için sınır koşullarından; $U_1 = 0$ ve $U_3 = \varepsilon$. Çözüm için gereken üçüncü değer sistemi ifade eden $\Psi \frac{d^2 u}{d x^2} - K u = 0$ türev denkleme $N = 3$ olmak üzere seçilecek polinom fonksiyonu ile GDQ metodunu tatbik ederek Eşitlik 51 elde edilir.

$$\sum_{j=1}^N B_{ij} u_j - \frac{K}{\Psi} u_j = 0 \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (51)$$

Burada $u(x)$ çözünen maddenin konsantrasyonu (M/L^3), Ψ difüzyon (yayıma) katsayısı (L^2/T), K reaksiyon derecesi yada oranı ($1/T$), ε ise (M/L^3) sınırdaki bilinen konsantrasyon değeridir. Sayısal değerler: $\Psi=0.01 \text{ cm}^2 / \text{s}$, $K=0.1 \text{ s}^{-1}$, $\varepsilon=1.0 \text{ g/cm}^3$ olarak verilsin. Birinci ve üçüncü sınır şartları için u değerleri sınır koşullarından bulunduğundan GDQ için denklem sadece 2.nokta için yazılmaktadır. Benzer olarak $N=5$ için (Şekil 2b) üç farklı noktada GDQ ifadeleri yazılarak bilinmeyen 3 nokta için değer elde edilebilir. Problemin sonlu farklar ile çözümü için 5 ayrı grid noktası için sonlu fark denklemlerini yazalım. Üç ayrı nokta için fark denklemlerini uygulayarak, ilk ve son değer sınır koşullarından bilindiğinden fark denklemleri ikinci nokta için $\Delta x=0.5$ olmak üzere yazılır (Eşitlik 52).

$$\Psi \left[\frac{U_1 - 2U_2 + U_3}{\Delta x^2} \right] - K U_2 = 0 \quad (52)$$

Burada $U_1=0$, $U_2=\varepsilon$ olduğundan Eşitlik 51 verilen sınır koşulları ile birlikte Eşitlik 53'de görüldüğü gibi matris formda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Psi} & 0 & 0 \\ (\Delta x)^2 & -K - \frac{2\Psi}{(\Delta x)^2} & \frac{\Psi}{(\Delta x)^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (53)$$

Buradan $U_1=0$, $U_2=0.2220$, $U_3=\varepsilon=1$ olur. Problem için kesin sonuç yani $U_2=0.171$ dir. Grid noktası yani sonlu fark denklemleri için molekül sayısı 4 olarak alınırsa bu kez sınır şartları $U_1=0$, $U_4=\varepsilon=1$ olur. Böylece sonlu fark denklemleri U_2 ve U_3 noktaları için yazılır. Bu durumda $\Delta x=0,333$ olmaktadır. Bu durumda elde edilen değerler $U_2=0.094$ ve $U_3=0.291$ olur. $U_1=0$ ve $U_4=\varepsilon=1$ değerleri ise başlangıç koşullarından bilinmektedir. Eşit aralıklı noktalar seçerek 3 ayırık nokta için GDQ metoduyla bulunan sonuçlar ve sonlu farklar metodu ile bulunan değerler Çizelge 3'de verilmiştir. Görüleceği üzere çok küçük grid sayısı için bile sonuçlar hayli yaklaşıktır. N grid sayısı artırılarak 5 için GDQ metodu uygulanınca elde edilen sonuç kesin değer ile aynıdır.

Çizelge 3. N=3 ve N=5 grid sayıları için hesaplanan sonuçların yakınsamaları

x	GDQ (N=3)	GDQ (N=5)	Sonlu Fark (N=3)	Kesin Değer (Celia vd., 1992)
0	0	0	0	0
0.5	0.176(%2.33)	0.171 (%0)	0.222(%29)	0.171
1	1	1	1	1

5.4. Örnek 4

Uygulamalı fizikte, düzlem elastisite teorisinde ve benzeri pek çok uygulamada karşımıza çıkan biharmonik eşitlik, Eşitlik 54 yada Eşitlik 55'deki gibidir.

$$\Delta\Delta F = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (55)$$

Bu bağıntının sağ tarafının sıfırdan farklı olmasına göre çeşitli fiziksel olayların yönetici denklemlerini ifade eder. Örneğin ince elastik dikdörtgen bir plağın serbest titreşimine ait yönetici bağıntı boyutsuz formda olarak tanımlıdır (Eşitlik 56).

$$\frac{\partial^4 F}{\partial X^4} + 2k^2 \frac{\partial^4 F}{\partial X^2 \partial Y^2} + k^4 \frac{\partial^4 F}{\partial Y^4} = \Omega^2 F \quad (56)$$

Burada F titreşimin boyutsuz mod fonksiyonu, Ω boyutsuz frekans olup, $\Omega = \omega^2 a^4 \rho h/D$ ile verilir, $X=x/a$ ve $Y=y/b$ boyutsuz koordinatlar, a ve b plağın x ve y doğrultusundaki boyutları, $k=a/b$ plak kenarlarının oranı, h plak kalınlığı, ρ , malzeme yoğunluğu, ve D plak

eğilme rijitliği olup $D=Ek^3/12(1-\nu^2)$ şeklinde tanımlıdır. Metodun uygulanmasıyla Eşitlik 57'deki bağıntı elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{N_x} D_{ik} F_{kj} + 2k^2 \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} B_{ik} B_{jm} F_{km} + k^4 \sum_{k=1}^{N_y} D_{jk} F_{ik} = \Omega^2 F_{ij} \quad (57)$$

$i=1,2,\dots,N_x$ ve $j=1,2,\dots,N_y$ için

Dört kenarı ankastre tutulmuş (C-C-C-C) plak için sınır koşulları olarak verilen deplasmanlar ve dönmelerin kenarlarda sıfır olması şartından Eşitlik 58 ve Eşitlik 59 yazılır.

$$F(X,0) = F(X,1) = 0 \quad \text{ve} \quad F(0,Y) = F(1,Y) = 0 \quad (58)$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(X,0) = \frac{\partial F}{\partial Y}(X,1) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial F}{\partial X}(0,Y) = \frac{\partial F}{\partial X}(1,Y) = 0 \quad (59)$$

DQ metodu bu sınır koşullarına uygulanırsa Eşitlik 60–Eşitlik 62 elde edilir.

$$F_{1j} = F_{Nj} = 0 \quad \text{ve} \quad F_{i1} = F_{iN} = 0 \quad (60)$$

$$F_{1j} = F_{Nj} = 0 \quad \text{ve} \quad F_{i1} = F_{iN} = 0 \quad (61)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} A_{1k} F_{kj} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{Nk} F_{kj} = 0 \quad (62)$$

Serbest titreşim problemi Eşitlik 63'deki gibi tanımlanır. Bazı düzenlemeler ve matris işlemlerinden sonra bağıntı Eşitlik 64'de hali alır.

$$\begin{bmatrix} [S_{bb}] & [S_{bd}] \\ [S_{db}] & [S_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_b \\ F_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \Omega^2 \{F_d\} \end{Bmatrix} \quad (63)$$

$$([S] - \Omega^2 [I]) \{F_d\} = 0 \quad (64)$$

Burada $[S] = [S_{dd}] - [S_{db}] [S_{bb}]^{-1} [S_{bd}]$ ve b ile d alt indisleri sınır koşulları ve yönetici bağıntılarındaki diferansiyel quadrature analoglarında kullanılan grid noktalarını belirtir ve toplam bağıntıdaki katkısını gösterir. Elde edilen ilk iki frekans Çizelge 4'de Leissa tarafından verilen kesin sonuçlar ile birlikte sunulmuştur (Leissa, 1973). Grid nokta sayısı ile %hata miktarı Şekil 3'de eşit aralıklı nokta dağılımı ve Şekil 4'de Chebyshev-Gauss-Lobatto nokta dağılımına uygun olarak her bir frekans değeri için hesaplanmıştır. Hata oranı Eşitlik 65'de verilen bağıntı esas alınarak hesaplanır.

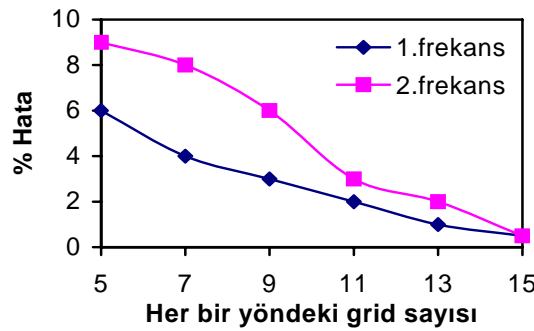
$$\%Hata = \left(\frac{\text{GDQ değeri} - \text{Kesin değer}}{\text{Kesin değer}} \right) \times 100 \quad (65)$$

Şekilden görüleceği üzere düğüm nokta (grid) sayısı arttıkça hata miktarı düşmekte yani daha doğru sonuçlara ulaşılmakta, ancak belirli bir değerden sonra düğüm nokta sayısının

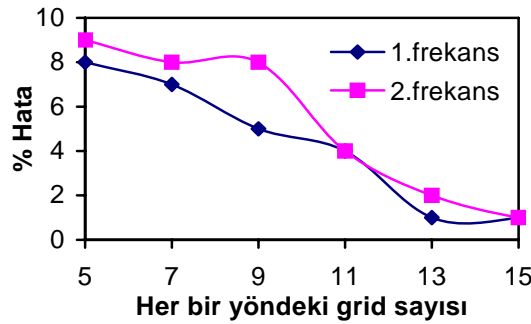
artmasının hassasiyet üzerine pek bir etkisi olmamaktadır. Ayrıca Chebyshev-Gauss-Lobatto nokta dağılımı için hata miktarı daha keskin ve hızlı bir düşüş göstermektedir.

Çizelge 4. Plak serbest titreşim hesabı için analiz sonuçları

$k = 1.0$	Ω_1 (1.frekans)	Ω_2 (2.frekans)
GDQ (5×5)	37.85	80.02
GDQ (7×7)	37.19	78.85
GDQ (9×9)	37.01	76.42
GDQ (11×11)	36.18	74.86
GDQ (13×13)	35.87	73.75
Kesin değer (Leissa,1973)	35.99	73.41



Şekil 3. Grid sayısına bağlı olarak hata miktarının değişimi (Eşit aralıklı nokta dağılımı)



Şekil 4. Grid sayısına bağlı olarak hata miktarının değişimi (Chebyshev-Gauss-Lobatto nokta dağılımı)

6. SONUÇ

Çalışmada geliştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ile bazı kısmi türevli diferansiyel denklemler verilen sınır koşulları altında çözülmüştür. Sonuçların yaklaşıklığı, gerektirdiği hesaplayıcı kapasitesi ve uygulama alanının çeşitliliği dikkate alınınca, metodun son yıllarda yaygın olarak kullanılmasının nedenleri anlaşılmaktadır.

Günümüzde, sonlu farklar ve sonlu elemanlar metotları da hassas sonuçlar vermekte ancak hala yüksek sayıda grid (mesh generation) gerekmektedir. Bu ise çözüm için gerekli hesaplayıcı kapasitesi ihtiyacını ve analiz süresini artırmaktadır. Daha az grid kullanarak daha kısa sürede sonuca ulaşma çabaları neticesinde diferansiyel quadrature metodu önerilmiştir. Bununla birlikte metot; ağırlık katsayılarının hesaplanmasındaki güçlüklerin giderilmesi ve

kullanılan yaklaşım fonksiyonlarının bulunmasından sonra yaygınlaşmış ve ancak 1987 yılında yapı mekaniği ve akışkanlar mekaniği problemlerine başarıyla uygulanmıştır. Günümüze kadar son on yıl içinde plak ve kirişlerin statik, dinamik ve stabilite hesabına başarıyla uygulanmış olup, metodun harmonik DQ, genelleştirilmiş DQ gibi farklı versiyonları geliştirilmiştir. Sonlu elemanlarda seçilen yaklaşım fonksiyonu eleman bazında iken DQ metodunda tüm sistem için geçerlidir. Ritz metodunda seçilen polinom fonksiyonu sınır koşullarını sağlamalıdır. Bununla birlikte DQ metodunda böyle bir zorunluluk yoktur. Sonlu farklar metodu problemin çözümüne seriler ile yaklaşım kurarken, DQ metodunda polinom yaklaşım kurur. Bunlara ilaveten daha az grid noktası ile daha kısa sürede ve daha düşük kapasitede hesaplayıcı ile çok hassas sonuçlar elde edilebilmesi metodun en belirgin avantajıdır. Yüksek sayıda düğüm noktası kullanılan problemlerde ağırlık katsayılarının hesaplanmasındaki güçlükler ise, genelleştirilmiş diferansiyel quadrature veya harmonik diferansiyel quadrature metotlarının geliştirilmesiyle giderilmiş olsa da bu konudaki çalışmalar devam etmektedir.

TEŞEKKÜR

Yazarlar diferansiyel quadrature metotlarıyla ilgili bazı önemli belge ve makaleleri sağlayan Oklahoma Üniversitesi Profesörlerinden Sayın C.W.Bert'e ve sayısal hesaplar için gerekli programlar sırasında yardımlarını esirgemeyen İnş. Müh.A.K. BALTACIOĞLU'na teşekkür ederler.

KAYNAKLAR

- Bert C.W., Jang S.K., Striz A.G. (1987): "Two New Approximate Methods for Analyzing Free Vibration of Structural Components", AIAA Journal, 26 (5), 612-618.
- Bert C.W., Malik M. (1996): "Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: A Review", Applied Mechanics Review, 49(1), 1-28.
- Bert C.W., Wang Z., Striz A.G. (1994): "Static and Free Vibrational Analysis Of Beams and Plates by Differential Quadrature Method", Acta Mechanica, 102, 11-24.
- Björck A., Pereyra V. (1970): "Solution of Vandermonde System of Equations", Math. Comput., Vol. 24, 893-903.
- Choi S.T., Wu J.D., Chou Y.T. (2000): "Dynamic Analysis of A Spinning Timoshenko Beam by the Differential Quadrature Method", AIAA Journal, 38(5), 2000.
- Celia M.A., Gray W.G. (1992): "Numerical Methods for Differential Equations, Fundamental Concepts for Scientific and Engineering Applications", Prentice Hall, New Jersey.
- Civalek Ö. (1998): "Plak ve Kabukların Sonlu Elemanlar Metoduyla Analizi", Yüksek Lisans Semineri, Fırat Üniversitesi.
- Civalek Ö. (2001): "Diferansiyel Quadrature Metodu ile Elastik Çubukların Statik, Dinamik ve Burkulma Analizi", XVI Mühendislik Teknik Kongresi, Kasım, ODTÜ, Ankara.
- Civalek Ö., Çatal, H.H. (2002a): "Plakların Diferansiyel Quadrature Metodu ile Stabilite ve Titreşim Analizi", IMO Teknik Dergi, baskıda.
- Civalek Ö., Çatal H.H. (2002): "Bir ve İki Boyutlu Yapıların Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Yöntemiyle Dinamik Analizi", Türkiye İnşaat Mühendisleri Odası, Mühendislik Haberleri, Sayı 417, s. 39-46.
- Civan F., Sliepcevich C.M. (1984): "Differential Quadrature For Multi Dimensional Problems", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 101, 423-443.
- Civan F., Sliepcevich C.M. (1983): "Solution of The Poisson Equation by Differential Quadrature", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19, 711-724.

- Crandall S.H. (1968): “Mühendislik Analizi, Sayısal Hesap Metotlarına Genel Bakış”, Çevirenler: Utku, Ş., Özden, E.Y., Berksoy matbaası.
- Çakıroğlu A., Özmen G., Özden E. (1974): “Yapı Sistemlerinin Hesabı için Matris Metotları ve Elektronik Hesap Makinası Programları”, Cilt I-II, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul.
- Du H., Lim M.K., Lin R.M. (1994): “Application of Generalized Differential Quadrature Method to Structural Problems”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, 1881-1896.
- Du H., Liew K.M., Lim M.K. (1996): “Generalized Differential Quadrature Method for Buckling Analysis”, Journal of Eng. Mech., ASCE, 122(2), pp. 95-100.
- Hamming R.W. (1973): “Numerical Methods for Scientists and Engineers”, McGraw-Hill, New York.
- Hasanov A.H. (2001): “Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi”, Literatür yayınları, İstanbul.
- Hildebrand F.B. (1965): “Methods of Applied Mathematics”, Prentice-Hall.
- İnan M. (1996) “Cisimlerin Mukavemeti”, 7.baskı, Beril Ofset, İstanbul.
- Jang S.K., Bert C.W., Striz A.G. (1989): “Application of Differential Quadrature to Static Analysis of Structural Components”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28, 561-577.
- Leissa A.W. (1973): “The Free Vibration of Rectangular Plates”, Journal of Sound and Vibration, 31, 257-293.
- Lin R.M., Lim M.K., Du H. (1994): “Deflection of Plates with Nonlinear Boundary Supports Using Generalized Differential Quadrature”, Computers and Structures, 53(4), 993-999.
- Mitchell A.R. (1976): “Computational Methods in Partial Differential Equations”, John Wiley.
- Mingle J.O. (1977): “The Method of Differential Quadrature for Transient Nonlinear Diffusion”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 60, 559-569.
- Sherbourne A.N., Pandey, M.D. (1991): “Differential Quadrature Method in the Buckling Analysis of Beams and Composite Plates”, Computers and Structures, 40(4), 903-913.
- Shu C., Richards B.E. (1992): “Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 15, 791-798.
- Zienkiewicz O.C. (1977): “The Finite Element Method in Engineering Science”, 3rd Edition, McGraw-Hill, London.

KISALTMALAR

N_x, N_y	=x ve y doğrultularındaki grid sayısı
$A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}$	=Birinci, İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden ağırlık katsayıları
$[A_{ij}]$	=Ağırlık katsayıları matrisi
u_x, u_{xx}	=u fonksiyonunun x'e göre birinci ve ikinci türevi
D	=Plak eğilme rijitliği
E	=Elastisite modülü
EI	=Eğilme Rijitliği
M_x	=Eğilme Momenti
ν	=Poisson oranı
a, b	=Plak boyutları
h	=Plak kalınlığı
k	=a/b şeklinde plak boyutlarının oranı, polinom derecesi
$L_N(x)$	=Legendre polinomu
X, Y	=x ve y yönündeki boyutsuz değerler
x_i, y_j	=x ve y yönündeki grid aralığı (eşit grid aralığı)
$\alpha_i(x); \beta_j(y)$	=x ve y doğrultularındaki Lagranj enterpolasyon polinomları
DQ	=Diferansiyel Quadrature
GDQ	=Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature
U	=Titreşimin boyutsuz mod fonksiyonu
Ω	=Boyutsuz frekans
ω	=Doğal frekans
ρ	=Plak malzemesinin yoğunluğu
Ψ	=Difüzyon (yayılma) katsayısı
K	=Reaksiyon derecesi yada oranı
ε	=Sınırdaki bilinen konsantrasyon değeri