C.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Fen Bilimleri Dergisi (2006)Cilt 27 Sayı 2

Sınır Koşullarının Spektral Parametreyi İçerdiği İmpulsive Sturm-Liouville Sınır-Değer Problemi İçin Düz ve Ters Problemler

R. Kh. Amirov, B. Keskin, A. S. Özkan

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü/ SİVAS

Received: 07.03.2007, Accepted: 05.04.2007

Özet: Bu çalışmada sınır koşulunda spektral parametreyi içeren impulsive Sturm-Liouville sınır değer probleminin spektral karakteristikleri incelenmiş ve ters problem için teklik teoremi verilmiştir.
Anahtar Kelimeler: Ters problem, spektrum, diferansiyel ifade.

Direct and Inverse Problems for Impulsive Sturm-Liouville Boundary Value Problem with Spectral Parameter Contained in Boundary Condition

Abstract: In this study, the spectral characteristics of impulsive Sturm-Liouville boundary value problem with spectral parameter contained in boundary condition are investigated and uniqueness theorem for inverse problem is given.
Key words: Inverse problem, spectrum, differential expression.

1. Giriş

Aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$-y''+q(x)y=\lambda y, \quad \lambda=k^2, \; q(x)\in L^2_{\mathbb{R}}(0,\pi) \tag{1}$$

$$\begin{gathered} y'(0)=0 \\ y(\pi)\cos k\alpha - y'(\pi)\frac{\sin k\alpha}{k}=0, \end{gathered} \tag{2}$$

$$y(d+0)=a\,y(d-0)$$
$$y'(d+0)=a^{-1}y'(d-0),\ \ 0\le a\le d\le \frac{p}{2} \tag{3}$$

(1) diferansiyel denkleminin (2) sınır koşullarını sağlayan çözümlerinin aranması problemi [12]-[13] çalışmalarında da gösterildiği gibi b yarıçaplı küre içerisinde kompakt supportun bir homojen olmayan medyumu için aşağıda verilen üç boyutlu ters akustik saçılma probleminin çözümünde ortaya çıkmıştır.

$$\Delta u+k^2 n(x)u=0,$$
$$u(x)=\exp(ik(x,a))+u^s(x);$$
$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u^s}{\partial r}-iku^s\right)=0$$

Orijinal problemin parametrelerine bağlı olan, (1)-(2) problemindeki a parametresi ve $q(x)$ potansiyeli

$$q(x)=B^2\hat{q}(Bx),\ a=\frac{b}{B},\qquad x=\int_0^r (n(t))^{\frac{1}{2}}dt$$
$$\hat{q}(x)=\frac{1}{4}\frac{n''(r)}{(n(r))^2}-\frac{5}{16}\frac{(n'(r))^2}{(n(r))^3}\qquad B=\int_0^b (n(t))^{\frac{1}{2}}dt$$

şeklindedir.

Ayrıca daha önce sınır koşullarında spektral parametrenin lineer şekilde içerildiği durum [14]-[15] çalışmalarında incelenmiştir.

Diğer taraftan aralıkta süreksizliğe sahip sınır değer problemleri matematik, mekanik fizik ve jeofizik gibi bilim dallarında sıklıkla karşımıza çıkar. Süreksizliğe sahip olmayan diferansiyel operatörlerin ters ve düz spektral problemleri [2]-[6] çalışmalarında incelenmiştir. Süreksizliğin varlığı operatörlerin incelenmesinde temel niteliksel gelişmeler sağlamıştır. Süreksizliğe sahip sınır değer problemleri için düz ve ters problemlerin çeşitli formülasyonları [7]-[8] ve diğer çalışmalarda ele alınmıştır.

(1)-(3) problemini L ile gösterelim. $q(x)=0$ için (1) denkleminin $e_0(0,k)=1,\ e_0'(0,k)=ik$ başlangıç koşullarını ve (3) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü aşağıdaki gibidir:

$$e_0(x,k)=\begin{cases}\exp ikx, & 0<x<d\\ a^+\exp ikx+a^-\exp ik(2d-x), & d<x<p\end{cases}$$

Burada $a^+=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right),\ \ a^-=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$'dır.

$$\widetilde{K}_x(x,\bullet)\in L_2\left(0,p\right),\quad \widetilde{K}_t(x,\bullet)\in L_2\left(0,p\right),$$
$$\widetilde{K}(x,x)=\frac{a^+}{2}\int_0^x q(t)dt$$
$$\widetilde{K}(x,-x)=0 \tag{4}$$
$$\widetilde{K}(x,2d-x+0)-\widetilde{K}(x,2d-x-0)=\frac{a^-}{2}\int_0^x q(t)dt,$$

olmak üzere, $q(x)\neq 0$ olduğunda

$$e(x,k)=e_0(x,k)+\int_0^x \widetilde{K}(x,t)e^{ikt}dt,\quad \widetilde{K}(x,t)=K(x,t)-K(x,-t)$$

gösteriminin varlığı R. Kh. Amirov [1] tarafından gösterilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada,

$$j(x,k)=\frac{1}{2}\left[e(x,k)+\overline{e(x.k)}\right]$$

(1) denkleminin $j(o,k)=1,\;\; j'(o,k)=0$ başlangıç koşullarını ve (3) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü olmak üzere,

$$j(x,k)=j_0(x,k)+\int_0^x \widetilde{K}(x,t)\cos ktdt \tag{5}$$

şeklinde bir gösterimin mevcut olduğu ispatlanmıştır.

Burada

$$j_0(x,k)=\begin{cases}\cos kx, & 0<x<d\\ a^+\cos kx+a^-\cos k\left(2d-x\right), & d<x<p\end{cases} \tag{6}$$

dır.

2. Spektrumun Özellikleri

Bu bölümde L probleminin spektrumu öğrenilecektir. L_0 ile L probleminde $q(x)=0$ olduğu durumu belirtelim.

$y(x,k)$ fonksiyonu (1) denkleminin $y(p,l)=\dfrac{\sin\sqrt{l}\,a}{\sqrt{l}},\; y'(p,l)=\cos\sqrt{l}\,a$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun.

Lemma 1: $y(x,l_n)=\dfrac{\sin\sqrt{l_n}\,a}{j(p,l_n)\sqrt{l_n}}\,j(x,l_n)$ eşitliği her $n\in\mathbb{N}$ için sağlanır.

İspat: $\Delta\left(l_n\right)=W(j\,,y\,)_{x=p}\;=W(j\,,y\,)_x=j^{\,2}(x,\,l_n)\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{y\,(x,\,l_n)}{j\,(x,\,l_n)}\right]$

$\Delta\left(l_n\right)=0$ ve $j^{\,2}(x,\,l_n)\neq 0$ olduğundan $y\,(x,\,l_n)=b_n j\,(x,\,l_n)$ olur. Son eşitlikte $x=p$

yazılrsa $b_n=\dfrac{y\,(p\,,\,l_n)}{j\,(p\,,\,l_n)}=\dfrac{\sin\sqrt{l_n}a}{j\,(p\,,\,l_n)\sqrt{l_n}}$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 2: L probleminin özdeğerleri reel, ayrık ve basittir.

İspat: İlk olarak L probleminin özdeğerlerinin reel olduğunu gösterelim; Kabul edelim ki, l sayısı L probleminin bir özdeğeri ve $j\,(x,\,l\,)$ bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonu olsun. Bu durumda $q(x)\in L^2_{\mathbb{R}}\left(0,p\right)$ olduğundan

$$-j\,''(x,\,l\,)+q(x)j\,(x,\,l\,)=l\,j\,(x,\,l\,)$$
$$-\overline{j}\,''(x,\,l\,)+q(x)\overline{j}\,(x,\,l\,)=\overline{l}\,\overline{j}\,(x,\,l\,)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikleri sırasıyla $\overline{j}\,(x,\,l\,)$ ve $j\,(x,\,l\,)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılır ve $\left(0,p\right)$ aralığında integrallenirse,

$$\left[j\,'(x,\,l\,)\overline{j}\,(x,\,l\,)-\overline{j}\,'(x,\,l\,)j\,(x,\,l\,)\right]_0^{d-0}+\left[j\,'(x,\,l\,)\overline{j}\,(x,\,l\,)-\overline{j}\,'(x,\,l\,)j\,(x,\,l\,)\right]_{d+0}^{p}$$
$$=(\overline{l}-l\,)\int_0^p\overline{j}\,(x,\,l\,)j\,(x,\,l\,)dx$$

elde edilir. $j\,(x,\,l_n)$ $\overline{j}\,(x,\,l_n)$ fonksiyonları L probleminin özfonksiyonları olduğundan, (2) sınır koşulu ve (3) süreksizlik koşulunu sağlarlar. Buradan

$$0=(\overline{l}-l\,)\int_0^p j\,(x,\,l\,)\overline{j}\,(x,\,l\,)dx$$

eşitliği elde edilir. $j\,(x,\,l_n)\neq 0$ olduğundan , $l\;=\overline{l}$ olur.

L probleminin karakteristik fonksiyonu $\Delta(k)$ tam fonksiyon olduğundan $\Delta(k)$'nın sıfırları ayrıktır. Bu ise özdeğerlerin ayrık olması sonucunu verir.

Şimdi, özdeğerlerin basit olduğunu gösterelim.

$$-y\,''(x,\,l\,)+q(x)y\,(x,\,l\,)=l\,y\,(x,\,l\,)$$
$$-j\,''(x,\,l_n)+q(x)j\,(x,\,l_n)=l_n j\,(x,\,l_n)$$

eşitlikleri sırasıyla $j\,(x,\,l_n)$ ve $y\,(x,\,l\,)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılır ve $\left(0,p\right)$ aralığında integrallenirse,

$$\left[\varphi'(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)-\psi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)\right]_0^{d-0}+\left[\varphi'(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)-\psi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)\right]_{d+0}^{\pi}$$
$$=(\lambda-\lambda_n)\int_0^{\pi}\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx$$

son eşitlikte $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonunun L probleminin bir özfonksiyonu olduğunu göz önüne alırsak

$$\psi'(0,\lambda)=(\lambda-\lambda_n)\int_0^{\pi}\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx$$

elde edilir. Dolayısıyla (2) den

$$\frac{\Delta(\lambda)}{(\lambda-\lambda_n)}=\int_0^{\pi}\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx$$

olur. Son eşitlikte $\lambda\to\lambda_n$ iken limite geçersek

$$\dot{\Delta}(\lambda_n)=\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\alpha}{\varphi(\pi,\lambda_n)\sqrt{\lambda_n}}\int_0^{\pi}\varphi^2(x,\lambda_n)dx$$

eşitliğini buluruz. Buradan $\dot{\Delta}(\lambda_n)\neq 0$ olduğu açıktır. Böylece Lemma2'nin ispatı tamamlanmış olur

Teorem 3: L probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları için

$$k_n=\sqrt{\lambda_n}=k_n^0+\frac{z_n}{k_n^0}+\frac{\delta_n}{k_n^0} \tag{7}$$

$$\varphi(x,k_n)=a^+\cos k_n^0x+a^-\cos k_n^0\left(2d-x\right)+\frac{\varsigma_n}{k_n^0}+\frac{\beta_n}{k_n^0} \tag{8}$$

asimptotik ifadeleri geçerlidir. Burada, $z_n,\varsigma_n\in\ell_\infty$, $\delta_n,\beta_n\in\ell_2$, ayrıca k_n^0, L_0 probleminin özdeğerlerinin kareköklerini belirtmektedir ve $k_n^0=\dfrac{(2n+1)\pi}{2(\pi-\alpha)}+h_n$, $\{h_n\}\in\ell_\infty$ şeklindedir.

İspat: L probleminin karakteristik fonksiyonunu $\Delta(k)$ ile L_0 problemininkini de $\Delta_0(k)$ ile gösterelim. Bu durumda aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\Delta(k)=\varphi(\pi,k)\cos k\alpha-\varphi'(\pi,k)\frac{\sin k\alpha}{k}$$
$$\Delta_0(k)=a^+\cos k(\pi-\alpha)+a^-\cos k(2d-\pi-\alpha)$$

$\Delta(k)$ fonksiyonunda (5) ve (6) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\Delta(k)=\Delta_0(k)+\frac{1}{2k}\widetilde{K}(p,2d-p-0)\sin k(a+2d-p)$$
$$+\frac{1}{2k}\widetilde{K}(p,2d-p-0)\sin k(a-2d+p)-\frac{1}{2k}\widetilde{K}(p,p)\sin k(p+a)$$
$$-\frac{1}{2k}\widetilde{K}(p,p)\sin k(a-p)-\frac{1}{2k}\widetilde{K}(p,2d-p+0)\sin k(a+2d-p)$$
$$-\frac{1}{2k}\widetilde{K}(p,2d-p+0)\sin k(a-2d+p)+\frac{1}{2}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}(p,t)\cos k(a+t)\,dt+$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}(p,t)\cos k(a-t)\,dt+\frac{1}{2}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}(p,t)\cos k(a+t)\,dt+$$
$$\frac{1}{2k}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_x(p,t)\sin k(a-t)\,dt-\frac{1}{2k}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_x(p,t)\sin k(a+t)\,dt-$$
$$\frac{1}{2k}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_x(p,t)\sin k(a-t)\,dt$$

eşitliği bulunur. Son eşitlikte kısmi integrasyon yapılırsa,

$$\Delta(k)=\Delta_0(k)-\frac{1}{k}\left[\widetilde{K}(p,2d-p-0)-\widetilde{K}(p,2d-p-0)\right]\sin k(a+2d-p)+$$
$$\frac{1}{k}\widetilde{K}(p,p)\sin k(p-a)-\frac{1}{2k}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_t(p,t)\sin k(a+t)\,dt+$$
$$\frac{1}{2k}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_t(p,t)\sin k(a-t)\,dt-\frac{1}{2k}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_t(p,t)\sin k(a+t)\,dt+$$
$$\frac{1}{2k}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_t(p,t)\sin k(a-t)\,dt-\frac{1}{2k}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_x(p,t)\sin k(a+t)\,dt-$$
$$\frac{1}{2k}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_x(p,t)\sin k(a-t)\,dt-\frac{1}{2k}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_x(p,t)\sin k(a+t)\,dt-$$
$$\frac{1}{2k}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_x(p,t)\sin k(a-t)\,dt$$

eşitliği elde edilir.

$$G_n:=\left\{k:|k|=\left|k_n^0\right|+\frac{b}{2}\right\},\ n=0,1,2,...$$
$$G_d:=\left\{k:\left|k-k_n^0\right|\geq d,\ \ d>0\right\},\ n=0,1,2,...$$

olarak gösterelim. Burada $d<<\frac{b}{2}$ olacak şekilde d seçilir.

[9] çalışmasında gösterildiği gibi $k\in G_d$ için $\left|\Delta_0(k)\right|\geq C_d\exp\left(|\operatorname{Im}k|p\right)$ dır.

Diğer taraftan [4] den, n'in yeterince büyük değerlerinde $k\in G_n$ için,

$$\lim_{|k|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im}k|p}\left(\Delta(k)-\Delta_0(k)\right)=$$

$$\lim_{|k|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im}k|p}\left\{-\frac{1}{k}\left[\widetilde{K}(p,2d-p-0)-\widetilde{K}(p,2d-p-0)\right]\sin k\left(a+2d-p\right)+\right.$$

$$\frac{1}{k}\widetilde{K}(p,p)\sin k\left(p-a\right)-\frac{1}{2k}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_t(p,t)\sin k\left(a+t\right)dt+$$

$$\frac{1}{2k}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_t(p,t)\sin k\left(a-t\right)dt-\frac{1}{2k}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_t(p,t)\sin k\left(a+t\right)dt+$$

$$\frac{1}{2k}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_t(p,t)\sin k\left(a-t\right)dt-\frac{1}{2k}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_x(p,t)\sin k\left(a+t\right)dt-$$

$$\frac{1}{2k}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_x(p,t)\sin k\left(a-t\right)dt-\frac{1}{2k}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_x(p,t)\sin k\left(a+t\right)dt-$$

$$\left.\frac{1}{2k}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_x(p,t)\sin k\left(a-t\right)dt\right\}=0$$

olduğundan,

$$\left|\Delta(k)-\Delta_0(k)\right|<\frac{C_d}{2}\exp\left(|\operatorname{Im}k|p\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç olarak $n\in\mathbb{N}$ nin yeterince büyük değerlerinde $k\in G_n$ için,

$$\left|\Delta(k)-\Delta_0(k)\right|<\frac{C_d}{2}\exp\left(|\operatorname{Im}k|p\right)<C_d\exp\left(|\operatorname{Im}k|p\right)<\left|\Delta_0(k)\right|$$

elde edilir. Rouche teoreminden $n\in\mathbb{N}$ nin yeterince büyük değerlerinde G_n çevresinin sınırlandırdığı bölge içerisinde, $\Delta_0(k)$ ile $\Delta(k)=\Delta_0(k)+\left(\Delta(k)-\Delta_0(k)\right)$ fonksiyonlarının sıfırlarının sayısı katlarıyla birlikte aynıdır. Yani bu fonksiyonlar (*n+1*) sayıda: $k_0,k_1,...,k_n$ sıfırlarına sahiptir.

d yeterince küçük olduğundan $e_n=o(1)$ olmak üzere $k_n=k_n^0+e_n$ eşitliği geçerlidir. k_n sayıları $\Delta(k)$ karakteristik fonksiyonunun sıfırları olduğundan,

$$\Delta\left(k_n\right)=\Delta_0\left(k_n^0+e_n\right)-\frac{1}{k_n^0+e_n}\left[\widetilde{K}(p,2d-p-0)-\widetilde{K}(p,2d-p-0)\right]\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a+2d-p\right)+$$
$$\frac{1}{k_n^0+e_n}\widetilde{K}(p,p)\sin\left(k_n^0+e_n\right)(p-a)-\frac{1}{2\left(k_n^0+e_n\right)}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_t(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a+t\right)dt+$$
$$\frac{1}{2\left(k_n^0+e_n\right)}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_t(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a-t\right)dt-\frac{1}{2\left(k_n^0+e_n\right)}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_t(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a+t\right)dt+$$
$$\frac{1}{2\left(k_n^0+e_n\right)}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_t(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a-t\right)dt-\frac{1}{2\left(k_n^0+e_n\right)}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_x(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a+t\right)dt-$$
$$\frac{1}{2\left(k_n^0+e_n\right)}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_x(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a-t\right)dt-\frac{1}{2\left(k_n^0+e_n\right)}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_x(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a+t\right)dt-$$
$$\frac{1}{2\left(k_n^0+e_n\right)}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_x(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a-t\right)dt$$

$\Delta_0\left(k\right)$ sinüs tipli fonksiyon olduğundan [10] her $n\in\mathbb{N}$ için $\left|\dot{\Delta}_0\left(k_n^0\right)\right|\geq g_d$ olacak şekilde $g_d>0$ sayısı vardır. [11] çalışmasından dolayı $k_n^0=\dfrac{(2n+1)p}{2(p-a)}+h_n,\ h_n\in\ell_\infty$ geçerlidir. Diğer taraftan,

$$\Delta_0\left(k\right)=a^+\cos k\left(p-a\right)+a^-\cos k\left(2d-p-a\right),\ \Delta_0\left(k_n^0+e_n\right)=\dot{\Delta}_0\left(k_n^0\right)e_n+o(e_n)$$

olduğundan

$$e_n=\frac{1}{\left(\dot{\Delta}\left(k_n^0\right)+o(1)\right)\left(k_n^0+e_n\right)}\Big\{\left[\widetilde{K}(p,2d-p-0)-\widetilde{K}(p,2d-p-0)\right]\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a+2d-p\right)-$$
$$\widetilde{K}(p,p)\sin\left(k_n^0+e_n\right)(p-a)+\frac{1}{2}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_t(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a+t\right)dt-$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_t(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a-t\right)dt+\frac{1}{2}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_t(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a+t\right)dt-$$
$$\frac{1}{2}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_t(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a-t\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_x(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a+t\right)dt+$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{2d-p-0}\widetilde{K}_x(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a-t\right)dt+\frac{1}{2}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_x(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a+t\right)dt+$$
$$\frac{1}{2}\int_{2d-p+0}^{p}\widetilde{K}_x(p,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a-t\right)dt\Big\}$$

(4) eşitliğinden

$$e_n=\frac{a^-\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(a+2d-p\right)-a^+\sin\left(k_n^0+e_n\right)\left(p-a\right)}{2\left(k_n^0+e_n\right)\left(\dot{\Delta}\left(k_n^0\right)+o(1)\right)}\int_0^p q(t)dt+\frac{\tilde d_n}{k_n^0},\ \tilde d_n\in\ell_2$$

bulunur. Buradan

$$e_n=\frac{z_n}{k_n^0}+\frac{d_n}{k_n^0},\quad z_n\in\ell_\infty,\ d_n\in\ell_2$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla

$$k_n=\sqrt{l_n}=k_n^0+\frac{z_n}{k_n^0}+\frac{d_n}{k_n^0},\quad z_n\in\ell_\infty,\ d_n\in\ell_2$$

eşitliği ispatlanmış olur.

Şimdi (8) asimptotik formülünün doğru olduğunu gösterelim,

$$\begin{aligned}j(x,k)&=a^+\cos kx+a^-\cos k\left(2d-x\right)+\int_0^{2d-x-0}\widetilde K(x,t)\cos ktdt+\int_{2d-x+0}^{x}\widetilde K(x,t)\cos ktdt\\&=a^+\cos kx+a^-\cos k\left(2d-x\right)+\frac{1}{k}\widetilde K(x,2d-x-0)\sin k(2d-x)+\frac{1}{k}\widetilde K(x,x)\sin kx\\&-\frac{1}{k}\widetilde K(x,2d-x+0)\sin k(2d-x)-\frac{1}{k}\int_0^{2d-x-0}\widetilde K_t(x,t)\sin ktdt-\frac{1}{k}\int_{2d-x+0}^{x}\widetilde K_t(x,t)\cos ktdt\end{aligned}$$

son eşitlikte k yerine k_n yazarsak ve $k_n=k_n^0+e_n$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}j(x,k_n)&=a^+\cos\left(k_n^0+e_n\right)x+a^-\cos\left(k_n^0+e_n\right)\left(2d-x\right)\\&+\frac{\sin\left(k_n^0+e_n\right)(2d-x)}{\left(k_n^0+e_n\right)}\left[\widetilde K(x,2d-x-0)-\widetilde K(x,2d-x+0)\right]\\&+\frac{\sin\left(k_n^0+e_n\right)x}{\left(k_n^0+e_n\right)}\widetilde K(x,x)-\frac{1}{\left(k_n^0+e_n\right)}\int_0^x\widetilde K_t(x,t)\sin\left(k_n^0+e_n\right)tdt+O(e_n)\\&=a^+\cos k_n^0x+a^-\cos k_n^0\left(2d-x\right)+\frac{s_n}{k_n^0}+\frac{b_n}{k_n^0}\end{aligned}$$

Burada,

$$s_n=\frac{\sin\left(k_n^0+e_n\right)x}{\left(1+e_n/k_n^0\right)}\widetilde K(x,x)-\frac{\sin\left(k_n^0+e_n\right)(2d-x)}{\left(1+e_n/k_n^0\right)}\left[\widetilde K(x,2d-x-0)-\widetilde K(x,2d-x+0)\right]+O(e_n)$$

olup, sınırlı bir dizidir.

3. Ters Problem

Bu bölümde L probleminin özdeğerlerinden yararlanarak tek şekilde belirlenebileceği hakkında bir teorem ispatlanacak.

$L=L\left(q(x),a\right)$ ve $\tilde{L}=L\left(\tilde{q}(x),\tilde{a}\right)$ olmak üzere $\{l_n\}$ L probleminin, $\{\tilde{l}_n\}$ ise $\tilde{L}$ probleminin özdeğer dizisi olsun.

Teorem 4: $l_n=\tilde{l}_n$ ve $j(p,l_n)=\tilde{j}(p,l_n),\ n\geq 0,$ ise $L=\tilde{L}$ dır. Yani, hemen hemen heryerde $a=\tilde{a}$ ve $q(x)=\tilde{q}(x)$ dır.

İspat: $l_n=\tilde{l}_n$ olduğundan n'in yeterince büyük değerleri için, $\dfrac{1}{(p-a)}-\dfrac{1}{(p-\tilde{a})}=o(1)$ eşitliği doğrudur. Buradan $a=\tilde{a}$ olduğu aşikardır.

$\Delta(l)$, l'nın $\dfrac{1}{2}$. mertebeden tam fonksiyonudur. Dolayısıyla Hadamard teoreminden $\Delta(l)$ kendi sıfırlarıyla tek olarak belirlenebilir. Buradan $l_n=\tilde{l}_n$ *ise* $\Delta(l)=\tilde{\Delta}(l)$ olduğu çıkar. Şimdi aşağıdaki eğrisel integrali göz önüne alalım,

$$I_N:=\int_{C_N}\frac{1}{\Delta(l)}\left[j(x,l)-\tilde{j}(x,l)\right]\left[y(x,l)-\tilde{y}(x,l)\right]dl$$

Burada, $C_N=\left\{l:|l|=\dfrac{(N+1)^2p^2}{(p-a)^2}\right\}.$

$F(l):=\dfrac{1}{\Delta(l)}\left[j(x,l)-\tilde{j}(x,l)\right]\left[y(x,l)-\tilde{y}(x,l)\right]$ olsun. $F(l)$nın $l=l_n$ noktalarında basit kutuplara sahip l 'nın meromorf fonksiyonu olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$$res\left(F(l),l_n\right)=\frac{1}{\dot{\Delta}(l_n)}\left[j(x,l_n)-\tilde{j}(x,l_n)\right]\left[y(x,l_n)-\tilde{y}(x,l_n)\right]$$

$$=\frac{\sin\sqrt{l_n}a}{\dot{\Delta}(l_n)j(p,l_n)\sqrt{l_n}}\left[j(x,l_n)-\tilde{j}(x,l_n)\right]^2$$

Diğer taraftan, N nin yeterince büyük değerlerinde $I_N\to 0$ olur. Dolayısıyla,

$$2pi\sum_n\frac{\sin\sqrt{l_n}a}{\dot{\Delta}(l_n)j(p,l_n)\sqrt{l_n}}\left[j(x,l_n)-\tilde{j}(x,l_n)\right]^2=0$$

elde edilir. Buradan $j(x,l_n)=\tilde{j}(x,l_n),\ n\geq 0$ olduğu çıkar. Son eşitlik (1) diferansiyel denklemi ile birlikte göz önüne alınırsa $q(x)=\tilde{q}(x)$ h.h.y. olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Kaynaklar

[1]. R. Kh. Amirov , *On Sturm-Liouville operators with discontinuity conditions inside an interval*, J. Math. Anal. Appl. 317 (2006) 163-176.

[2]. G. Borg, Eine umkehrung der Sturm-Liouvilleschen eigenwertaufgabe, Acta Math. 78 (1946) 1-96

[3]. B. M. Levitan, I.S. Sargsyan, Introduction to Spectral Theory, Amer. Math Soc. Transl. Math. Monogr., vol. 39, Amer. Math Soc., Providence, RI, 1975

[4]. V. A. Marchenko, Sturm-Liouville Operators and Their Applications, Nauka Dumka, Kiev, !977. English Transl. Birkhäuser, Basel, 1986.

[5]. B. M. Levitan, Inverse Sturm-Liouville problems, Nauka Moscow, 1984. English Transl.: VNU Sci Pres, Utrecht, 1987.

[6] J. R. Mclaughlin, Analytical methods for recovering coefficients in Differential equations from spectral data, SIAM rev. 28 (1986), 53-72.

[7]. D. G. Shepelsky, The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions, Adv. Soviet Math. 19 (1994), 209-231

[8]. O. H. Hald, Discontinuous inverse eigenvalue problems, Comm. Pure. Appl. Math. 37 (1984), 539-577.

[9]. R. Bellman, K. Cooke, Differential-Difference Equations, Academic Press., New York, 1963.

[10]. B. Ya. Levin, Entire Functions, MGU, Moscow, 1971.

[11]. B. F. Jdanovich, Formula efor the zeros of Dirichlet polynomials and quasi-polynomials, Dokl. Acad. Nauk. SSSR, 135 (8) (1960), 1046-1049

[12]. L. A. Zhornitskaya and V. S. Serov, İnverse eigenvalue problems for a singular Sturm-Liouville operator on [0,1], Inverse Problems 10(1994), 975-987.

[13]. J. McLaughlin and P. Polyakov, On the uniqueness of a spherical symmetric speed of sound from transmission eigenvalues, J. Diff. Eqn. 107(1994),351{382.

[14]. C. T. Fulton, Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburgh, A77 (1977), 293-308.

[15]. C. T. Fulton, Singular eigenvalue problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburgh, A87 (1980), 1-34.