

Dikdörtgenel Plakalarda Hareketli Isı Kaynağının Oluşturduğu Sıcaklık Dağılımı

Heat Distribution in a Rectangular Plate Heated by a Moving Heat Source

Yaşar PALA^{a,*}, Mehmet ÇAVUŞ^a

^aUludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 16059, Görükle, Bursa

Geliş Tarihi/Received : 10.05.2010, Kabul Tarihi/Accepted : 01.10.2010

ÖZET

Bu çalışmada, sabit hızla hareket eden ısı kaynağı tarafından ısıtılan dikdörtgenel plaka üzerindeki sıcaklık dağılımı incelenmekte ve analitik sonuçlar verilmektedir. Birinci olarak kaynağın sabit doğrultuda ve sabit hızla hareket ettiği hal için sıcaklık dağılımı elde edilmektedir. Farklı doğrultulardaki işleme sırasında oluşan sıcaklık dağılımının bulunması için mevcut yöntemin nasıl modifiye edilmesi gerektiği de açıklanmıştır. Son olarak dairesel ısı kaynağının oluşturduğu sıcaklık dağılımı elde edilmektedir. Her bir bölümde ısı kaynağı Dirac Delta distribüsyon fonksiyonu vasıtasıyla ifade edilmiştir. Sonuçlar parametrelerin çeşitli değerleri için örneklendirilmiştir. Sanayide kullanımdaki kolaylığı sağlamak için tek ve çok doğrultulu işleme için Matlab GUI Toolbox yardımıyla bir de ara yüz yazılımı geliştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler : *Isı iletimi, Hareketli ısı kaynağı, Plakadaki sıcaklık dağılımı, Çift katlı Fourier serisi.*

ABSTRACT

In this study, temperature distribution in a rectangular plate due to a moving heat source with a constant velocity is investigated and analytical expressions for the temperature are obtained. First, temperature distribution is obtained for a heat source moving with a constant speed at a constant direction. Second, how the present method can be modified for the process in different directions is expressed. Third, temperature distribution for the circular processing is formulated and solved. Heat source is defined by means of a Dirac Delta function. Results are exemplified for various values of the parameters. In order to provide the ease of use a GUI software in Matlab is also developed.

Keywords : *Heat conduction, Moving heat source, Temperature distribution in a plate, Double Fourier series.*

1. GİRİŞ

Metal kesme, kaynak operasyonları, taşlama, delme vs. gibi çok sayıdaki pratik mühendislik uygulamalarında, hareketli ısı kaynakları söz konusu olmakta ve sebep oldukları ısı iletimi ve gerilme durumu pratik olarak oldukça önem taşımaktadır. Hareketli ısı kaynağı, parça işleme esnasında sürtünme gibi etkenlerden dolayı meydana gelen ya da doğrudan ısı veren bir kaynak olarak düşünülebilir. İşleme sırasındaki bu ısı etki parça yüzeyinde sıcaklık değişimine ve dolayısıyla da termal gerilmelere yol açar. Bu yüzden hareketli ısı kaynağı içeren problemlerin çözümü sonucunda elde edilen sıcaklık dağılımı da oldukça önemlidir.

Son zamanlarda bazı nümerik yöntemler ve hazır paket programları yardımıyla bu problemlere çeşitli çözümler bulunmuştur (Cheng ve Lin, 2000; Hou ve Komanduri, 2000; Moulik v.d., 2001; Alilat v.d., 2004; Li ve Li, 2005). Ancak hareketli ısı kaynaklarının modelleme zorluğu dolayısıyla bu yöntemler ile elde edilen sonuçlar analitik çözüm ile elde edilecek sonuçlara kıyasla daha çok hata payına sahiptirler. Kidawa-Kukla dikdörtgenel plaka üzerinde hareketli ısı kaynağı tarafından meydana getirilen sıcaklık dağılımını Green Fonksiyonları teorisi içerisinde incelenmiştir (Kidawa-Kukla, 2008). Green Fonksiyonları yöntemi iyiyakınsakbiryöntem olmakla beraber, yüksek düzeyli bilgi birikimi gerektirmesi ve

* Yazılan yazar/Corresponding author. E-posta adresi/E-mail address : mypala@uludag.edu.tr (Y. Pala)

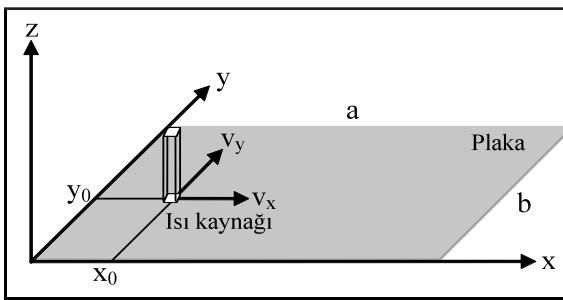
termal gerilmelerin incelenmesi sırasında gerilme analizi formülasyonunda kullanımının zorluğu dolayısıyla uygun düşmemektedir (Cole v.d., 1992). Bu çalışmada Çift Katlı Fourier Serileri kullanılarak hareketli kaynağın sebep olduğu sıcaklık dağılımı için analitik bir yöntem geliştirilmektedir. Elde edilen denklemlerin sayısal değerlendirme aşamasında çok kolaylıklar sağladığı ve özellikle de ısı gerilmelerin incelenmesinde uygun düştüğü görülmüştür.

Daha önceki çalışmalarda tek doğrultuda doğrusal ve dairesel hareketli ısı kaynakları için inceleme yapılmıştır. Bu çalışmada, birbirini takip eden farklı doğrultuda doğrusal hareketli ısı kaynağı kullanımının oluşturduğu sıcaklık dağılımının yöntemi de açıklanmaktadır. Böylece dairesel olmayan bir parça kesimi ve ya kaynak işlemi halinde doğrusal hareketli ısı kaynağı için sıcaklık dağılımı elde edilebilmektedir. Dairesel hareketli ısı kaynağı içeren durum için de analitik çözüm elde edilmiştir. Pratik açıdan önemli şekillerin işlenmesindeki sıcaklık dağılımını daha kolay hesaplamak ve sonucu görselleştirebilmek için MATLAB GUI Toolbox kullanılarak bir de arayüz programı geliştirilmiştir. Parametrelerin değişik değerleri için sonuçlar örneklendirilmiş ve çizdirilmiştir.

2. DOĞRUSAL HAREKETLİ ISI KAYNAĞI İÇİN SICAKLIK DAĞILIMI ANALİZİ

Üniform, kenar uzunlukları a ve b olan ince dikdörtgensel bir plakayı ele alalım. Plaka üzerindeki sıcaklık dağılımını veren $T(x,y,t)$ fonksiyonu,

$$\nabla^2 T + \frac{1}{\lambda} g(x, y, t) = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$



Şekil 1. Doğrusal hareketli ısı kaynağının ısıttığı plaka.

ısı iletim denklemini sağlamaktadır (Carslaw ve Jaeger, 1959; Chapman, 1984). Burada, $\nabla^2 = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)$, κ ; termal geçirgenlik, λ ; termal iletkenlik ve $g(x, y, t)$; enerji üretimini belirtmektedir. Bu çalışmada, termal enerjinin plaka yüzeyinde, belli bir doğrultuda hareket eden bir ısı kaynağı tarafından sağlandığı kabul edilmektedir. $g(x, y, t)$ ısı kaynağı fonksiyonu Dirac Delta fonksiyonu cinsinden,

$$g(x, y, t) = \begin{cases} \frac{q_0}{4\epsilon^2} \delta(x-x_0)\delta(y-y_0), & x = v_x t, y = v_y t \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (2)$$

olarak tanımlanabilir (Pala, 2006). Burada, q_0 ısı akısı, 2ϵ plaka yüzeyinde ısı kaynağı tarafından ısıtılan kare bölgenin boyutu ve $\delta(\cdot)$ ise Dirac delta fonksiyonudur. $x(t)$, $y(t)$ fonksiyonları

$$\bar{x}(t) = x_0 + v_x t, \quad \bar{y}(t) = y_0 + v_y t \quad (3)$$

şekindedir ve ısı kaynağının hareketini tanımlamaktadır. Burada, x_0, y_0 ; ısı kaynağının başlangıç koordinatlarını gösteren sabit sayılardır.

(1) denkleminin başlangıç ve sınır şartları

$$\begin{aligned} T(x, 0, t) = 0, \quad T(x, b, t) = 0 & \quad (a) \\ T(0, y, t) = 0, \quad T(a, y, t) = 0 & \quad (b) \\ T(x, y, 0) = 0 & \quad (c) \end{aligned} \quad (4)$$

şeklinde kabul edilmektedir. Yani plakanın başlangıç sıcaklığı 0°C olup, sınırları da 0°C sıcaklıkta tutulmaktadır.

2. 1. Çözüm Yöntemi

(1) sınır değer probleminin çözümü, Çift Katlı Fourier Serisi açılımı kullanılarak elde edilecektir.

$$\nabla^2 T + \frac{q_0}{4\lambda\epsilon^2} \delta(x-\bar{x})\delta(y-\bar{y}) = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5)$$

Denkleminin,

$$T(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}(t) \sin(\beta_n x) \sin(\gamma_m y) \quad (6)$$

şeklinde çift katlı bir Fourier Serisi tarafından sağlandığını kabul edelim. Burada, $\beta_n = \frac{n\pi}{a}$ ve $\gamma_m = \frac{m\pi}{b}$ olarak tanımlanmaktadır. Bu serinin, (4a) ve (4b) sınır şartlarını da peşinen sağladığına dikkat edelim. (6) denklemini, (5) denkleminde yerinde konularak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -(\beta_n^2 + \gamma_m^2) u_{mn}(t) \sin(\beta_n x) \sin(\gamma_m y) \\ + \frac{q_0}{4\lambda\epsilon^2} \delta(x-\bar{x})\delta(y-\bar{y}) \\ = \frac{1}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{u}_{mn}(t) \sin(\beta_n x) \sin(\gamma_m y) \end{aligned} \quad (7)$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafı $\sin(\beta_n x) \sin(\gamma_m y)$ ile çarpılıp sonra $x \rightarrow [0, a]$, $y \rightarrow [0, b]$ dikdörtgensel alanı üzerinde integre edilerek aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b -(\beta_n^2 + \gamma_m^2) \\ & \times u_{mn}(t) \sin(\beta_n x) \sin(\gamma_m y) \sin(\beta) \sin(\gamma) dx dy \\ & + \frac{q_0}{4\lambda\epsilon^2} \int_0^a \int_0^b \delta(x - \bar{x}) \delta(y - \bar{y}) \\ & \times \sin(\beta_n x) \sin(\gamma_m y) dx dy \\ & = \frac{1}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^a \int_0^b \dot{u}_{mn}(t) \sin(\beta_n x) \sin(\gamma_m y) \\ & \times \sin(\beta_n x) \sin(\gamma_m y) dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

Oysa, Dirac delta fonksiyonunun;

$$\int_0^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (9)$$

özelliği ile (Pala, 2006),

$$\begin{aligned} n = i \text{ ise} \\ \int_0^a \sin(\beta_n x) \sin(\beta_i x) dx = \frac{a}{2}, \quad n \neq i \text{ ise} = 0 \\ \int_0^b \sin(\gamma_n y) \sin(\gamma_i y) dy = \frac{b}{2}, \quad n \neq i \text{ ise} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

eşitlikleri kullanılarak, buradan (8) denklemi,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -(\beta_n^2 + \gamma_m^2) u_{mn}(t) \left(\frac{ab}{4} \right) \\ & + \frac{q_0}{4\lambda\epsilon^2} \sin(\beta_n \bar{x}) \sin(\gamma_m \bar{y}) \\ & = \frac{1}{\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{u}_{mn}(t) \left(\frac{ab}{4} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

ya da

$$\begin{aligned} \dot{u}_{mn}(t) + (\beta_n^2 + \gamma_m^2) \kappa u_{mn}(t) \\ = \frac{q_0 \kappa}{ab\lambda\epsilon^2} \sin(\beta_n \bar{x}) \sin(\gamma_m \bar{y}) \end{aligned} \quad (12)$$

olarak elde edilir. (12) denkleminin birinci mertebeden adi bir diferansiyel denklem olduğu açıktır. $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ şeklindeki birinci mertebede lineer diferansiyel denklem çözümü

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[c + \int Q e^{\int p(x) dx} dx \right] \quad (13)$$

şekindedir (Pala, 2006). Böylece (12) denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} u_{mn} = e^{-\kappa\lambda_{mn}^2 t} \\ \times \left[c + \bar{q}_0 \int e^{\kappa\lambda_{mn}^2 t} \sin(\beta_n \bar{x}) \sin(\gamma_m \bar{y}) dt \right] \end{aligned} \quad (14)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\lambda_{mn}^2 = \beta_n^2 + \gamma_m^2 \quad \text{ve} \quad \bar{q}_0 = \frac{q_0 \kappa}{ab\lambda\epsilon^2} \quad (15)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Çözümü kolaylaştırmak için trigonometrik fonksiyonların bazı özelliklerinden yararlanılarak

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$$

elde edilir. (14) denklemine bu özellik uygulanarak

$$\begin{aligned} u_{mn} = e^{-\kappa\lambda_{mn}^2 t} \\ \times \left[c - \frac{\bar{q}_0}{2} \left[\int e^{\kappa\lambda_{mn}^2 t} \cos(\beta_n \bar{x} + \gamma_m \bar{y}) dt \right] \right. \\ \left. + \int e^{\kappa\lambda_{mn}^2 t} \cos(\beta_n \bar{x} - \gamma_m \bar{y}) dt \right] \end{aligned} \quad (16)$$

bulunur. (16) denklemi,

$$\begin{aligned} u_{mn} = e^{-\kappa\lambda_{mn}^2 t} \\ \times \left[c - \bar{q}_0 \int e^{\kappa\lambda_{mn}^2 t} \right. \\ \left. \times \frac{1}{2} [\cos(\beta_n \bar{x} + \gamma_m \bar{y}) - \cos(\beta_n \bar{x} - \gamma_m \bar{y})] dt \right] \end{aligned} \quad (17)$$

olarak da yazılabilir. Gerekli integral alma işlemleri sonucunda (17) denklemi

$$u_{mn} = e^{-\alpha t} \left[c_{mn} - \frac{\bar{q}_0}{2} (A_1 - A_2) \right] \quad (18)$$

formuna getirilebilir. Burada,

$$\alpha = \kappa\lambda_{mn}^2 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \mu_{mn}^2} \\ \times [\alpha \cos(\eta_{mn} + \mu_{mn} t) + \mu_{mn} \sin(\eta_{mn} + \mu_{mn} t)] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} A_2 = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \bar{\mu}_{mn}^2} \\ \times [\alpha \cos(\bar{\eta}_{mn} + \bar{\mu}_{mn} t) + \bar{\mu}_{mn} \sin(\bar{\eta}_{mn} + \bar{\mu}_{mn} t)] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\eta_{mn} = \beta_n x_0 + \gamma_m y_0 \quad \mu_{mn} = \beta_n v_x + \gamma_m v_y \quad (22)$$

$$\bar{\eta}_{mn} = \beta_n x_0 - \gamma_m y_0 \quad \bar{\mu}_{mn} = \beta_n v_x - \gamma_m v_y \quad (23)$$

dır. Böylece (6) denkleminde u_{mn} yerine konularak sıcaklık dağılımı

$$T(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha t} \left[c_{mn} - \frac{\bar{q}_0}{2} (A_1 - A_2) \right] \sin(\beta_n x) \sin(\gamma_m y) \quad (24)$$

şeklinde elde edilir. C_{mn} integral sabitinin bulunması için $T(x, y, 0) = 0$ (4c) başlangıç şartı kullanılarak (6) denkleminde $u_{mn}(0) = 0$ yazılabilir. Bu şart (18) denkleminde kullanılarak

$$c_{mn} = \frac{\bar{q}_0}{2} [A_1(0) - A_2(0)] \quad (25)$$

bulunur. (25) denklemi, (24) denkleminde yerine yazılırsa

$$T(x, y, t) = \frac{\bar{q}_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha t} \times [[A_1(0) - A_1] - [A_2(0) - A_2]] \times \sin(\beta_n x) \sin(\gamma_m y) \quad (26)$$

denklemi elde edilir. Burada

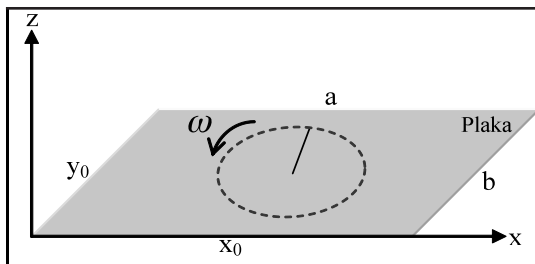
$$A_1(0) = \frac{1}{\alpha^2 + \mu_{mn}^2} [\alpha \cos(\eta_{mn}) + \mu_{mn} \sin(\eta_{mn})] \quad (26)$$

$$A_2(0) = \frac{1}{\alpha^2 + \bar{\mu}_{mn}^2} [\alpha \cos(\bar{\eta}_{mn}) + \bar{\mu}_{mn} \sin(\bar{\eta}_{mn})] \quad (27)$$

olmaktadır.

Böylece ısı denklemi belirlenen başlangıç ve sınır şartları altında tamamen çözülmüş olmaktadır.

3. DAİRESEL HAREKETLİ ISI KAYNAĞI İÇİN SICAKLIK DAĞILIMI ANALİZİ



Şekil 2. Dairesel hareketli ısı kaynağının ısıttığı plaka.

Dairesel hareketli ısı kaynağının ısıttığı plaka üzerindeki sıcaklık dağılımını bulmak için lineer hareketli ısı kaynağı durumunda olduğu gibi (1) denklemi (4) ile verilen sınır şartları altında aynı yöntem ve formülasyon ile çözülecektir. Çözüm aşamalarındaki ilk fark ısı kaynağı fonksiyonu

olan $g(x, y, t)$ fonksiyonunun tanımı olan (2) denklemindeki \bar{x} ve \bar{y} terimlerinin tanımı olacaktır. Dairesel hareket için bu terimler,

$$\bar{x} = x_0 + r \cos(\omega t) \quad \bar{y} = y_0 + r \sin(\omega t) \quad (28)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada, r , kaynağın dairesel yörüngesinin yarıçapı, x_0 ve y_0 ; dairesel yörüngenin merkez koordinatları ve ω ise kaynağın açısal hızı olarak tanımlanmaktadır.

3. 1. Çözüm Yöntemi

Dairesel hareketli ısı kaynağı durumunda (26) denkleminin formu değişmemekte, ancak A_1 ve A_2 'nin değerleri,

$$A_1 = \int e^{\alpha t} \cos(\bar{\eta}_{mn} + \bar{\mu}_{mn} t) dt \quad (29)$$

$$A_2 = \int e^{\alpha t} \cos(\bar{\bar{\eta}}_{mn} + \bar{\bar{\mu}}_{mn} t) dt$$

olmaktadır. Burada,

$$\bar{\eta}_{mn} = \beta_n x_0 + \gamma_m y_0 \quad (30)$$

$$\bar{\bar{\eta}}_{mn} = \beta_n x_0 - \gamma_m y_0$$

$$\bar{\mu}_{mn} = r \beta_n \cos(\omega t) + r \gamma_m \sin(\omega t) \quad (31)$$

$$\bar{\bar{\mu}}_{mn} = r \beta_n \cos(\omega t) - r \gamma_m \sin(\omega t)$$

olarak tanımlanmaktadır. Bu integral değerlerinin analitik olarak hesaplanamaması yüzünden sayısal değerlendirme aşamasında sayısal olarak hesaplanacaklardır. Ayrıca $A_1(0)$ ve $A_2(0)$ değerlerinin integrallerinin de bulunabilmesi için ωt değerinin küçük olduğu durumlar göz önünde bulundurularak, trigonometrik elemanlar üzerinde, kolaylıkla integral alınmasını sağlayabilecek bazı sadeleştirmeler yapılabilir. Böylece,

$$\bar{\bar{\mu}}_{mn} = r \beta_n + r \gamma_m \omega t, \quad \bar{\bar{\bar{\mu}}}_{mn} = r \beta_n - r \gamma_m \omega t \quad (32)$$

olarak tanımlanabilir. Buna göre,

$$A_1 = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \psi^2} [\alpha \cos(\zeta + \psi t) + \psi \sin(\zeta + \psi t)] \quad (33)$$

$$A_2 = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \psi^2} [\alpha \cos(\zeta - \psi t) - \psi \sin(\zeta - \psi t)] \quad (34)$$

$$A_1(0) = \frac{1}{\alpha^2 + \psi^2} [\alpha \cos(\zeta) + \psi \sin(\zeta)] \quad (35)$$

$$A_2(0) = \frac{1}{\alpha^2 + \psi^2} [\alpha \cos(\zeta) - \psi \sin(\zeta)] \quad (36)$$

olarak bulunur. Burada,

$$\psi = r\omega\gamma_m \quad \zeta = \bar{\eta}_{mn} + r\beta_n \quad (37)$$

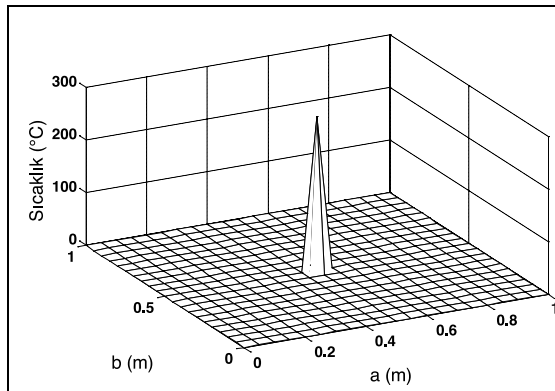
olarak tanımlanmaktadır.

Bu şekilde dairesel hareket yapan ısı kaynağının ısıttığı plakadaki sıcaklık dağılımı, verilen sınır şartları altında elde edilmiş olmaktadır.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

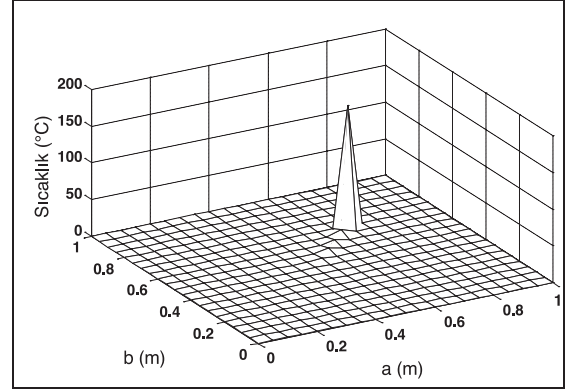
Tek doğrultuda doğrusal işleme halinde (26) denklemi kullanarak sıcaklık dağılımı bulunabilir. İlaveten, sabit (durağan) kaynağın oluşturduğu sıcaklık dağılımı da $v_x = v_y = 0$ konularak elde edilebilir. Sayısal bir örnek olması bakımından $\lambda = 73 \text{ W/m}^\circ\text{C}$, $\kappa = 2.026 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sn}$, ısı kaynağı özellikleri $q_0 = 10^5 \text{ W/m}^2$, plaka boyutları $a = 1 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $x_0 = 0.5 \text{ m}$, $y_0 = 0.5 \text{ m}$, $v_x = v_y = 0.001 \text{ m/sn}$ için sabit ısı kaynağının oluşturduğu sıcaklık dağılımı bulalım. (26) denkleminin sonucu Şekil 3'de görselleştirilmiştir. Sıcaklık dağılımı sn anındaki dağılımdır. Dikkat edilmesi gereken husus (26) serisinin gerçek sıcaklık değerini vermesi için çok sayıda terimin dikkate alınması gereğidir. Sayısal değerlendirme aşamasında yapılan hesaplamalar doğrultusunda, sıcaklık dağılımını verecek (26) denklemindeki A_1 , A_2 ve dolayısıyla $A_1(0)$, $A_2(0)$ farklarının azalmasına neden olan parametre olan ısı kaynağı hızı ile Fourier Serisi'nin yakınsaması için toplanması gereken terim sayısının arasında ters bir orantı olduğu gözlemlenmiştir ve bu durum göz önünde bulundurulmalıdır. Yani ısı kaynağı hızının düşürülmesi durumunda serinin yakınsaması için daha fazla teriminin toplanması gerekmektedir.

Sabit hal için kaynak hızlarının sıfır olması durumundaki terim sayısını azaltmak ve aynı sonucu elde etmek amacıyla $v_x = v_y = 0.001 \text{ m/sn}$ olarak alınmıştır. Bu durumda 10000 terimin toplamı alınmıştır. Bu ise hesaplama zamanının uzun olacağı anlamını taşımaktadır. Elde edilen grafik Şekil 3'teki gibidir.



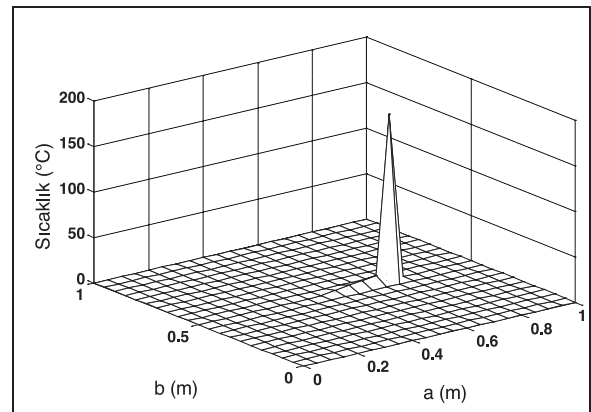
Şekil 3. $x_0=0.5\text{m}$, $y_0=0.5\text{m}$, $v_x=0.001 \text{ m/sn}$, $v_y=0.001 \text{ m/sn}$ için $t=2 \text{ sn}$ anında meydana gelen sıcaklık dağılımı.

(26) denklemi, yukarıdaki örnekteki ısı kaynağı özellikleri, malzeme özellikleri ve plaka boyutları için bu sefer sıfırdan farklı hıza sahip doğrusal hareket eden ısı kaynağı için de çözülebilir, $x_0 = y_0 = 0.5 \text{ m}$ başlangıç konumu ve $v_x = 0.05 \text{ m/sn}$, $v_y = 0.05 \text{ m/sn}$ hızlarında 4 saniye sonra plaka üzerinde meydana gelecek sıcaklık dağılımı Şekil 4'te elde edilmiştir. Bu halde (26) denkleminin 10000 tane teriminin toplanması ile gerçek sıcaklık değerleri elde edilmiştir.



Şekil 4. $x_0=0.5\text{m}$, $y_0=0.5\text{m}$, $v_x=0.05 \text{ m/s}$, $v_y=0.05 \text{ m/s}$ için $t=4 \text{ s}$ anında meydana gelen sıcaklık dağılımı.

Doğrusal hareketli ısı kaynağına maruz halde ve kaynak hareketinin eksenlerden birine paralel olduğu, $x_0 = 0.5 \text{ m}$, $y_0 = 0.5 \text{ m}$ ve $v_x = 0.05 \text{ m/sn}$, $v_y = 0 \text{ m/sn}$ durumunda, $t=4$ saniye sonra plaka üzerinde meydana gelecek sıcaklık dağılımının Şekil.5'teki gibi olacağı hesaplanmıştır. Bu hesaplamaların gerçek sonuçları verebilmesi için de (26) denkleminin yaklaşık olarak 10000 teriminin toplanması gerekmiştir.

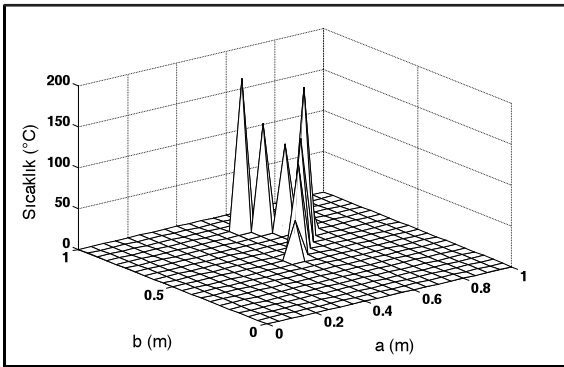


Şekil 5. $x_0=0.5\text{m}$, $y_0=0.5\text{m}$, $v_x=0.05 \text{ m/s}$, $v_y=0 \text{ m/s}$ için $t=4 \text{ s}$ anında meydana gelen sıcaklık dağılımı.

Pratik uygulamaların çoğunda hareketli ısı kaynağı sadece tek doğrultuda değil, ardışık olarak farklı doğrultularda ve hızlarda hareket ederek (işlemler) plakaya ısı vermekte ya da kesim yapılmaktadır. Bu yüzden sadece bir hareket değil bu ardışık hareketlerin sonucunda plaka üzerindeki sıcaklık dağılımının bilinmesi daha anlamlıdır. Buna göre, ısı kaynağının yapacağı her hareketin (işlemin) plaka üzerinde meydana getirdiği sıcaklık değişiminin toplamı, işlemler sonucu plaka üzerindeki son sıcaklık dağılımını verecektir.

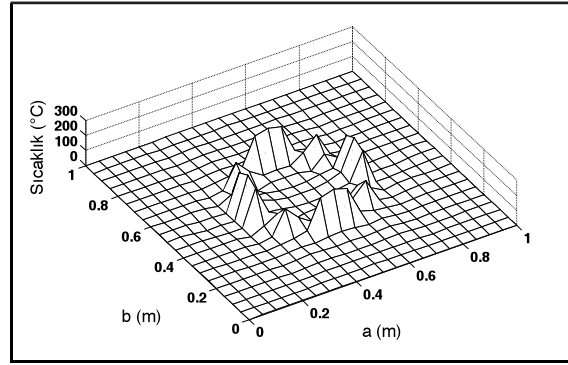
Burada önemli husus birden fazla işlem durumunda, her işlem için plaka üzerindeki sıcaklık dağılımının hesaplanması ve ardından toplanması sonucu hesaplama süresinin oldukça uzun olacaktır. Her işlem için yeni bir hesaplama yapılmasının ve dolayısıyla uzun süren hesaplama süresinin önüne geçilmesi amacıyla özel bir algoritma oluşturulmuştur. Bu algoritma ile ilk önce plaka yüzeyi eşit aralıklara bölünerek hesaplanacak (x,y) koordinatları oluşturulur. Algoritmaya girilen işlem parametreleri (başlangıç konumu, hızlar, işlem süresi) göz önünde bulundurularak her işlemin başlangıç ve bitiş koordinatları hesaplanır. Ardından plaka üzerinde belirlenen her x,y koordinatı için bir kez hesaplama yapılır. Bu hesaplama sırasında sıcaklığı hesaplanan x,y koordinatının hangi işlem adımlarının koordinatları arasında bulunduğu hesaplanır. Daha sonra o işlem adımının hızları başlangıç konumu ve süresi kullanılarak (26) denklemi belirlenen terim sayısı için hesaplanır. Tüm koordinatlar için sıcaklık değerleri elde edildikten sonra diyagramatize edilir.

Isı kaynağının hızları $v_x = 0.05$ m/sn, $v_y = 0.05$ m/sn ile 4 saniye ve ardından $v_x = -0.05$ m/sn, $v_y = -0.05$ m/sn hızları ile 4 saniye hareket etmesi sonucu ardışık iki işleme (ısı kaynağı hareketine) maruz plaka üzerindeki sıcaklık dağılımı Şekil 6'daki gibi hesaplanmıştır.



Şekil 6. $x_0=0.5m$, $y_0=0.5m$, ilk işlem : $v_x=0.05$ m/s, $v_y=0.05$ m/s, $t_1=4$ s, ikinci işlem: $v_x=-0.05$ m/s, $v_y=-0.05$ m/s, $t_2=4$ s parametreleri sonucu meydana gelen sıcaklık dağılımı.

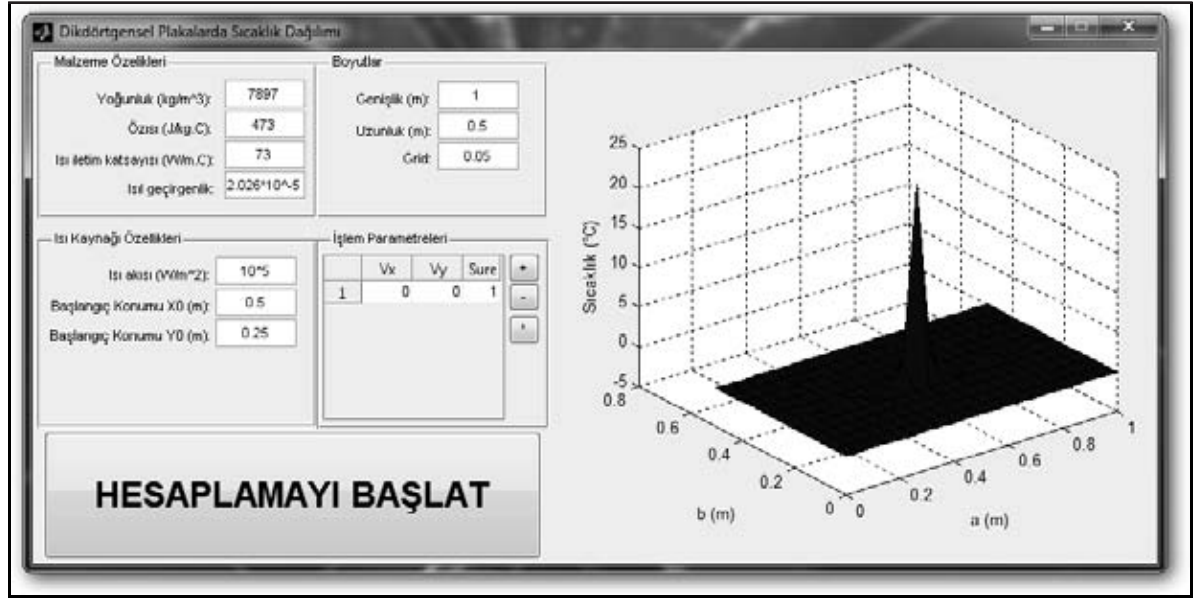
Dairesel hareketli ısı kaynağına maruz plaka üzerinde meydana gelen sıcaklık dağılımının bulunması için 3.1 bölümünde bahsedilen hususlar göz önüne alınmış ve oluşturulan algoritma ile belirlenen x,y koordinatları üzerinde (26) denklemi çözülmüştür. Aynı ısı kaynağı ve plaka özellikleri ile $\omega = \pi / 4$ rad/sn, $r = 0.2$ m, $x_0 = y_0 = 0.5$ m ve $t = 8$ sn işlem parametreleri için yapılan hesaplama sonucu Şekil 7'deki gibidir.



Şekil 7. $x_0=0.5m$, $y_0=0.2m$, $r=0.2$ m, $\omega=\pi/5$ rad/s için $t=10$ s anında meydana gelen sıcaklık dağılımı.

Sayısal değerlendirme sırasında görülmüştür ki; malzeme özellikleri, plaka boyutları ve ısı kaynağı için işlem parametreleri gibi değişkenlerin algoritmaya girdisi zaman almaktadır ve karmaşıktır. Günümüzde lazerli kesme, kaynak gibi yöntemlerde de yaygın bilgisayar kontrollü kullanım göz önüne alınarak bu algoritma her bilgisayarda çalışabilecek bir yazılım ara yüzü programlanmasına karar verilmiştir. Bu sayede hesaplama için gerekli değişkenler bu ara yüz üzerinden kolaylıkla girilip, hesaplama sonuçları da aynı ara yüzde elde edilerek, yapılacak malzeme işleme prosesinin yapı üzerindeki etkileri önceden bilinip gerekli değişiklikler işlem öncesi yapılabilir. Böylece maliyet ve zaman kazancı sağlanabilir. Bunu sağlayacak arayüz yazılımı MATLAB kullanılarak geliştirilmiştir.

Şekil 8'de Şekil 1'deki proble benzer bir problemin çözümü görülmektedir. Görüldüğü üzere malzeme özellikleri olan yoğunluk, özısı, ısı iletim katsayısı ve ısı geçirgenlik değerleri; ısı kaynağı özellikleri olan ısı akısı, başlangıç koordinatları; plaka boyutları ve ardışık işleme için işlem parametreleri olan ısı kaynağı hızları ile süreleri yazılıma kolaylıkla girilebilir. Yazılım ile ilgili ayrıntılı bilgiler yüksek lisans tezinde bulunmaktadır (Çavuş, 2010).



Şekil 8. Geliştirilen arayüz yazılımı.

KAYNAKLAR

Alilat, N., Bairi, A. and Laraqi, N. 2004. Three-dimensional calculation of temperature in a rotating disk subjected to an eccentric circular heat source and surface cooling, Numerical Heat Transfer, Part A 46: 167–80.

Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. 1959. Conduction of Heat in Solid, Oxford University Press, Oxford.

Chapman Alan, J. 1984. Heat Transfer, Macmillan Publishing Company, London, ISBN: 0-02-321470-8, pp. 1-18, 1984.

Cheng, P.J. and Lin, S.C. 2000. An analytical model for the temperature field in the laser forming of sheet metal, International Journal of Heat and Mass Transfer. (101), 260-267.

Çavuş, M. 2010. Y.L Tezi, Uludağ Üniversitesi.

Hou, Z.B. and Komanduri, R. 2000. General solutions for stationary/moving plane heat source problems in manufacturing and tribology, International Journal of Heat And Mass Transfer. (43) 1679-1698.

Kevin Cole, James Beck, A. Haji-Sheikh, Bahman Litkouhi. 1992. Heat Conduction Using Green's Function.

Kidawa-Kukla, J. 2008. Temperature distribution in a rectangular plate heated by a moving heat source, International Journal of Heat and Mass Transfer. (51), 865-872.

Li, J. and Li, J.C.M. 2005. Temperature distribution in workpiece during scratching and grinding, Materials Science and Engineering, A 409: 108–119.

Moulik, P.N, Yang, H.T.Y. and Chandrasekar, S. 2001. Simulation of thermal stresses due to grinding, International Journal of Mechanical Sciences. (43), 831-851.

Pala, Y. 2006. "Modern Uygulamalı Diferansiyel Denklemler", Nobel Yayıncılık.