Cumhuriyet Ünivertsitesi Fen Fakültesi
Fen Bilimleri Dergisi (CFD), Cilt 35, No.2 (2014)
ISS: 1300-1949

Cumhuriyet University Faculty of Sciences
Science Journal (CSJ), Vol. 35, No.2 (2014)
ISS: 1300-1949

FRENET DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ SİSTEMİ TİPİNDEKİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN İNTEGRAL GÖSTERİMLERİ

R. KH. AMIROV AND T. MERT

Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts, Cumhuriyet University, 58140 Sivas, Turkey

Received 26.10.2013; Accepted 19.03.2014

Ozet. Bu çalışmada Frenet diferansiyel denklem sisteminin çözümleri için bazı integral gösterimleri elde edilmiştir. Çevirme Operatörü ve özellikleri araştırılmış, özdeğer ve normalleştirici sayıların davranışları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dönüsüm operatörü, Integral denklemi, Sturm-Liouville.

INTEGRAL REPRESENTATIONS FOR SOLUTIONS OF FRETNEL DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. In this paper, we obtain some integral representations system for solution of Frenet differential equations system. In addition that we search transformation operator and its properties and also we investigate eigenvalue and behaviour of normalized number.

Keywords: Transformation operator, Integral equaiton, Sturm-Liouville.

1. GİRİŞ

Spektral analizin bir dalı olan inverse (ters) problemler yani, spektral karakteristiklere göre operatörlerin kurulması problemi, fiziğin bir çok alanında kullanılmaktadır. Örneğin mekanikte, verilen dalga boylarına göre homojen olmayan yayda yoğunluk dağılımının öğrenilmesinde, Kuantum mekaniğinde, verilen enerji seviyelerine veya saçılma verilerine göre parçacıklar arasında etkileşmenin öğrenilmesinde, jeofizikte yer altı madenlerinin aranmasında karşımıza çıkmaktadır.

Bu yüzden verilen sistemin enerji seviyelerinin ve dalga fonksiyonlarının bulunması en önemli problemlerden birisidir. Söz konusu problemler verilen sistemin yerleştiği potansiyel alana bağlıdır. Bu tip problemlerin çözümü, farklı potansiyelli Schrödinger denklemi için sınır-değer problemlerinin özdeğer, özfonksiyon ve normalleştirici sayıların bulunmasına indirgenmektedir.

Ayrıca, Kuantum teorisinin önemli problemlerinden biriside sistemin enerji seviyeleri belli iken sistemin bulunduğu potansiyel alanı bulmaktır. Bu tip problemler, singülariteye sahip Sturm-Liouville operatörler için inverse(ters) problemler

Author's email addresses. emirov@cumhuriyet.edu.tr; tmert@cumhuriyet.edu.tr

yardımıyla çözülmektedir. Bu yüzden de, söz konusu operatörlerin spektral karakteristiklerine göre belirlenmesi probleminin çözülmesi için önem taşımaktadır.

Tanım 1.1 : Tanım bölgesi sonlu, katsayıları toplanabilir fonksiyonlar olan diferansiyel operatöre regüler operatör, tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan diferansiyel operatöre singüler operatör denir.

İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. XIX. yüzyılın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde adi diferansiyel operatörlerin dağılımı Birkof tarafından incelenmiştir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak Weyl tarafından incelenmiştir. Daha sonra Riestz, Neumann, Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur. Simetrik operatörlerin tüm self-adjoint genişlemelerinin bulunması problemi Neumann tarafından bir süre sonra yapılmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuşur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger denklemi de denir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülüde verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar, 1949 yılında Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve öz fonksiyonların tamlığına ilişkin konular Courant, Carleman, Birman, Salamyak, Maslov, Keldish vs. matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.

2. ÇEVİRME OPERATÖRÜ VE ÖZELLİKLERİ

2.1. İntegral Denklemin Oluşturulması

$$\begin{cases} y_1'(x) = i\rho\kappa(x)\, y_2(x) \\ y_2'(x) = i\rho \dfrac{1}{\kappa(x)} y_1(x) \end{cases}, \quad \lambda = \rho^2 \ , \ 0 < x < \pi \tag{1}$$

$$\begin{cases} y_2(0) - h y_1(0) = 0 \\ y_2(\pi) + H y_1(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

sınır-değer problemini ele alalım. Burada $\kappa(x), \dfrac{1}{\kappa(x)} \in L_2[0,\pi]$ ve $\forall\ x \in [0,\pi]$

için $\kappa(x) \neq 0$ dır. İlk önce

$$y_1(x,\rho) = \sqrt{\kappa(x)}U(x,\rho) \text{ ve } y_2(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}}V(x,\rho) \tag{3}$$

dönüşümleri yapılırsa

$$\begin{cases} U'(x,\rho) + m(x)U(x,\rho) = i\rho V(x,\rho) \\ V'(x,\rho) - m(x)V(x,\rho) = i\rho U(x,\rho) \end{cases} \tag{4}$$

denklemler sistemi elde edilir. Burada $m(x) = \dfrac{\kappa'(x)}{2\kappa(x)}$ dir.

$$U'(x,\rho) + m(x)U(x,\rho) = i\rho V(x,\rho)$$

ise

$$U''(x,\rho) + \left[m'(x) - m^2(x)\right]U(x,\rho) = -\rho^2 U(x,\rho)$$

ve

$$-U''(x,\rho) + q(x)U(x,\rho) = \lambda U(x,\rho) \tag{5}$$

elde edilir. Burada $q(x) = m^2(x) - m'(x)$, $\lambda = \rho^2, q(x) \in L_2[0,\pi]$ dir. Böylece Sturm-Liouville denklemi elde edilmiş olur. Şimdi (5) denkleminin çözümünü bulalım. $q(x) = 0$ için homojen kısmın çözümü

$$U(x,\rho) = c_1 e^{i\rho x} + c_2 e^{-i\rho x}$$

şeklindedir. Homojen olmayan kısmı çözmek için sabitlerin değişimi yöntemi kullanılırsa

$$U(x,\rho) = c_1^* e^{i\rho x} + c_2^* e^{-i\rho x} + \frac{1}{2i\rho}\int_0^x q(t)U(t,\rho)e^{-i\rho(t-x)}dt - \\ -\frac{1}{2i\rho}\int_0^x q(t)U(t,\rho)e^{i\rho(t-x)}$$

ve buradan da

$$U(x,\rho) = c_1^* e^{i\rho x} + c_2^* e^{-i\rho x} + \int_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}q(t)U(t,\rho)dt$$

elde edilir.

$$V(0,\rho) = h\kappa(0) \ , U(0,\rho) = 1$$

ve

$$U'(0,\rho) = i\rho h\kappa(0) - \frac{\kappa'(0)}{2\kappa(0)}$$

koşulları yardımıyla c_1^* ve c_2^* ı hesaplanırsa

$$c_1^* = \frac{1}{2} + h\frac{\kappa(0)}{2} - \frac{\kappa'(0)}{4i\rho\kappa(0)}$$

ve

$$c_2^* = \frac{1}{2} - h\frac{\kappa(0)}{2} + \frac{\kappa'(0)}{4i\rho\kappa(0)}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} U(x,\rho) &= \left(\frac{1}{2} + h\frac{\kappa(0)}{2} - \frac{\kappa'(0)}{4i\rho\kappa(0)}\right)e^{i\rho x} + \left(\frac{1}{2} - h\frac{\kappa(0)}{2} + \frac{\kappa'(0)}{4i\rho\kappa(0)}\right)e^{-i\rho x} \\ &+ \int_0^x \tfrac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q(t)\, U(t,\rho)\, dt \end{aligned} \tag{6}$$

olur. Dolayısıyla

$$U(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q(t)\, U(t,\rho)\, dt \tag{7}$$

elde edilir.

2.2. Çevirme Operatörünün Varlığı

Bu bölümde 2.1 alt bölümünde alınan integral denklemlerin her bölge için çözümünün varlığı ve tekliği gösterilecektir. Ayrıca çevirme operatörünün çekirdeğinin sağladığı özellikler incelenecektir. Bunun için ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanacaktır. Şimdi $U(x,\rho)$ çözümünü

$$U(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\rho t} dt \tag{8}$$

şeklinde arayalım. (8) ifadesi (7) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\rho t} dt = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \\ &+ \int_0^x \frac{\sin\rho(x-\xi)}{\rho} q(\xi) \left[Ae^{i\rho\xi} + Be^{-i\rho\xi} + \int_{-\xi}^{\xi} K(\xi,\mu)\, e^{i\rho\mu} d\mu \right] d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Ohalde

$$\begin{aligned}\int\limits_{-x}^{x} K(x,t)\,e^{i\rho t}dt &= \int\limits_{0}^{x} \frac{e^{i\rho(x-\xi)}-e^{-i\rho(x-\xi)}}{2i\rho} q(\xi)\left[Ae^{i\rho\xi}+Be^{-i\rho\xi}+\int\limits_{-\xi}^{\xi} K(\xi,\mu)\,e^{i\rho\mu}d\mu\right]d\xi \\ &= A\int\limits_{0}^{x} \frac{e^{i\rho x}-e^{-i\rho(x-2\xi)}}{2i\rho} q(\xi)\,d\xi + B\int\limits_{0}^{x} \frac{e^{i\rho(x-2\xi)}-e^{-i\rho x}}{2i\rho} q(\xi)\,d\xi+ \\ &+\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{-\xi}^{\xi} \frac{e^{i\rho(x-\xi+\mu)}-e^{-i\rho(x-\xi-\mu)}}{2i\rho} K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi \\ &= \frac{A}{2}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{-x+2\xi}^{x} e^{i\rho t}q(\xi)\,dtd\xi + \frac{B}{2}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{-x}^{x-2\xi} e^{i\rho t}q(\xi)\,dtd\xi+ \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\int\limits_{-\xi}^{\xi}\int\limits_{-x+\xi+\mu}^{x-\xi+\mu} e^{i\rho t}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,dtd\mu d\xi\end{aligned}$$

şeklinde yazarız. Yukardaki integrallerde gerekli bölge dönüşümlerini yaparsak

$$I_1 = \int\limits_{0}^{x}\int\limits_{-x+2\xi}^{x} e^{i\rho t}q(\xi)\,dtd\xi = \int\limits_{-x}^{x}\int\limits_{0}^{\frac{x+t}{2}} e^{i\rho t}q(\xi)\,d\xi dt$$

$$I_2 = \int\limits_{0}^{x}\int\limits_{-x}^{x-2\xi} e^{i\rho t}q(\xi)\,dtd\xi = \int\limits_{-x}^{x}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}} e^{i\rho t}q(\xi)\,d\xi dt$$

$$I_3 = \int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right)e^{i\rho t}dt + \int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi} K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right)e^{i\rho t}dt$$

şeklinde elde edilir. Burada $\mu > \xi$ için $K(\xi,\mu) = 0$ dır. Ohalde

$$\begin{aligned}\int\limits_{-x}^{x} K(x,t)\,e^{i\rho t}dt &= \frac{A}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left[\int\limits_{0}^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)\,d\xi\right]e^{i\rho t}dt + \frac{B}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left[\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)\,d\xi\right]e^{i\rho t}dt+ \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left[\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right]e^{i\rho t}dt+ \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left[\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi} K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right]e^{i\rho t}dt\end{aligned}$$

ise

$$\int\limits_{-x}^{x}\left(K(x,t)-\frac{A}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x+t}{2}}q(\xi)\,d\xi-\frac{B}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}q(\xi)\,d\xi-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right)e^{i\rho t}dt=0$$

olur. Burada

$$A(x,t)=K(x,t)-\frac{A}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x+t}{2}}q(\xi)\,d\xi-\frac{B}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}q(\xi)\,d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi$$

alınırsa

$$\int\limits_{-x}^{x}A(x,t)\,e^{i\rho t}dt=0$$

olur.

$$\tilde{A}(x,t)=\begin{cases}0 & -\infty<t<x\\ A(x,t) & -x<t<x\\ 0 & x<t<+\infty\end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlarsak

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{A}(x,t)\,e^{i\rho t}dt=0$$

yazılabilir. Son eşitlik $\tilde{A}(x,t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür. Fourier dönüşümünün birebirliğinden

$$\tilde{A}(x,t)=0$$

yani

$$A(x,t)=0$$

dır. Ohalde

$$K(x,t)=\frac{A}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x+t}{2}}q(\xi)\,d\xi+\frac{B}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}q(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}K(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\quad,\qquad -x<t<x$$

olarak elde edilir.

Şimdi

$$\sigma(x) = \int_0^x |q(\xi)|\, d\xi$$

ve

$$\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma(t)\, dt$$

şeklinde tanımlansın. Burada

1- $\sigma(x)$ ve $\sigma_1(x)$ artan fonksiyonlardır.

2- $\sigma_1(x) = \int_0^x \sigma(t)\, dt = \int_0^x \int_0^t |q(s)|\, ds dt = \int_0^x \int_s^x |q(s)|\, dt ds = \int_0^x (x-s)\, |q(s)|\, ds$

olur. Dolayısıyla

$$\sigma_1(x) = \int_0^x (x-s)\, |q(s)|\, ds$$

elde edilir.

$$K_0(x,t) = \frac{A}{2} \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)\, d\xi + \frac{B}{2} \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)\, d\xi$$

ve

$$K_m(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x-t}{2}} \int_{-\xi}^{t+x-\xi} K_{m-1}(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\mu d\xi + \frac{1}{2} \int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int_{t-x+\xi}^{\xi} K_{m-1}(\xi,\mu)\, q(\xi)\, d\mu d\xi$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$ olacak şekilde

$$K(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} K_m(x,t)$$

serisini tanımlayalım. $\sum\limits_{m=0}^{\infty} K_m(x,t)$ serisinin düzgün yakınsak olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} |K_0(x,t)| &= \left| \frac{A}{2} \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi)\, d\xi + \frac{B}{2} \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi)\, d\xi \right| \le \frac{A}{2} \int_0^{\frac{x+t}{2}} |q(\xi)|\, d\xi + \frac{B}{2} \int_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\, d\xi \\ &\le \frac{A}{2} \int_0^x |q(\xi)|\, d\xi + \frac{B}{2} \int_0^x |q(\xi)|\, d\xi = \int_0^x |q(\xi)|\, d\xi = \frac{1}{2} C\sigma(x) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$|K_0(x,t)| \leq \frac{1}{2}C\sigma(x)$$

elde edilir. Burada $C = \dfrac{A+B}{2}$ dir.

$$\begin{aligned}|K_1(x,t)| &= \left|\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}}\int_{-\xi}^{t+x-\xi} K_0(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi + \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int_{t-x+\xi}^{\xi} K_0(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}}\int_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_0(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi + \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_0(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned}J_{11} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}}\int_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_0(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \leq \frac{C}{4}\int_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\int_{-\xi}^{t+x-\xi} d\mu d\xi \\ &= \frac{C}{4}\int_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\,(x+t)\,d\xi \leq \frac{C}{4}\sigma\left(\tfrac{x-t}{2}\right)\int_0^{\frac{x-t}{2}} (x+t)\,|q(\xi)|\,d\xi \\ &= \frac{C}{2}\sigma\left(\tfrac{x-t}{2}\right)\int_0^{\frac{x-t}{2}} \left(x-\tfrac{x-t}{2}\right)|q(\xi)|\,d\xi \leq \frac{C}{2}\sigma\left(\tfrac{x-t}{2}\right)\int_0^{\frac{x-t}{2}} (x-\xi)\,|q(\xi)|\,d\xi \\ &\leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int_0^{\frac{x-t}{2}} (x-\xi)\,|q(\xi)|\,d\xi\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}j_{12} &= \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_0(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \leq \frac{C}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\int_{t-x+\xi}^{\xi} d\mu d\xi \\ &= \frac{C}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)|\,\sigma(\xi)\,(x-t)\,d\xi \leq \frac{C}{4}\sigma(x)\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} (x-\xi)\,|q(\xi)|\,d\xi \\ &\leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} (x-\xi)\,|q(\xi)|\,d\xi\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}|K_1(x,t)| &\leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int_0^{\frac{x-t}{2}} (x-\xi)\,|q(\xi)|\,d\xi + \frac{C}{2}\sigma(x)\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} (x-\xi)\,|q(\xi)|\,d\xi \\ &\leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int_0^{x} (x-\xi)\,|q(\xi)|\,d\xi = \frac{1}{2}\sigma(x)\,\sigma_1(x)\end{aligned}$$

olduğundan

$$|K_1(x,t)| \leq \frac{C}{2}\sigma(x)\,\sigma_1(x)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|K_2(x,t)| &= \left| \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}} \int_{-\xi}^{t+x-\xi} K_1(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi + \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int_{t-x+\xi}^{\xi} K_1(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi \right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}} \int_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_1(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_1(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
j_{21} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}} \int_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_1(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \leq \frac{C}{4}\int_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)| \int_{-\xi}^{t+x-\xi} \sigma(\xi)\,\sigma_1(\xi)\,d\mu d\xi \\
&= \frac{C}{4}\int_0^{\frac{x-t}{2}} \sigma(\xi)\,\sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\,(x+t)\,d\xi \leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int_0^{\frac{x-t}{2}} \sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\left(x-\tfrac{x-t}{2}\right)d\xi \\
&\leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int_0^{\frac{x-t}{2}} \sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\,(x-\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
j_{22} &= \frac{1}{2}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \int_{t-x+\xi}^{\xi} |K_1(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \leq \frac{C}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)| \int_{t-x+\xi}^{\xi} \sigma(\xi)\,\sigma_1(\xi)\,d\mu d\xi \\
&= \frac{C}{4}\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \sigma(\xi)\,\sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\,(x-t)\,d\xi \leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int_{\frac{x-t}{2}}^{x} \sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\,(x-\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
|K_2(x,t)| &\leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}\sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\,(x-\xi)\,d\xi+\frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\sigma_1(\xi)\,|q(\xi)|\,(x-\xi)\,d\xi \\
&\leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{x}(x-s)\,\sigma_1(s)\,|q(s)|\,ds=\frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{x}\sigma_1(s)\,|q(s)|\int\limits_s^{x}d\xi ds \\
&= \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{x}\int\limits_0^{\xi}\sigma_1(s)\,|q(s)|\,dsd\xi=\frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{x}\sigma_1(\xi)\left[\int\limits_0^{\xi}|q(s)|\,ds\right]d\xi \\
&= \frac{C}{2}\sigma(x)\frac{[\sigma_1(x)]^2}{2}
\end{aligned}$$

veya

$$|K_2(x,t)|\leq\frac{C}{2}\sigma(x)\frac{[\sigma_1(x)]^2}{2}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
|K_3(x,t)| &= \left|\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}K_2(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}K_2(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}|K_2(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}|K_2(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned}
j_{31} &= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}|K_2(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi\leq\frac{C}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}|q(\xi)|\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}\frac{1}{2}\sigma(\xi)\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}d\mu d\xi \\
&\leq \tfrac{C}{4}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}|q(\xi)|\,\sigma(\xi)\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}(x+t)\,d\xi=\frac{C}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}|q(\xi)|\,\sigma(\xi)\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}\left(x-\tfrac{x-t}{2}\right)d\xi \\
&\leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}|q(\xi)|\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}(x-\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
j_{32} &= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}|K_2(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi \\
&= \frac{C}{4}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}|q(\xi)|\,\sigma(\xi)\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}(x-t)\,d\xi \\
&\leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}|q(\xi)|\,(x-\xi)\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}d\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Ohalde

$$
\begin{aligned}
|K_3(x,t)| &\leq \frac{C}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)|\,[\sigma_1(\xi)]^2\,(x-\xi)\,d\xi \\
&+\frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)|\,(x-\xi)\,\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}d\xi \\
&= \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{x}(x-\xi)\,\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}\,|q(\xi)|\,ds \\
&= \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{x}\int\limits_s^{x}\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}\,|q(\xi)|\,dsd\xi \\
&= \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{x}\int\limits_0^{\xi}\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}\,|q(\xi)|\,dsd\xi \\
&= \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{x}\frac{[\sigma_1(\xi)]^2}{2}\left[\int\limits_0^{\xi}|q(s)|\,ds\right]d\xi \\
&= \frac{C}{2}\sigma(x)\,\frac{[\sigma_1(x)]^3}{3!}
\end{aligned}
$$

ise

$$|K_3(x,t)| \leq \frac{C}{2}\sigma(x)\,\frac{[\sigma_1(x)]^3}{3!}$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelimki

$$|K_m(x,t)| \leq \frac{C}{2}\sigma(x)\,\frac{[\sigma_1(x)]^m}{m!}$$

olsun. Gösterelim ki

$$|K_{m+1}(x,t)| \leq \frac{C}{2}\sigma(x)\,\frac{[\sigma_1(x)]^{m+1}}{(m+1)!}$$

dir.

$$
\begin{aligned}
|K_{m+1}(x,t)| &= \left|\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} K_m(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi} K_m(\xi,\mu)\,q(\xi)\,d\mu d\xi\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi} |K_m(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi + +\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi} |K_m(\xi,\mu)|\,|q(\xi)|\,d\mu d\xi
\end{aligned}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
j_{m1} &= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}\left|K_m(\xi,\mu)\right|\left|q(\xi)\right|d\mu d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\left|q(\xi)\right|\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}\left|K_m(\xi,\mu)\right|d\mu d\xi \\
&\leq \frac{C}{4}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\left|q(\xi)\right|\int\limits_{-\xi}^{t+x-\xi}\sigma(\xi)\frac{\left[\sigma_1(\xi)\right]^m}{m!}d\mu d\xi = \frac{C}{4}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\left|q(\xi)\right|\sigma(\xi)\frac{\left[\sigma_1(\xi)\right]^m}{m!}(x+t)\,d\xi \\
&= \frac{C}{2}\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\left|q(\xi)\right|\sigma(\xi)\frac{\left[\sigma_1(\xi)\right]^m}{m!}\left(x-\tfrac{x-t}{2}\right)d\xi \\
&\leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_{0}^{\frac{x-t}{2}}\left|q(\xi)\right|\frac{\left[\sigma_1(\xi)\right]^m}{m!}(x-\xi)\,d\xi
\end{aligned}
$$

olur. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
j_{m2} &= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}\left|K_m(\xi,\mu)\right|\left|q(\xi)\right|d\mu d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\left|q(\xi)\right|\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}\left|K_m(\xi,\mu)\right|d\mu d\xi \\
&\leq \frac{C}{4}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\left|q(\xi)\right|\int\limits_{t-x+\xi}^{\xi}\sigma(\xi)\frac{\left[\sigma_1(\xi)\right]^m}{m!}d\mu d\xi \\
&= \frac{C}{4}\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\left|q(\xi)\right|\sigma(\xi)\frac{\left[\sigma_1(\xi)\right]^m}{m!}(x-t)\,d\xi \\
&\leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x}\left|q(\xi)\right|\frac{\left[\sigma_1(\xi)\right]^m}{m!}(x-\xi)\,d\xi
\end{aligned}
$$

dir. Ohalde

$$\begin{aligned}
|K_{m+1}(x,t)| \leq {} & \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}} |q(\xi)| \frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}(x-\xi)\,d\xi + \\
& + \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{x} |q(\xi)| \frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}(x-\xi)\,d\xi \\
& \leq \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^x (x-\xi)|q(\xi)| \frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}d\xi \\
& = \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^x |q(\xi)| \frac{[\sigma_1(\xi)]^m}{m!}\int\limits_s^x d\xi ds \\
& = \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^x\int\limits_0^{\xi} |q(\xi)|[\sigma_1(\xi)]^m\,ds d\xi \\
& = \frac{C}{2}\sigma(x)\int\limits_0^x [\sigma_1(\xi)]^m \left[\int\limits_0^{\xi}|q(s)|\,ds\right]d\xi \\
& = \frac{C}{2}\sigma(x)\frac{[\sigma_1(x)]^{m+1}}{m+1} = \frac{C}{2}\sigma(x)\frac{[\sigma_1(x)]^{m+1}}{(m+1)!}
\end{aligned}$$

ise

$$|K_{m+1}(x,t)| \leq \frac{C}{2}\sigma(x)\frac{[\sigma_1(x)]^{m+1}}{(m+1)!}$$

elde edilir. Bu ise tümevarımdan

$$\forall\ m \text{ için } |K_m(x,t)| \leq \frac{C}{2}\sigma(x)\frac{[\sigma_1(x)]^m}{m!}$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$K(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty} K_m(x,t) \text{ ve } |K(x,t)| \leq \frac{C}{2}\sigma(x)\exp[\sigma_1(x)]$$

şeklinde elde edilir.

2.3. Çevirme Operatörünün Özellikleri

(1) denklem sisteminin çözümü 2.2 alt bölümünde

$$U(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int\limits_{-x}^{x} K(x,t)\,e^{i\rho t}dt$$

şeklinde verilmiştir. Ohalde

$$U'(x,\rho)=i\rho Ae^{i\rho x}-i\rho Be^{-i\rho x}+K(x,x)e^{i\rho x}-K(x,-x)e^{-i\rho x}+\int\limits_{-x}^{x}K_x(x,t)e^{i\rho t}dt$$

ve

$$\begin{aligned}U''(x,\rho)=&-\rho^2Ae^{i\rho x}-\rho^2Be^{-i\rho x}+\frac{dK(x,x)}{dx}e^{i\rho x}+i\rho K(x,x)e^{i\rho x}-\\&-\frac{dK(x,-x)}{dx}e^{-i\rho x}+i\rho K(x,-x)e^{-i\rho x}+K_x(x,t)\mid_{t=x}e^{i\rho x}-\\&-K_x(x,t)\mid_{t=-x}e^{-i\rho x}+\int\limits_{-x}^{x}K_{xx}(x,t)e^{i\rho t}dt\end{aligned}$$

şeklindedir. Şimdi bu ifadeleri

$$-U''(x,\rho)+q(x)U(x,\rho)=\lambda U(x,\rho)$$

denkleminde yerine yazalım. Ohalde

$$\begin{aligned}&\rho^2Ae^{i\rho x}+\rho^2Be^{-i\rho x}-\frac{dK(x,x)}{dx}e^{i\rho x}-i\rho K(x,x)e^{i\rho x}\\&+\frac{dK(x,-x)}{dx}e^{-i\rho x}-i\rho K(x,-x)e^{-i\rho x}-K_x(x,t)\mid_{t=x}e^{i\rho x}\\&+K_x(x,t)\mid_{t=-x}e^{-i\rho x}-\int\limits_{-x}^{x}K_{xx}(x,t)e^{i\rho t}dt+Aq(x)e^{i\rho x}\\&+Bq(x)e^{-i\rho x}+\int\limits_{-x}^{x}q(x)K(x,t)e^{i\rho t}dt\\&=A\rho^2e^{i\rho x}+B\rho^2e^{-i\rho x}+\rho^2\int\limits_{-x}^{x}K(x,t)e^{i\rho t}dt\end{aligned}$$

ise

$$\begin{aligned}&-\frac{dK(x,x)}{dx}e^{i\rho x}-i\rho K(x,x)e^{i\rho x}+\frac{dK(x,-x)}{dx}e^{-i\rho x}-i\rho K(x,-x)e^{-i\rho x}\\&-K_x(x,t)\mid_{t=x}e^{i\rho x}+K_x(x,t)\mid_{t=-x}e^{-i\rho x}-\int\limits_{-x}^{x}K_{xx}(x,t)e^{i\rho t}dt+Aq(x)e^{i\rho x}\\&+Bq(x)e^{-i\rho x}+\int\limits_{-x}^{x}q(x)K(x,t)e^{i\rho t}dt=\rho^2\int\limits_{-x}^{x}K(x,t)e^{i\rho t}dt\end{aligned}$$

olur. Öteyandan $\rho^2 \int\limits_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\rho t} dt$ integralinde iki kez kısmi integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
\rho^2 \int\limits_{-x}^{x} K(x,t)\, e^{i\rho t} dt &= -i\rho \int\limits_{-x}^{x} K(x,t) \left(e^{i\rho t}\right)' dt \\
&= -i\rho \left[K(x,t)\, e^{i\rho t} \mid_{-x}^{x} - \int\limits_{-x}^{x} K_t(x,t)\, e^{i\rho t} dt \right] \\
&= -i\rho K(x,x)\, e^{i\rho x} + i\rho K(x,-x)\, e^{-i\rho x} + \int\limits_{-x}^{x} K_t(x,t) \left(e^{i\rho t}\right)' dt \\
&= -i\rho K(x,x)\, e^{i\rho x} + i\rho K(x,-x)\, e^{-i\rho x} + K_t(x,t) \mid_{t=x} e^{i\rho x} \\
&\quad -K_t(x,t) \mid_{t=-x} e^{-i\rho x} - \int\limits_{-x}^{x} K_{tt}(x,t)\, e^{i\rho t} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&-\frac{dK(x,x)}{dx} e^{i\rho x} - i\rho K(x,x)\, e^{i\rho x} + \frac{dK(x,-x)}{dx} e^{-i\rho x} - i\rho K(x,-x)\, e^{-i\rho x} \\
&-K_x(x,t) \mid_{t=x} e^{i\rho x} + K_x(x,t) \mid_{t=-x} e^{-i\rho x} - \int\limits_{-x}^{x} K_{xx}(x,t)\, e^{i\rho t} dt \\
&+Aq(x)\, e^{i\rho x} + Bq(x)\, e^{-i\rho x} + \int\limits_{-x}^{x} q(x)\, K(x,t)\, e^{i\rho t} dt \\
&= -i\rho K(x,x)\, e^{i\rho x} + i\rho K(x,-x)\, e^{-i\rho x} + K_t(x,t) \mid_{t=x} e^{i\rho x} - \\
&-K_t(x,t) \mid_{t=-x} e^{-i\rho x} - \int\limits_{-x}^{x} K_{tt}(x,t)\, e^{i\rho t} dt
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{gathered}
K_{xx}(x,t) - q(x)\, K(x,t) = K_{tt}(x,t) \\
-2\frac{dK(x,x)}{dx} + Aq(x) = 0 \\
2\frac{dK(x,-x)}{dx} + Bq(x) = 0 \\
K(x,-x) = 0
\end{gathered}$$

elde edilir.

3. ÖZDEĞER VE NORMALLEŞTİRİCİ SAYILARIN DAVRANIŞLARI

$(1)-(2)$ problemi için

$$U(x,\rho) = \frac{\sqrt{\kappa(0)}}{2} e^{i\rho x} - \frac{\sqrt{\kappa(0)}}{2} e^{-i\rho x} + \int\limits_{0}^{x} \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q(t)\, U(t,\rho)\, dt$$

çözümü elde edilir. Burada $A=\frac{\sqrt{\kappa\left(0\right)}}{2}$ ve $B=-\frac{\sqrt{\kappa\left(0\right)}}{2}$ olarak alırsak

$$U\left(x,\rho\right)=Ae^{i\rho x}+Be^{-i\rho x}+\int\limits_{0}^{x}\frac{\sin\rho\left(x-t\right)}{\rho}q\left(t\right)U\left(t,\rho\right)dt$$

ve 2.2 alt bölümünde gösterildiği gibi

$$U\left(x,\rho\right)=Ae^{i\rho x}+Be^{-i\rho x}+\int\limits_{-x}^{x}K\left(x,t\right)e^{i\rho t}dt$$

olur.

$$y_1\left(\pi\right)=0\ ,\ \Delta\left(\rho\right)=U\left(\pi,\rho\right)=y_1\left(\pi\right)=0$$

ise

$$\Delta\left(\rho\right)=Ae^{i\rho\pi}+Be^{-i\rho\pi}+\int\limits_{-\pi}^{\pi}K\left(\pi,t\right)e^{i\rho t}dt=0$$

olur. Buradan

$$\Delta\left(\rho\right)=Ae^{i\rho\pi}+Be^{-i\rho\pi}+\int\limits_{0}^{\pi}K\left(\pi,t\right)e^{i\rho t}dt+\int\limits_{0}^{\pi}K\left(\pi,-t\right)e^{-i\rho t}dt=0$$

ise

$$\frac{\sqrt{\kappa\left(0\right)}}{2}e^{i\rho\pi}-\frac{\sqrt{\kappa\left(0\right)}}{2}e^{-i\rho\pi}+\int\limits_{0}^{\pi}K\left(\pi,t\right)e^{i\rho t}dt+\int\limits_{0}^{\pi}K\left(\pi,-t\right)e^{-i\rho t}dt=0$$

ve

$$i\sqrt{\kappa\left(0\right)}\sin\rho\pi+\int\limits_{0}^{\pi}K\left(\pi,t\right)e^{i\rho t}dt+\int\limits_{0}^{\pi}K\left(\pi,-t\right)e^{-i\rho t}dt=0$$

burandan

$$\sin\rho\pi+\frac{1}{i\sqrt{\kappa\left(0\right)}}\int\limits_{0}^{\pi}K\left(\pi,t\right)e^{i\rho t}dt+\frac{1}{i\sqrt{\kappa\left(0\right)}}\int\limits_{0}^{\pi}K\left(\pi,-t\right)e^{-i\rho t}dt=0$$

ise

$$\Delta\left(\rho\right)=\sin\rho\pi+K\left(\rho\right)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} K(\rho) &= \frac{1}{i\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^{\pi} K(\pi,t)\, e^{i\rho t}dt + \frac{1}{i\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^{\pi} K(\pi,-t)\, e^{-i\rho t}dt \\ &= \frac{1}{i\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^{\pi} K(\pi,t)\left[\cos\rho t + i\sin\rho t\right]dt + \\ &+ \frac{1}{i\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^{\pi} K(\pi,-t)\left[\cos(-\rho t) + i\sin(-\rho t)\right]dt \\ &= \frac{1}{i\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^{\pi} \left[K(\pi,t) + K(\pi,-t)\right]\cos\rho t + \\ &+ \frac{1}{i\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^{\pi} \left[K(\pi,t) - K(\pi,-t)\right]\sin\rho t dt \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\Gamma_n = \left\{\lambda \mid |\lambda| = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}, n\in N$$

bölgesi tanımlansın.

$$\Delta(\rho) = f(\rho) + g(\rho)\ \ ,\ f(\rho) = \sin\rho\pi\ ,\ g(\rho) = K(\rho)$$

yazılabilir.

$$|\sin\rho\pi| = \left|\frac{e^{i\rho\pi} - e^{-i\rho\pi}}{2i}\right| \geq \frac{\left|e^{i\rho\pi}\right| - \left|e^{-i\rho\pi}\right|}{2}$$

$$= \frac{e^{-|\mathrm{Im}\,\rho|\pi} - e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}}{2} \geq \frac{1}{2}e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}$$

ise

$\rho\in G = \{\rho \mid |\rho - k| \geq \delta,\ k\geq 0\}$, $\delta > 0$ bölgesinde

$$|\sin\rho\pi| \geq c_\delta e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}$$

eşitsizliği geçerli olacak şekilde c_δ sayısı vardır.

$$\begin{cases} |\cos\rho\pi| \leq e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi} \\ |\sin\rho\pi| \leq e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi} \end{cases}$$

olduğundan

$$|g(\rho)| \leq c.e^{|\mathrm{Im}\,\rho|\pi}$$

yazılır.

Dolayısıyla n ler yeterince büyük olmak üzere $\lambda\in\Gamma_n$ için

$$|f(\rho)| > |g(\rho)|$$

yazılır. Ohalde Rouche teoreminden

$$f(\rho) = \sin \rho\pi$$

fonksiyonunun sıfırlarının sayısı ile $\Delta(\rho)$ nin Γ_n içindeki sıfırlarının sayısı aynıdır yani $(n+1)$ tanedir. Böylece $|\lambda| < \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$ çemberinde verilen L probleminin $\lambda_0, \lambda_1, .., \lambda_n$ olmak üzere tam olarak $(n+1)$ tane özdeğeri vardır.

$$\Delta_0(\rho) = \sin \rho\pi = 0$$

ise

$$\rho_n \pi = n\pi$$

buradanda

$$\rho_n = n$$

yani

$$\rho_n = n + \epsilon_n \quad , \quad \epsilon_n = \circ(1) \quad , \; n \to \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta\left(\rho_n^2\right) \\ &= \sin(n + \epsilon_n)\pi + K(\rho_n) \end{aligned}$$

ise

$$\sin n\pi \cos \epsilon_n \pi + \cos n\pi \sin \epsilon_n \pi + K(\rho_n) = 0$$

olur. Buradan

$$(-1)^n \sin \epsilon_n \pi + K(\rho_n) = 0$$

ise

$$n \to \infty \text{ iken } \epsilon_n \to 0 \text{ olduğundan } \epsilon_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} K(\rho_n)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$\epsilon_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{i\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^\pi [K(\pi,t)+K(\pi,-t)]\cos\rho_n t dt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^\pi [K(\pi,t)-K(\pi,-t)]\sin\rho_n t dt\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{i\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^\pi [K(\pi,t)+K(\pi,-t)]\cos(n+\epsilon_n) t dt + \right.$$
$$\left. \frac{1}{\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^\pi [K(\pi,t)-K(\pi,-t)]\sin(n+\epsilon_n) t dt\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{i\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^\pi [K(\pi,t)+K(\pi,-t)](\cos nt\cos\epsilon_n t - \sin nt\sin\epsilon_n t) dt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^\pi [K(\pi,t)-K(\pi,-t)](\sin nt\cos\epsilon_n t + \cos nt\sin\epsilon_n t) dt\right)$$

olur. Dolayısıyla

$$\epsilon_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left[\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^\pi \hat{K}(\pi,t)\cos ntdt + \frac{1}{\sqrt{K(0)}}\int_0^\pi \check{K}(\pi,t)\sin ntdt\right]$$
$$+\delta_n \quad ,\delta_n \in l_2$$

şeklindedir. Burada

$$\hat{K}(\pi,t) = K(\pi,t) + K(\pi,-t)$$

ve

$$\check{K}(\pi,t) = K(\pi,t) - K(\pi,-t)$$

dir. Ayrıca $\hat{K}(\pi,t) \in L_2(0,\pi)$, $\check{K}(\pi,t) \in L_2(0,\pi)$ olduğundan

$$\int_0^\pi \hat{K}(\pi,t)\cos ntdt \in l_2$$

ve

$$\int_0^\pi \check{K}(\pi,t)\sin ntdt \in l_2$$

olur. Böylece

$$\rho_n = n + \epsilon_n \ , \ \epsilon_n = \circ(1) \ , \ n \to \infty$$

ve

$$\epsilon_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left[\frac{1}{i\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}\hat{K}(\pi,t)\cos ntdt + \frac{1}{\sqrt{K(0)}}\int_0^{\pi}\check{K}(\pi,t)\sin ntdt\right]$$
$$+O(\epsilon_n t)\ ,\ \epsilon_n \to 0\ ,\ \epsilon_n \in l_2$$

dir.

Şimdi α_n normalleştirici sayımızı hesaplayalım. $\alpha_n = \int_0^{\pi}\varphi^2(x,\rho_n)\,dx$ idi. Bu sayımızı hesaplamak için gerekli hazırlıklarımızı yapalım.

$$\varphi(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + \int_{-x}^{x}K(x,t)\,e^{i\rho t}dt$$

ifadesinde bir kez kismi integrasyon yapılırsa

$$\varphi(x,\rho) = Ae^{i\rho x} + Be^{-i\rho x} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

yazılabilir.$A = \frac{\sqrt{\kappa(0)}}{2}$ ve $B = -\frac{\sqrt{\kappa(0)}}{2}$ olmak üzere

$$\varphi(x,\rho_n) = Ae^{i\rho_n x} + Be^{-i\rho_n x} + O\left(\frac{1}{\rho_n}\right)$$

$$\begin{aligned}
\varphi^2(x,\rho_n) = {} & \frac{\kappa(0)}{4}e^{2i\rho_n x} + \frac{\kappa(0)}{4}e^{-2i\rho_n x} - \frac{\kappa(0)}{2} + \sqrt{\kappa(0)}e^{i\rho_n x}O\left(\tfrac{1}{\rho_n}\right) \\
& -\sqrt{\kappa(0)}e^{-i\rho_n x}O\left(\tfrac{1}{\rho_n}\right) + \left[O\left(\tfrac{1}{\rho_n}\right)\right]^2 \\
= {} & \frac{\kappa(0)}{4}e^{2i\rho_n x} + \frac{\kappa(0)}{4}e^{-2i\rho_n x} - \frac{\kappa(0)}{2} + \sqrt{\kappa(0)}e^{i\rho_n x}\left[\frac{b}{\rho_n} + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)\right] - \\
& -\sqrt{\kappa(0)}e^{-i\rho_n x}\left[\frac{b}{\rho_n} + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right) \\
= {} & \frac{\kappa(0)}{4}e^{2i\rho_n x} + \frac{\kappa(0)}{4}e^{-2i\rho_n x} - \frac{\kappa(0)}{2} + \frac{\sqrt{\kappa(0)}b}{\rho_n}e^{i\rho_n x} \\
& -\frac{\sqrt{\kappa(0)}b}{\rho_n}e^{-i\rho_n x} + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Ohalde

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2 (x, \rho_n)\, dx$$

$$= \int_0^\pi [\frac{\kappa(0)}{4} e^{2i\rho_n x} + \frac{\kappa(0)}{4} e^{-2i\rho_n x} - \frac{\kappa(0)}{2} + \frac{\sqrt{\kappa(0)} b}{\rho_n} e^{i\rho_n x}$$

$$-\frac{\sqrt{\kappa(0)} b}{\rho_n} e^{-i\rho_n x} + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)] dx$$

$$= [\frac{\kappa(0)}{8i\rho_n} e^{2i\rho_n x} - \frac{\kappa(0)}{8i\rho_n} e^{-2i\rho_n x} - \frac{\kappa(0)}{2} x +$$

$$+\frac{\sqrt{\kappa(0)} b}{i\rho_n^2} e^{i\rho_n x} + \frac{\sqrt{\kappa(0)} b}{i\rho_n^2} e^{-i\rho_n x}] \mid_0^\pi + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

$$= \frac{\kappa(0)}{8i\rho_n} e^{2i\rho_n \pi} - \frac{\kappa(0)}{8i\rho_n} e^{-2i\rho_n \pi} - \frac{\kappa(0)}{2} \pi +$$

$$+\frac{\sqrt{\kappa(0)} b}{i\rho_n^2} e^{i\rho_n \pi} + \frac{\sqrt{\kappa(0)} b}{i\rho_n^2} e^{-i\rho_n \pi} - \frac{2\sqrt{\kappa(0)} b}{i\rho_n^2} + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

$$+\frac{\sqrt{\kappa(0)} b}{i\rho_n^2} e^{i\rho_n \pi} + \frac{\sqrt{\kappa(0)} b}{i\rho_n^2} e^{-i\rho_n \pi} - \frac{2\sqrt{\kappa(0)} b}{i\rho_n^2} + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

$$= \frac{\kappa(0)}{4\rho_n} \sin 2\rho_n \pi - \frac{\kappa(0)}{2} \pi + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon_n \pi + O\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} [\sin 2n\pi \cos 2\varepsilon_n \pi + \cos 2n\pi \sin 2\varepsilon_n \pi] + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\varepsilon_n \pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_n}{n}}} \sin 2\varepsilon_n \pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_n}{n} \pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon_n}{n} + \frac{\varepsilon_n^2}{n^2} - \cdots\right] \left[2\varepsilon_n \pi - \frac{(2\varepsilon_n \pi)^3}{3!} + \frac{(2\varepsilon_n \pi)^5}{5!} - \cdots\right]$$

elde edilir. Yani

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{1}{i\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^\pi \hat{K}(\pi,t)\cos ntdt + \frac{1}{\sqrt{\kappa(0)}}\int_0^\pi \check{K}(\pi,t)\sin ntdt + O(\epsilon_n t)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{K_n}{n} + \delta_n$$

şekilnde elde edilir. Burada K_n sınırlı dizi ve $\delta_n \in l_2$dir.

References

[1] Marchenko, V.A.,Sturm-Liouville Operators and their Applications, Kiev: Naukova Dumka, 1977, (Endl. Transl. 1986 (Basel: Birkhauser)).

[2] Freiling, G. and Yurko, V.A., Inverse problems for differential equations with turning points, Inverse Problems, 13 (1997), 1247-1263.

[3] Freiling G. and Yurko A.A.,Inverse spectral problems for differential equations on the half-line with turning points, J. Diff. Equations, 154 (1999), 419-453.

[4] Yurko, V.A., Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications, New York: Gordon & Breach, 1999.

[5] Yurko, V.A., On higher-order differential operators with a singular point, Inverse problems, 9 (1993), 495-502.

[6] Freiling, G. And Yurko, V.A.,On constructing differential equations with singularities from incomplete spectral information, Inverse Problems 14 81998), 1131-1150.

[7] Freiling, G. And Yurko, V.A.,Reconstructing parameters of a medium from incomplete spectral information, Result in Matematics 35 (1999), 228-249.

[8] Yurko, V.A., Inverse problem for differential equations with a singularity, Differ. Uravreniya 28 (1992), no. 8, 1355-1362 (in Russian); English transl. İn Differ. Equations 28 (1992),1100-1107.

[9] Bellman, R. and Cook, K., Differential-difference Equations, Academic Press, New York,1963.

[10] Convay, J.B., Functions of One Complex Variable, 2nd ed., vol. I, Springer-Verlag, New York,1995.

[11] Levitan, B.M., Inverse Sturm-Liouville Problems, Moscow: Nauka, 1984, (Engl. Transl.1987 (Utrecth: VNU Science Press)).