



EKSENEL ÇEKMEYE MARUZ DELİKLİ SONSUZ PLAĞA SİLİNDİRİK PARÇANIN ÇAKILMASI PROBLEMİ

Yaşar Pala, Emin Güllü

Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Görükle-16059/Bursa

Geliş Tarihi : 25.03.2002

ÖZET

Bu çalışmada delikli sonsuz plaklarda girinti problemi ele alınmaktadır. İlk olarak, sınırı yüklemesiz sonsuz plakta r_1 yarıçaplı delik içerisine d yarıçaplı silindirin çakılması incelenmektedir. Silindirin burulma momenti taşıdığı halde buna ilave edilmektedir. İkinci olarak girinti problemi eksenel yükleme altındaki sonsuz dikdörtgenel plak için çözülmektedir. Bu haldeki ara yüzey basıncını bulmak maksadıyla iki ayrı yaklaşım önerilmektedir. Birinci metot da basıncın θ açısından bağımsız olduğu kabul edilirken ikinci metot da basıncın θ ya bağlı olacağı hali de göz önüne alınmaktadır. Sonuçlar girinti problemi halinde gerilmenin sıklık oranına bağlı olarak önemli ölçüde değiştiğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler : Delikli plak, Girinti problemi, Sıklık, Eksenel gerilme

INCLUSION OF A CYLINDER INTO AN AXIALLY LOADED INFINITE PLATE WITH A HOLE

ABSTRACT

In this paper, inclusion problem in infinite plates is considered. Firstly, inclusion of a cylinder of radius d into a plate including a hole of radius r_1 is studied. The case where the cylinder carries twisting moment is also added to the analysis. Secondly, inclusion problem is solved for an axially loaded rectangular infinite plate having a hole of radius r_1 . In order to find the interface pressure in this case, two methods are proposed. In the first method, the interface pressure is assumed not to depend on the angle θ while it is assumed in the second method that the pressure also depend upon the angle θ . The results reveal that stresses can excessively change in the case of inclusion problem, depending upon the value of interface δ/r_1 .

Key Words : Plate with a hole, Inclusion problem, Interference, Axial stress

1. GİRİŞ

Önemli bir pratik hal olarak σ eksenel gerilmesine maruz delikli sonsuz plaktaki gerilme dağılımı şık bir metot sayesinde analitik olarak çözülebilmektedir (Venkatraman and Patel, 1970) Delik kenarındaki gerilmelerin delik çapına bağlı olmaması dikkate değer bir durumdur. Oysa sonlu boyutlu delikli plak halinde çözüm, delik çapına zayıf bir şekilde de olsa

bağlı olmalıdır. Bu maksatla, (Schlack and Little 1964; Thompson, 1965) sonlu boyuta haiz delikli plak halinde en küçük kareler metodu yardımıyla sayısal çözümler elde ederek bu haldeki gerilmelerin sonsuz plak halinden önemli ölçüde farklı olduğunu göstermektedir. Sınırında kayma gerilmesi taşıyan delikli sonsuz plak halinde benzer sonuç kompleks fonksiyonlar teorisi yardımıyla özel bir hal olarak elde edilmiş, fakat Pala ve Güllü, (2000), deki çözüm yöntemini kullanan pratik bir metot literatürde yer almamıştır. Delikte ön gerilmesiz rijit

eleman bulunan ve σ eksenel gerilmesi ya da τ kayma gerilmesine maruz sonsuz plaklardaki gerilme analizi yine kompleks fonksiyonlar teorisi kullanılarak (Lekhnitskii, 1968) tarafından detaylarıyla incelenmiştir.

Ön gerilmeli çakma problemine çok sayıdaki pratik uygulamada rastlanmasına rağmen literatürde silindir içine silindirik eleman çakma problemi haricinde pek çalışmaya rastlanmamıştır. Bu maksatla bu makalede yukarıda belirtilen çalışmaların bir devamı ve önemli bir pratik hal olarak eksenel gerilmeye maruz delikli plaklarda girinti problemi ele alınacaktır. Birinci kısımda, sonsuz ve sınırında gerilme olmayan delikli plakta aynı malzemeden yapılmış $D = 2d$ çapındaki bir silindirin $2r_i$ çaplı deliğe çakılması neticesinde silindir ve plak içerisinde oluşan gerilme dağılımı bulunmaya çalışılmaktadır. İkinci olarak, σ eksenel gerilmesine maruz dikdörtgensel delikli plağa aynı malzemeden yapılmış $D = 2d$ çaplı silindirin çakılması problemi ele alınmaktadır. Bu halde iki teorik yöntem geliştirilmektedir.

Çözülmesi gerekli denklemler lineer olduğundan süperpozisyon prensibi kullanılmak suretiyle çeşitli kombine yükleme halleri için de gerilmeler elde edilmektedir.

2. ANALİZ

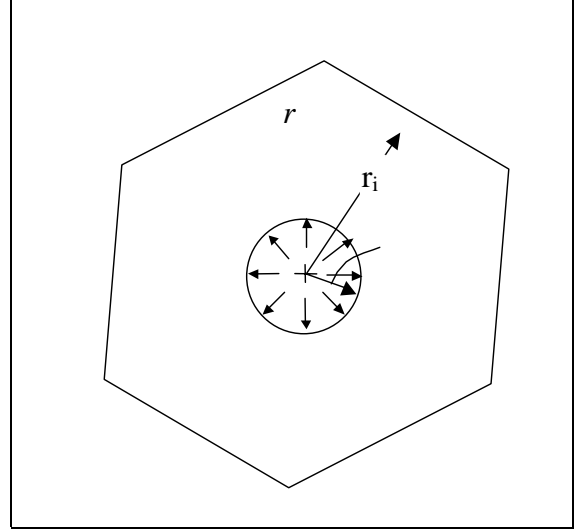
Bir sonraki adımda gerekli olduğu için önce p basıncına maruz sonsuz plaktaki gerilme dağılımını bulalım. Literatürde bu hal için gerilme dağılımına dair çalışmalar bulunmakla beraber burada yeni bir kısa çıkarış yöntemini vermek istiyoruz. Ayrıca, yeni bir metot ile silindire burulma uygulanması halinde gerilme dağılımı da bulunacaktır.

2. 1. Delik Sınırı Boyunca p Basıncına Maruz Sonsuz Plakta Gerilme Dağılımı

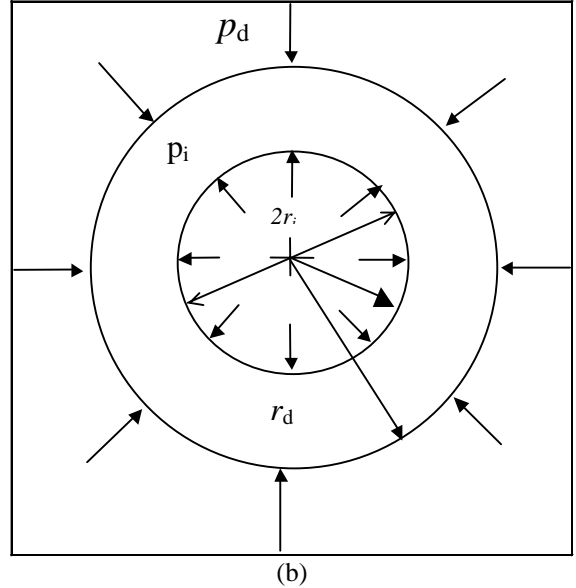
Delik sınırında p basıncına maruz sonsuz plaktaki (Şekil 1) gerilme dağılımını bulmak için farklı bir yol olarak doğrudan doğruya iç ve dış basınca maruz kalın cidarlı silindir içerisindeki gerilme bağıntılarını kullanabiliriz (Venkatraman and Patel, 1970), (Şekil 2).

$$\sigma_r = \frac{1}{\left(\frac{r_d}{r_i}\right)^2 - 1} \left\{ \left[1 - \frac{(r_d/r_i)^2}{(r/r_i)^2} \right] p - \left[1 - \frac{1}{(r/r_i)^2} \right] \left(\frac{r_d}{r_i}\right)^2 p_d \right\} \quad (1a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\left(\frac{r_d}{r_i}\right)^2 - 1} \left\{ \left[1 + \frac{(r_d/r_i)^2}{(r/r_i)^2} \right] p - \left[1 + \frac{1}{(r/r_i)^2} \right] \left(\frac{r_d}{r_i}\right)^2 p_d \right\} \quad (1b)$$



Şekil 1. Delik sınırı sabit p basıncına maruz sonsuz plak



Şekil 2. İç ve dış basınca maruz kalın cidarlı silindir

Şimdi, (1) denklemlerinde dış yarıçapı sonsuza ($r_d \rightarrow \infty$) ve dış basıncı da sıfıra götürerek ($p_d \rightarrow 0$) plaktaki gerilme dağılımını ve radyal yöndeki deplasmanı elde ederiz:

$$\sigma_r = -p(r_i/r)^2 \quad (2a)$$

$$\sigma_\theta = p(r_i/r)^2 \quad (2b)$$

$$u = \frac{p(1+\nu)}{E} r_i^2 = \frac{pr(1+\nu)}{E} \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \quad (2c)$$

Bu sonuçların başka bir yolla çıkarımı da literatürde mevcuttur (Hsu and Forman, 1975). Delik yarıçapındaki değişim için (2c) denkleminde

$$u = \frac{p(1+\nu)r_1}{E} \quad (3)$$

elde ederiz.

Diğer taraftan, yine (1) denklemini kullanarak $p = p_d$ dış basıncına maruz silindirdeki gerilme dağılımı için

$$\sigma_\theta = -p, \quad \sigma_r = -p \quad (4)$$

elde ederiz. Radyal şekil değiştirme oranının

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) = \frac{-p}{E}(1-\nu) \quad (5)$$

şeklinde olduğuna dikkat edilerek yarıçaptaki toplam kısalma için

$$\Delta d = \varepsilon_r d = \frac{-pd}{E}(1-\nu) \quad (6)$$

bulunur.

Şimdi, $2d$ çapındaki silindirin $2r_1$ ($d > r_1$) çapındaki deliğe zorla çakıldığını ve sıkılık (interference) miktarı δ 'nın peşinen verildiğini kabul edelim. δ sıkılığı ile yarıçaplar arasında

$$\delta = \Delta(d) - \Delta(r_1) \quad (7)$$

yazılabileceğine dikkat edip (2c) ve (6) ifadelerinden yararlanarak oluşan p ara basıncı için

$$p = \frac{E\delta}{[(1+\nu)r_1 + (1-\nu)d]} \quad (8)$$

elde ederiz.

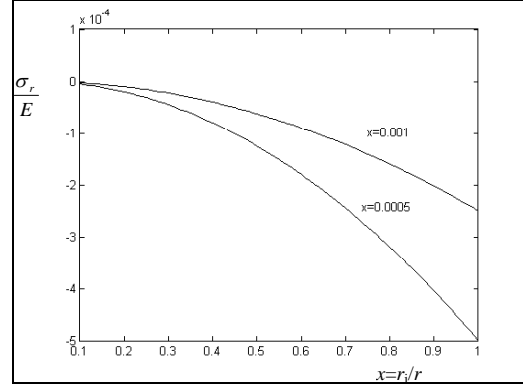
(8) sonucu (2a), (2b) de yerine konarak plak içindeki gerilmeler elde edilir:

$$\sigma_r = -\frac{E\delta}{[(1+\nu)r_1 + (1-\nu)d]}(r_1/r)^2, \quad (9)$$

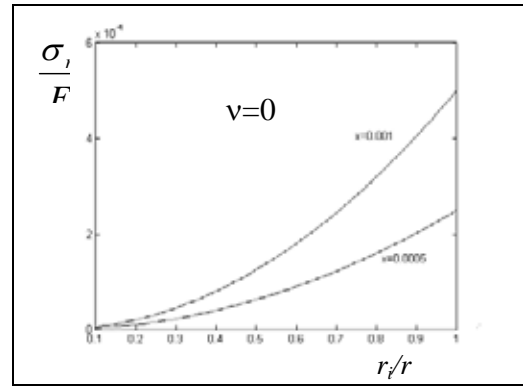
$$\sigma_\theta = \frac{E\delta}{[(1+\nu)r_1 + (1-\nu)d]}(r_1/r)^2$$

Yukarıdaki analizde bulunan p basıncının yalnız elastik yer değiştirmeler oluşturacak şiddette olduğu kabul edilmektedir. Şekil 3'deki grafikte σ_r/E 'nin r_1/r ile değişimi görülmektedir. $X = \delta/r_1$ sıkılık oranı ile radyal gerilmenin önemli ölçülerde değiştiği görülmektedir.

Şekil 4'de çapraz gerilmenin x ile değişimi görülmektedir. Bu halde de σ_θ gerilmesi her iki oranın değişimi ile önemli ölçüde değişmektedir. Her iki gerilmenin şiddetlerinin eşit olduğuna dikkat edelim.



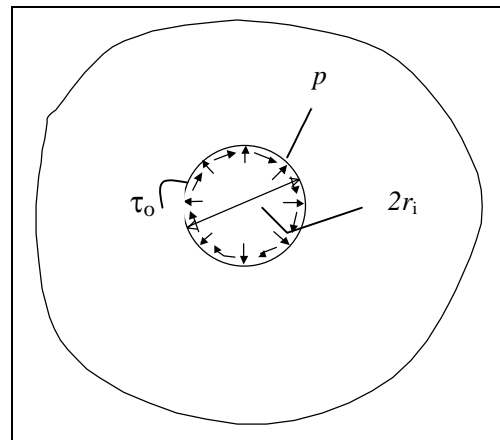
Şekil 3. σ_r / E nin r_1/r ile değişimi. $x = \delta/r_1$



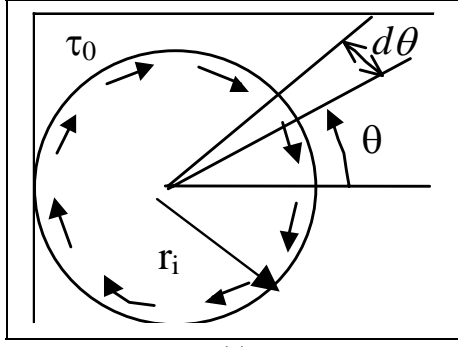
Şekil 4. σ_θ çapraz gerilmesinin $x = \delta/r_1$ ile değişimi

2. 2. Delikli Sonsuz Plağa M_0 Burulma Momentine Maruz $2d$ Çaplı Bir Silindirin Çakılması Problemi

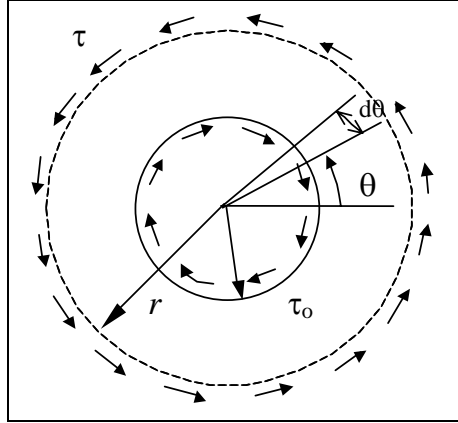
Delikli sonsuz plağa M_0 burulma momentini maruz $D = 2d$ çaplı bir silindirin çakılması problemini ele almak istiyoruz (Şekil 5). Bu hale de pratikte oldukça sık rastlanabilir. Sıkı geçirilen silindirin burulmaya maruz bırakılması delik çevresinde τ_0 şiddetinde kayma kuvvetinin oluşmasına sebep olur (Şekil 6a).



Şekil 5. Delik sınırı iç basınca ve kayma gerilmelerine maruz sonsuz plak



(a)



(b)

Şekil 6. Burulma momentinin delik çevresinde ve r yarıçaplı bir çeper üzerinde sebep olduğu kayma gerilmeleri

Delik çevresine etkileyen kayma gerilmelerinin O noktası etrafında oluşturduğu momentler toplamı M_0 momentine eşit olmalıdır. Bilahare, Şekil 6b'yi dikkate alarak

$$\int_0^{2\pi} \tau_0 r_i^2 d\theta = M_0 \quad \text{ya da} \quad \tau_0 = \frac{M_0}{2\pi r_i^2} \quad (10)$$

elde ederiz. Burada silindir ile delik arasında izafi kayma olmadığı kabul edilmektedir. Milin çevresindeki τ_0 kayma gerilmesinin oluşturduğu sonsuz delikte gerilme dağılımını bulmak için de Şekil 6b'deki gibi delik etrafında kesiti çizgilerle gösterilen r yarıçaplı bir çember düşünelim. Denge şartı gereği r yarıçaplı dairesel plak çevresine etkileyen kayma gerilmelerinin toplamı da M_0 'a eşit olmalıdır:

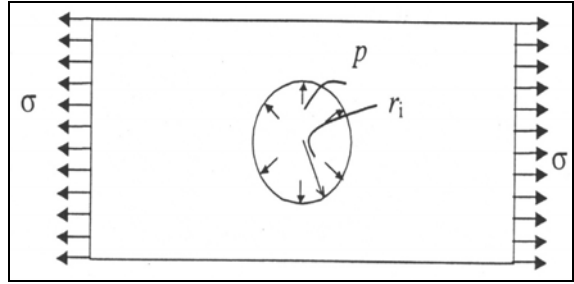
$$\tau r d\theta = \tau_0 r_i d\theta \quad \text{ya da} \quad \tau = \tau_0 \frac{r_i}{r} = \frac{M_0}{2\pi r r_i} \quad (11)$$

Denklemler lineer olduğu için deliğin p basıncına maruz kaldığı zamanki plak gerilmeleri süperpoze edilerek hem kayma ve hem de basınca maruz kaldığı zamanki plak gerilmeleri elde edilir:

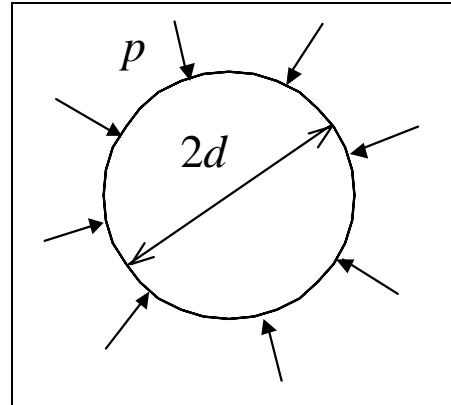
$$\sigma_r = \frac{-E\delta}{[(1+\nu)r_i + (1-\nu)d]} (r_i/r)^2, \quad \sigma_\theta = \frac{E\delta}{[(1+\nu)r_i + (1-\nu)d]} (r_i/r)^2, \quad \tau = \frac{M_0}{2\pi r r_i} \quad (12)$$

2. 3. Silindirik Bir Çubuğun Eksenel Çekmeye Maruz Delikli Dikdörtgenel Sonsuz Plağa Çakılması

Ortasında r_i yarıçaplı bir delik bulunan σ eksenel gerilmesine maruz dikdörtgenel sonsuz plağa $2d$ çapındaki aynı malzemeden yapılmış bir plağın sıkı geçirilmesi problemini çözmek istiyoruz (Şekil 7a).



Şekil 7a. Eksenel çekmeye maruz delikli sonsuz plakta silindirik parçanın oluşturduğu basınç



(b)

Şekil 7b. Plağa çakılan silindirik parçanın yüzeyine etkileyen basınç

Sıkı geçirme işlemi dikdörtgenel plakta ve silindirde sırasıyla Şekil 7a, 7b'de gösterilen gerilme hallerini oluşturur. Bu halin klasik çözümden tek farkı delik üzerinde bilinmeyen p basıncının var olmasıdır. Bu ise sadece klasik çözümde yer alan katsayıların değiştirilmesini gerektirir.

σ eksenel çekme gerilmesine maruz delikli plaktaki gerilme dağılımının

$$\sigma_r = c^1(1 + 2 \ln r) + 2c^2 + \frac{c^3}{2} - (2c^6 + \frac{4c^7}{2} + \frac{6c^8}{4}) \cos 2\theta \quad (13a)$$

$$\sigma_\theta = c^1(3 + 2 \ln r) + 2c^2 - \frac{c^3}{2} + (2c^6 + 12c^7 r^2 + \frac{6c^8}{4}) \cos 2\theta \quad (13b)$$

$$\tau_{r\theta} = (2c_6 + 6c_5r^2 - \frac{2c_7}{r^2} - \frac{6c_8}{r^4})\sin 2\theta \quad (13c)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir (Venkatraman and Patel, 1970). Burada $c_1, c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8$ sınır şartlarından bulunması gerekli sabitlerdir. Gerilmeler $r \rightarrow \infty$ için sonsuz olamayacağından $c_1=c_5=0$ olmalıdır. c_2, c_3, c_6, c_7, c_8 katsayıları

$$\begin{aligned} \sigma_r(\infty, \theta) &= \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\theta), \\ \sigma_\theta(0, \infty) &= \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\theta) \quad \tau_\theta(\infty, \theta) = -\frac{\sigma}{2}\sin 2\theta \quad (14) \end{aligned}$$

ve

$\sigma_r(r_i, 0) = -p$, $\tau_{r\theta}(r_i, \theta) = 0$ şartlarından bulunacaktır. Bu şartlar kullanılarak sıfır olmayan sabitler için

$$\begin{aligned} c_2 &= \sigma/4, \quad c_6 = -\sigma/4, \quad c_3 = -(p + \sigma/2)r_i^2, \\ c_8 &= -\frac{\sigma}{4}r_i^4, \quad c_7 = \frac{\sigma}{2}r_i^2 \quad (15) \end{aligned}$$

elde edilir. Katsayılar (13) denkleminde yerine konulması sonucunda

$$\sigma_r = \frac{\sigma}{2} \left\{ \left[1 - \left(1 - \frac{2p}{\sigma}\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right] + \left[1 - 4\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 + 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4 \right] \cos 2\theta \right\} \quad (16a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} \left\{ \left[1 + \left(1 + \frac{2p}{\sigma}\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right] - \left[1 + 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4 \right] \cos 2\theta \right\} \quad (16b)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{-\sigma}{2} \left\{ \left[1 + 2\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 + 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4 \right] \sin 2\theta \right\} \quad (16c)$$

bulunur. Bu denklemlerdeki p basıncının hala bilinmediği hatırlatılmalıdır. Bilinmeyen p basıncını bulmak amacıyla radyal doğrultulardaki ε_r şekil değiştirme oranını ve ifadenin integrasyonu ile de yer değiştirmesini bulmaya teşebbüs edelim:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \\ &= \frac{\sigma}{2E} \left\{ \left[1 - \left(1 - \frac{2p}{\sigma}\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right] + \left[1 - 4\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 + 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4 \right] \cos 2\theta \right. \\ &\quad \left. - \left[1 + \left(1 + \frac{2p}{\sigma}\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right] - \left[1 + 3\left(\frac{r_i}{r}\right)^4 \right] \cos 2\theta \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

Bu ifadenin integrasyonu

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sigma r}{2E} \left\{ \left[1 + \left(1 - \frac{2p}{\sigma}\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right] + \left[1 + 4\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^4 \right] \cos 2\theta \right\} \quad (18) \\ &\quad - \nu \left\{ \left[1 - \left(1 + \frac{2p}{\sigma}\right)\left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \right] - \left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^4 \right] \cos 2\theta \right\} \end{aligned}$$

verir. Delik kenarındaki yer değiştirme için $r = r_i$ koyarak

$$u|_{r_i} = \frac{\sigma(1+\nu)r_i}{2E} \left[\left[\frac{2}{1+\nu} + \frac{\nu-2}{1+\nu}\left(\frac{p}{\sigma}\right) \right] + \left[\left(\frac{4}{1+\nu}\right) \right] \cos 2\theta \right] \quad (19)$$

elde ederiz. (19) denklemini kolaylık için

$$u|_{r_i} = m_1(m_2 + m_3 \cos 2\theta) \quad (20)$$

şeklinde yazalım. Burada;

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\sigma(1+\nu)r_i}{2E}, \quad m_2 = \frac{2}{1+\nu} + \frac{\nu-2}{1+\nu}\left(\frac{p}{\sigma}\right), \\ m_3 &= \frac{4}{1+\nu} \quad (21) \end{aligned}$$

dir.

Hesaplarda basitleştirmeye gitmek için ilk yaklaşım olarak yeteri kadar büyük p 'ler için m_1, m_3 çarpımının ihmal edilebileceğini ve dolayısıyla da r_i 'nin θ 'dan bağımsız olduğunu kabul edelim. Bu durumda basınç ve düzgün çekmenin delik kenarında sebep olduğu radyal çekme $u = m_1 m_2$ olur. Aynı p basıncının silindirik çubukta sebep olacağı radyal kısalma miktarı daha önce (6) denkleminde bulunmuştu. Şimdi, yine daha önceki gibi sıklık miktarının δ' olduğunu kabul ederek

$$\delta' = |\Delta(r_i)| + |\Delta d| = |u||\Delta d| = |m_1 m_2| + \left| \frac{pd}{E}(1-\nu) \right| \quad (22)$$

yazabiliriz. Buradan p basıncını çekersek

$$\begin{aligned} p &= \frac{2E\delta' - 2\sigma r_i}{(2-\nu)r_i + 2(1-\nu)d} \\ &= \frac{2E\frac{\delta'}{r_i} - 2\sigma}{(2-\nu) + 2(1-\nu)\left(1 + \frac{\delta'}{r_i}\right)} \quad (23) \end{aligned}$$

elde ederiz. p basıncının pozitif olabilmesi için pay ve payda pozitif ve dolayısıyla da $\delta'/r_i \geq \sigma/E$ olması gerekir. Buda elastik bölgede sıklığın alt değerini vermektedir. Diğer taraftan, elastik şekil değiştirmenin olabilmesi için p basıncının σ_{ak} akma gerilmesi değerinden küçük olması gerekir: $p \leq \sigma_{ak}$. Bu şartı (23) denkleminde kullanıp δ'/r_i oranını çekerek

$$\frac{\delta}{r_i} < \frac{\sigma_{ak}(4-3\nu) + 2\sigma}{2E - 2\sigma_{ak}(1-\nu)} \quad (24)$$

buluruz. Şu halde, δ'/r_i 'nin seçilmesi gerekli aralığının

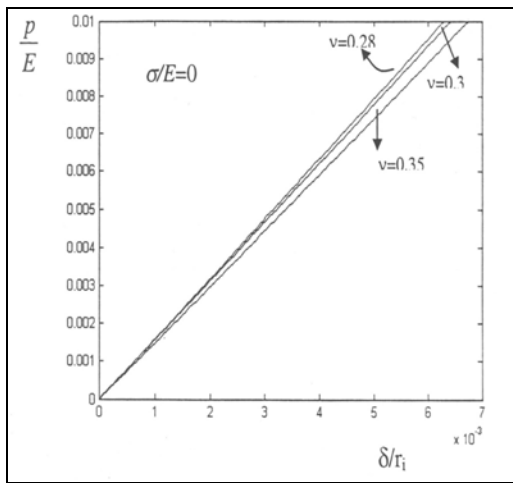
$$\frac{\sigma}{E} < \frac{\delta}{r_i} < \frac{\sigma_{ak}(4-3\nu) + 2\sigma}{2E - 2\sigma_{ak}(1-\nu)} \quad (25)$$

olması gerektiği sonucunu elde ederiz. Bir örnek olarak $\delta/r_i = 0,003$, $\sigma = 100.10^6 [N/m^2]$, $\sigma_{Ak} = 240.10^6 [N/m^2]$, $\nu = 0,3$, $E = 200.10^9 [N/m^2]$, alalım. Bu halde $p=645.10^6 [N/m^2]$, bulunur. Bu ifadeyle (16) denkleminde müracaat ederek deliğin iç kenarında ve $\theta = \pi/2$ konumundaki kritik noktadaki $\sigma_r = -p$, $\sigma_\theta = 3.64\sigma$ bulunur. $\tau_{r\theta}$ değişmemektedir. Yırtılmaya sebep olan σ_θ gerilmesi %20 oranında önemli ölçüde artmaktadır.

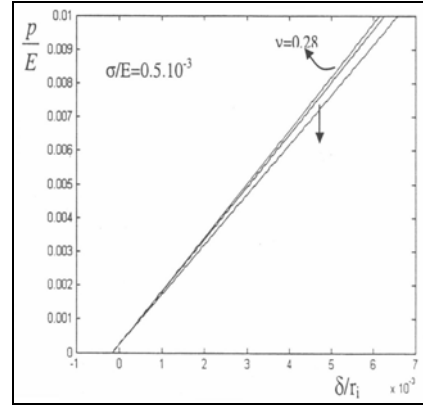
Önemli bir husus olarak (16) denkleminin p'den dolayı malzeme sabitlerini de ihtiva ettiğine dikkat edelim.

(23) denklemi ile verilen basınç ifadesi (16) denklemlerinde yerine konulmalıdır.

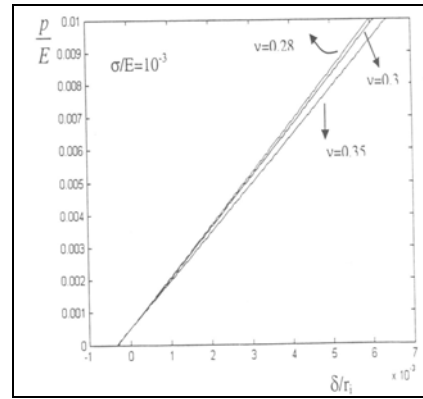
Şekil 8a, (b), (c)'de p/E 'nin δ/r_i ile değişimi çeşitli σ/E değerleri için çizilmiştir. Ara basıncın sıklık ile çok önemli ölçüde değiştiği gözlenmektedir. ν 'nun değişimi basıncı fazla etkilemezken beklendiği üzere σ/E 'nin değişiminden etkilendiği görülmektedir. Şekil (8a) gerilmesiz ($\sigma = 0$) dikdörtgenel plaktaki çakma problemini tasvir etmektedir. Bu haldeki p basıncının sınırı yüklemesiz şekilsiz sonsuz plaktaki basınç ifadesinden farklı olduğuna dikkatleri çekmek isteriz.



(a)



(b)

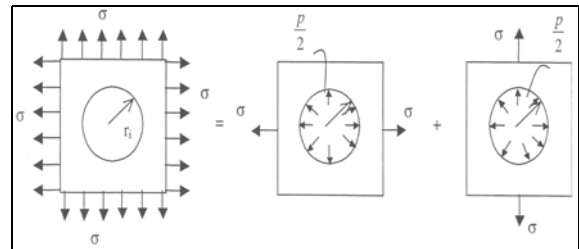


(c)

Şekil 8. p/E nin çeşitli σ/E değerleri için δ/r_i ile değişimi. $\nu = 0.28, 0, 3, 0.35$.

2. 4. İki Eksenli Düzgün Çekmeye Maruz Delikli Dikdörtgenel Plağa Silindirik Çubuğun Çakılması Problemi

(16) denklemlerinde $\sigma \rightarrow \sigma$, $\theta = \theta + \pi/2$ olarak y yönünde çekmeye maruz delikli plaktaki gerilme dağılımını da elde edebiliriz. Denklemler lineer olduğundan bu iki hal süperpoze edilerek delik sınırında p basıncı bulunan iki eksenli çekmeye maruz plakadaki gerilme dağılımını elde edebiliriz (Şekil 9).



Şekil 9. İki eksenli Gerilmeye Maruz Plakta Girinti Problemi.

(16) denklemleri yardımıyla bu haldeki gerilme dağılımının

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma \left[1 - \left(1 - \frac{p}{\sigma} \right) \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right], \\ \sigma_\theta &= 2 \frac{\sigma}{2} \left[1 + \left(1 + \frac{p}{\sigma} \right) \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right], \quad \tau_{r\theta} = 0\end{aligned}\quad (26)$$

şeklinde olduğu gösterilebilir. Bu halde delik kenarında σ_r , σ_θ ; θ açısından bağımsız olduğundan radyal u yer değiştirmesi de sadece r 'nin fonksiyonu olacaktır. Şu halde, kolaylıkla bu halde delik kenarındaki u için

$$u|_{r_i} = \frac{\sigma r_i}{E} \left[(1-\nu) \frac{p}{\sigma} - 2\nu \right] \quad (27)$$

bulunur. Sıkılık miktarı δ'' olmak üzere önceki hesaplara benzer tarzda hesaplamalarla p basıncının

$$p = \frac{E\delta'' + 2\sigma r_i \nu}{(1-\nu)r_i + d(1-\nu)} = \frac{E \frac{\delta'''}{r_i} + 2\sigma \nu}{(1-\nu)(2 + \frac{\delta'''}{r_i})} \quad (28)$$

şeklinde olduğu gösterilir. Yine burada da delik çevresindeki gerilmenin elastik sınırlar içinde bulunmasını temin etmek için $p < \sigma_{Ak}$ ya da

$$\frac{\delta}{r_i} < \frac{2\sigma_{Ak}(1-\nu) - 2\sigma \nu}{E - (1-\nu)\sigma_{Ak}} \quad (29)$$

alınmalıdır. İlâveten, basınçlarda plastik bölgeye varmamak için $\sigma < \sigma_{Ak}$ olmalıdır. Bir örnek olması bakımından $\delta''/r_i = 0.0005$, $E=200.10^9 \text{ N/m}^2$, $\sigma_{ak} = 240.10^6 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.3$, $\sigma = 100.10^6 \text{ N/m}^2$ alalım. Bu halde, (28) denkleminde $p = 174.10^6 \text{ N/m}^2$ çıkar. Bu sonuç ile (26) denklemine müracaat ederek delik kenarında $\sigma_\theta = 2.725\sigma$, $\sigma_r = -0.725\sigma$ elde ederiz. p basıncının olmadığı halde $\sigma_\theta = 2\sigma$ olduğundan bu halde çengel gerilmesinin % 36 oranında arttığını görürüz.

2. 5. Daha Genel Bir Hal

(23) denklemini çıkarırken hesaplardaki basitlik için p basıncının delik boyunca sabit olduğunu, yani θ açısından bağımsız olduğunu kabul etmiştik. Oysa genel halde u , θ 'nın fonksiyonu olduğundan ara yüzeyde oluşan p basıncının da θ açısının fonksiyonu olarak değişmesi gerekir. Bu ise daha genel bir metot için $r = r_i + u$ halinde σ_r gerilmesinin bulunmasını gerektirir.

Yeni haldeki yarıçap halinde

$$\left(\frac{r_i}{r} \right)^2 = \frac{r_i^2}{r^2} = \frac{r_i^2}{(r_i + u)^2} \cong 1 - \frac{2u}{r_i} = s_1 + s_2 \cos 2\theta \quad (30)$$

$$\left(\frac{r_i}{r} \right)^4 = \frac{r_i^4}{(r + u)^4} \cong 1 - 4 \frac{u}{r_i} = s_3 + s_4 \cos 2\theta$$

yazılabileceğine dikkat edelim. Burada;

$$\begin{aligned}s_1 &= 1 - \frac{\sigma}{E} \left(2 \left(1 - \frac{p}{\sigma} \right) + \frac{p\nu}{\sigma} \right), \\ s_2 &= -\frac{4\sigma}{E}, \\ s_3 &= 1 - \frac{4\sigma}{E} \left(\left(1 - \frac{p}{\sigma} \right) + \frac{p\nu}{2\sigma} \right), \\ s_4 &= -\frac{8\sigma}{E} = 2s_2\end{aligned}\quad (31)$$

dır. (30) ifadesini (23) de yerine koyup düzenleyerek

$$\begin{aligned}p_s &= \sigma_r \\ &= \frac{\sigma}{2} \left[\left\{ 1 - s \left[1 - \frac{2u}{r_i} \right] \right\} + \left\{ 1 - 4 \left[1 - \frac{2u}{r_i} \right] + 3 \left[1 - \frac{4u}{r_i} \right] \right\} \cos 2\theta \right] \quad (32)\end{aligned}$$

buluruz. (32) ifadelerinde s , $s = 1 - \frac{2p}{\sigma}$ dir. Bu denklem düzenlenerek

$$p_s = \sigma_r = s_5 + s_6 \cos 2\theta \quad (33)$$

sonucunu elde ederiz. Burada s_5, s_6

$$\begin{aligned}s_5 &= \frac{\sigma}{2} \left[1 - ss_1 - 2s_2 + \frac{3}{2}s_4 \right], \\ s_6 &= \frac{\sigma}{2} \left[1 - ss_2 - 4s_1 - 2s_2 + 3s_3 + \frac{3}{2}s_4 \right] \quad (34)\end{aligned}$$

dir. Şimdi, problemin (33) denklemi ile verilen yeni $p_s = p_s(\theta)$ basıncı için yeniden çözülmesi gerekmektedir. Bu haldeki (32) denklemi ile verilen sınır şartlarının

$$\begin{aligned}\sigma_r(\infty, \theta) &= \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\theta), \\ \sigma_\theta(0, \infty) &= \frac{\sigma}{2} (1 - \cos 2\theta), \\ \tau_{r\theta}(\infty, 0) &= -\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta, \quad [\text{sonsuzda}] \\ p_s = \sigma_r(r_i + u, 0) &= s_5 + s_6 \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta}(r_i, \theta) &= 0 \quad [\text{Delik kenarında}]\end{aligned}\quad (35)$$

şeklinde olacağı aşikardır. Sonsuzdaki sınır şartlarının değişmediğine dikkat ediniz.

(13) denklemlerinin bu haldeki yapısının,

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c_1'(1 + 2\ln 5) + 2c_2' + \frac{c_3'}{r^2} - (2c_6' + \frac{4c_7'}{r^2} + \frac{6c_8'}{r^4})\cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= c_1'(3 + 2\ln r) + 2c_2' - \frac{c_3'}{r^2} + (2c_6' + 12c_3'r^2 + \frac{6c_8'}{r^4})\cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= (2c_6' + 6c_5'r^2 - \frac{2c_7'}{r^2} - \frac{6c_8'}{r^4})\sin 2\theta\end{aligned}\quad (36)$$

şeklinde değişmeden kalacağı kolaylıkla görülmelidir. Daha önceki gibi $c_1' = c_5' = 0$ olmalıdır. (34) sınır şartları altında diğer sabitlerin

$$\begin{aligned}c_2' &= \frac{\sigma}{4}, \quad c_6' = -\frac{\sigma}{4}, \quad c_3' = (\frac{\sigma}{2} - s_5)r_1^2, \\ c_7' &= \frac{\sigma + s_6}{2}r_1^2, \quad c_8' = \frac{1}{6}(s_6 + \frac{3}{2}\sigma)r_1^4\end{aligned}\quad (37)$$

olacağı görülebilir. Buna göre (35) ifadeleri;

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left[\left\{ 1 + (\frac{\sigma}{2} - s_5)(\frac{r_1}{r})^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 1 - 4(1 + \frac{s_6}{\sigma})(\frac{r_1}{r})^2 - (\frac{2s_6}{\sigma} + 1)(\frac{r_1}{r})^4 \right\} \cos 2\theta \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2} \left[\left\{ 1 - (1 - \frac{2s_5}{\sigma})(\frac{r_1}{r})^2 \right\} + \left\{ -1 + (\frac{2s_6}{\sigma} + 1)(\frac{r_1}{r})^4 \right\} \cos 2\theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma}{2} \left[-1 - \left(2 + \frac{2s_6}{\sigma} \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 + \left(\frac{2s_6}{\sigma} + 1 \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right] \sin 2\theta\end{aligned}\quad (38)$$

verir.

Bu haldeki ara yüzey basıncını elde etmek üzere (33) ile verilen basınç dağılımının şimdi silindir üzerine uygulanacağını kabul ederek silindirin çapındaki küçülmeyi θ 'nın fonksiyonu olarak bulalım.

İlk olarak silindirin dış yüzeyinde sadece $s_6 \cos \theta$ basınç dağılımı olduğu hal için gerilme dağılımını elde edelim. Gerilme fonksiyonunun $\varphi = f(r) \cos 2\theta$ şeklinde olduğunu kabul edilerek gerilme dağılımının kolaylıkla

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -(2c_0'' + \frac{4c_1''}{r^2} + \frac{6c_2''}{r^4})\cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= (2c_0'' + 12c_3''r^2 + \frac{6c_2''}{r^4})\cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= (2c_0'' + 6c_3''r^2 - \frac{2c_1''}{r^2} - \frac{6c_2''}{r^4})\sin 2\theta\end{aligned}\quad (39)$$

şeklinde olduğu gösterilebilir. $r=0$ için gerilmeler sonsuz olamayacağından $c_1'' = c_2'' = 0$ olmalıdır. Delik sınırındaki ($r_i = d$) gerilme şartının

$$p_s = \sigma_r = -s_6 \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = 0\quad (40)$$

şeklinde olduğuna dikkat ederek sabitler için

$$c_0'' = \frac{s_6}{2}, \quad c_4'' = -\frac{s_6}{6d^2}\quad (41)$$

elde ederiz. Bu değerleri (39) da yerine koyarak

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -s_6 \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= s_6 \left[\left[1 - 2\left(\frac{r}{d}\right)^2 \right] \cos 2\theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= s_6 \left[\left(1 - \left(\frac{r}{d}\right)^2 \right) \right] \sin 2\theta\end{aligned}\quad (42)$$

buluruz. (42) denklemlerini kullanarak

$$\delta_r = \frac{s_6 d}{E} (1 + \nu) \cos 2\theta\quad (43)$$

elde ederiz. Basıncın sabit s_5 kısmından dolayı olan büzülmenin

$$\delta_r' = \frac{s_5 d}{E} (1 - \nu)\quad (44)$$

olduğunu akılda tutarak çakılan silindirdeki toplam büzülmeyi

$$\delta_r = \frac{s_6 d}{E} (1 + \nu) \cos 2\theta + \frac{s_5 d}{E} (1 - \nu)\quad (45)$$

olarak elde ederiz. Sıklık miktarı δ'' ile δ_r ve (u) arasında

$$\delta'' = \delta_r + u\quad (46)$$

bağıntısının olduğuna dikkat edelim. Bu son ifadeden p basıncı çekilecektir.

Tablo 1'de yırtılmanın meydana geldiği tehlikeli bölgede ($\theta = \pi/2$) çeşitli sıklık oranları, çekme gerilmesi için elde edilen σ_θ teğetsel gerilme bileşeni değerleri elde edilmiştir. Artan sıklık oranlarında çapraz gerilmenin de arttığı aşikardır.

İkinci metot kullanılarak tehlikeli noktada ($\theta = \pi/2$) elde edilen gerilme değerleri de Tablo 2'de verilmektedir.

Tablo 1. Birinci Metot Kullanılarak Elde Edilen Çeşitli Sıklık Oranı ve Gerilme Değerlerine Tekabül Eden Teğetsel Gerilme Değerleri

$\theta = \pi/2$												
$v=0.3$	$\sigma=50.10^6 (N/m^2)$				$\sigma=100.10^6$				$\sigma=150.10^6$			
	$\delta/r_i = 0.25.10^{-3}$	$\delta/r_i = 0.5.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.25.10^{-3}$	$\delta/r_i = 0.5.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.2.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.35.10^{-3}$	$\delta/r_i = 0.75.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.2.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.35.10^{-3}$
$\frac{\sigma_\theta}{\sigma}$	3	3.64	4.93	5.83	3	3.64	3.90	4.09	3	3.21	3.38	3.51
$\theta = 0$												
$\frac{\sigma_\theta}{\sigma}$	-1	1.644	1.966	3.895	-1	1.644	1.902	2.09	-1	1.21	1.386	1.515

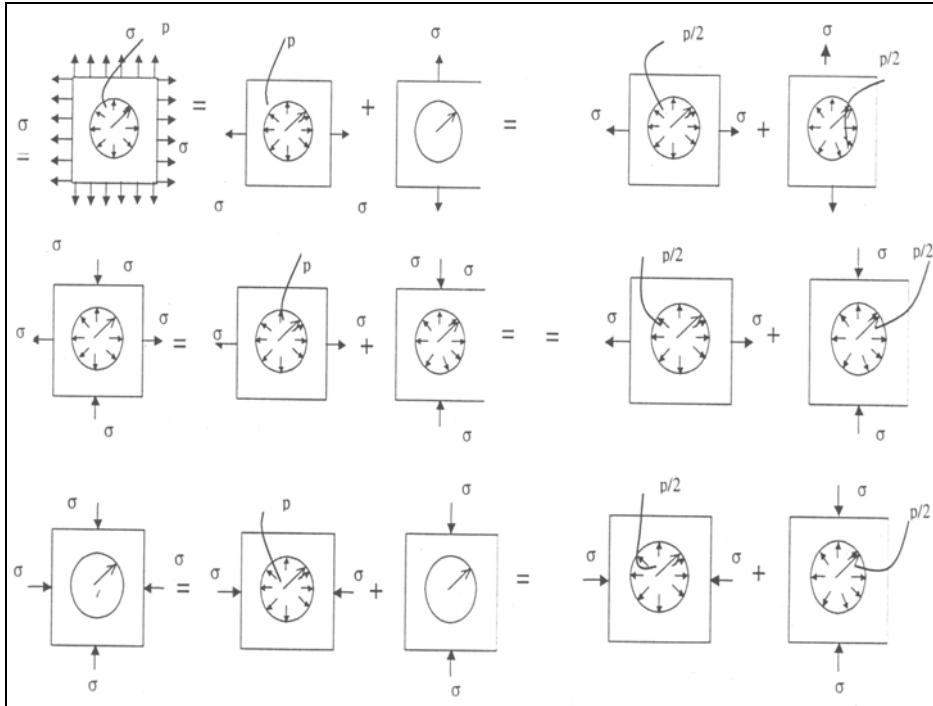
Tablo 2. İkinci Metot Kullanılarak Elde Edilen Çeşitli Sıklık Oranı ve Gerilme Değerlerine Tekabül Eden Teğetsel Gerilme Değerleri

$\theta = \pi/2$												
$v=0.3$	$\sigma=50.10^6$				$\sigma=100.10^6$				$\sigma=150.10^6$			
	$\delta/r_i = 0.25.10^{-3}$	$\delta/r_i = 0.5.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.25.10^{-3}$	$\delta/r_i = 0.5.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.2.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.35.10^{-3}$	$\delta/r_i = 0.75.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.2.10^{-3}$	$\delta/r_i = 1.35.10^{-3}$
$\frac{\sigma_\theta}{\sigma}$	3.92	5.83	6.33	6.70	3.99	4.61	4.81	5.08	3.99	4.21	4.36	4.50
$\theta = 0$												
$\frac{\sigma_\theta}{\sigma}$	3.49	3.50	4.50	5.15	-0.45	-0.0015	1.926	1.944	-0.0023	1.91	1.9522	1.9779

Beklendiği gibi ikinci metoda göre elde edilen gerilme değerleri birinci metodunkinden daha fazladır. Her iki teoremin sonuçları arasında ortalama % 30 fark vardır. Ancak, bu farkın artan σ gerilmesi ve sıklık oranı ile birlikte düştüğü de

görülmektedir.

Lineer teori kullanıldığından aşağıdaki haller de süper pozisyon kuralı kullanılarak gerilme dağılımı bulunabilir (Şekil 10).



Şekil 10. Kombine yükleme hallerine ait eşdeğer yükleme şekilleri

Daha farklı diğer halleri de aynı şekilde elde etmek mümkündür. Ayrıntılarını vermeyeceğimiz hesaplamalar sonucunda Şekil 10(a), (b), (c) deki yükleme halleri için gerilme dağılımlarının sırasıyla

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma \left[1 + \left(1 - \frac{2s'_5}{\sigma} \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \\ \sigma_\theta &= \sigma \left[1 - \left(1 - \frac{2s'_5}{\sigma} \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \\ \tau_{r\theta} &= 0\end{aligned}\quad (47)$$

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma \left[1 + 4 \left(1 + \frac{s'_6}{\sigma} \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 - \left(\frac{2s'_6}{\sigma} + 1 \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right] \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \sigma \left[-1 + \left(\frac{2s'_6}{\sigma} + 1 \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right] \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \sigma \left[-1 - \left(2 + \frac{2s'_6}{\sigma} \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 + \left(\frac{2s'_6}{\sigma} + 1 \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^4 \right] \sin 2\theta\end{aligned}\quad (48)$$

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\sigma \left[1 + \left(1 - \frac{2s'_5}{\sigma} \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \\ \sigma_\theta &= -\sigma \left[1 - \left(1 - \frac{2s'_5}{\sigma} \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \right] \\ \tau_{r\theta} &= 0\end{aligned}\quad (49)$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

olduğu gösterilebilir.

Diğer yükleme halleri için de benzer tarzda ifadeler geliştirilebilir.

3. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada kenarları yüklemesiz ve içinde r_1 yarıçapında delik bulunan şekilsiz sonsuz plağa d çapındaki bir silindirin çakılması neticesinde oluşan gerilme dağılımının bulunması, silindirin aynı zamanda burulma momentine maruz kaldığı zamanki gerilme dağılımı ve eksenel yüklemeye maruz dikdörtgensel plağın ortasındaki r_1 yarıçaplı deliğe silindirin çakılması neticesinde oluşan gerilme dağılımı problemleri ele alınmış ve analitik ifadeler çıkartılmıştır. Verilen sınırlar içerisinde seçilen sıklık oranları ile gerilme dağılımının önemli ölçülerde değiştiği gösterildi.

Dikdörtgensel sonsuz plak halinde aynı yükleme için iki metot geliştirilmiştir. Birinci metot delik çapındaki gerilmelerin malzeme sabitlerinden bağımsız olarak elde edilmiş olmasına rağmen, ikinci metotta gerilmeler malzeme sabitlerini de ihtiva etmektedir. Bunun sebebi ise geometrik

değişimlerin işin içine sokulmuş olmasıdır. Tablolardan takip olunabileceği üzere ikinci metoda göre elde edilen gerilmeler birinci metottakinden daha büyük olmaktadır. Bunun sebebi, σ gerilmesinin etkisiyle $\theta = \pi/2$ noktasında büzülmenin meydana gelecek olmasıdır. $\theta = 0$ da ise tersi bir durum meydana gelecektir. O nedenle her iki metot arasında açığa bağlı olarak büyük farklar meydana gelmesi beklenmelidir.

Elde edilen dikkate değer sonuçlardan biri de her ikisi de sınırı gerilmesiz sonsuz şekilsiz ve sonsuz dikdörtgensel plak halinde girinti probleminin çözümünün farklı ara yüzey basınçları veriyor olmasıdır.

Bu çalışmanın bir devamı olarak, kenarlarında kayma kuvvetlerine maruz, ortasında delik bulunan plak hali için de yeni bir çalışma yapılmalıdır. Ancak, burada takip edilen metot kullanılarak iç gerilme dağılımını veren denklemleri analitik olarak ele almak mümkün değildir. Farklı ve yeni bir metoda ihtiyaç vardır. Aynı şekilde, ortotropik ve kompozit dikdörtgensel plaklarda girinti problemi benzer tarzda incelenebilir.

4. REFERANSLAR

Hsu, Y. C. and Forman, R. G. 1975. 'Elastic-Plastic Analysis of a Infinite Sheet Having a Circular Hole Under Pressure', Journal of Applied Mechanics, pp.347-352, June .

Lekhnitskii, G. G. 1968. 'Anisotropic Plates', Gordon and Breach Science Publishers, New York.

Pala, Y. ve Güllü, E. 2000. "Dalgalı Sınırı Haiz Delik İhtiva Eden Safi Kaymaya Maruz Plakta Gerilme Dağılımı", Teknoloji, Z.K.Ü. Karabük Tek. Eğt. Fak. Dergisi, (1), 27-35, Mart 2000.

Schlach, A. L. and Little, R.W. 1964. "Elastostatic Problem of a Perforated Square Plate," ASCE, Eng. Mech. Div., Oktober.

Thompson, T. R. 1965. "Elastostatic Problem of a Rectangular Plate With A Circular Hole", M.S.Dissertation, Oklohama State University.

Venkatraman, B. and Patel, Sharad, 1970. 'Structural Mechanics with Introduction to Elasticity and Plasticity', New Delhi, Prentice Hall, p. 111-118.