Yönetim, Yıl: 18, Sayı: 56, Şubat 2007

STOKASTİK (R,s,S) ve STOKASTİK (R,S) STOK KONTROL POLİTİKALARININ POLİÜRETAN SEKTÖRÜNDE MARKOV KARAR SÜRECİ YARDIMIYLA KARŞILAŞTIRILMASI

Doç. Dr. Necdet ÖZÇAKAR

Arş. Grv. İbrahim Zeki AKYURT

İstanbul Üniversitesi - İşletme Fakültesi

Üretim Yönetimi Anabilim Dalı

Bu çalışmada, olasılıklı stok politikaları tanıtılarak bunlardan periyodik gözden geçirmeye dayalı (R,s,S) stok politikasının Markov zinciri ve Markov karar süreci özelliği taşıdığı ispatlanmış, ardından bu politika; benzer özellikleri taşıyan (R,S) stok politikasıyla maliyetler açısından karşılaştırılmıştır. Türkiye'de poliüretan alanında faaliyet gösteren uluslar arası bir firmanın MDI (Metilendifenil Diizosiyanat) hammaddesine ait verileri toplanmış ve bu stok kalemine ait talebin olasılıklı yapısı incelenmiştir. (R,s,S) stok politikasına uygun biçimde, durum uzayı tanımlanarak ve geçiş olasılıkları hesaplanarak Markov zinciri oluşturulmuştur. Bu politika, stok kaleminin maliyet fonksiyonu ile Markov karar problemi olarak gösterilmiş ve birim zamanda beklenen ortalama maliyet bu doğrultuda bulunmuştur. Ardından firmanın stok politikası olan (R,S) modeline aynı işlemler uygulanarak, maliyetler karşılaştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Stokastik Stok kontrolü, (R,s,S) politikası, (R,S) politikası, Markov zinciri, Markov karar süreci, Poliüretan, Metilendifenil Diizosiyanat.

COMPARISON of STOCHASTIC (R,s,S) and STOCHASTIC (R,S) INVENTORY POLICIES in POLYURETHANE SECTOR ACCORDING to the MARKOV DECISION PROCESS

In this study, probabilistic inventory policies are introduced and it has been proved that the (R,s,S) inventory policy based on periodical revision shows Markov chain and Markov decision process characteristics. Thereafter, this policy has been compared with the (R,S) inventory policy which has similar features with the mentioned inventory policy, in terms of costs. The data of an international firm which operates in Turkey in the area of polyurethane, related to the raw material of MDI (methylenediphenyl diisosiyanathe) has been collected and the probabilistic structure of the demand related to this inventory item has been analyzed. The state space has been defined according to the (R,s,S) inventory policy, and the Markov chain has been formed by calculating the probabilities of transition. This policy has been shown as a problem of Markov decision, with the cost function of inventory item, and the expected avarage cost for a time unit has been found. Lastly, same processes have been applied to the (R,S) model which is the actual inventory policy of the mentioned firm, and the costs have been compared.

Key Words: Stochastic inventory control, (R,s,S) policy, (R,S) policy, Markov chain, Markov decision process, polyurethane, methylenediphenyl diisosiyanathe.

GİRİŞ

İşletmeler, hayatın her safhasında olduğu gibi sürekli olarak karar problemleriyle karşı karşıyadırlar. Karar verme; belirli (deterministik), riskli (stokastik - olasılıklı) ve belirsiz ortamlar içinden herhangi birinde gerçekleştirilir. Çalışmada gerçeğe en yakın olan riskli ortam baz alınmıştır. Riskli ortamın varlığı, birden çok durumun var olmasına, bu durumların gerçekleşme olasılıklarının tam olarak belirlenebilmesine bağlıdır (Baray, 1993; 2). Yönetici, amaca ulaşmak için bu durumlara ait alternatif hareketler arasından rasyonel olanını seçerek karar verme işlemini gerçekleştirmiş olur. Tabii ki bu işlemi gerçekleştirirken, uygun verilerin toplanması ve bunların iyi bir şekilde analiz edilmesi gerekmektedir. Ardından optimum hareket tarzının seçilerek bir karar alınması ve benzer davranışlar için politika oluşturulması da mümkün olmaktadır.

Üretim işletmeleri için stok sistemlerinin belirlenmesi ve stok kontrol politikalarının oluşturulması her aşamada önem taşımaktadır. Bu politikaların temel amacı; gereksinimleri karşılayacak stok miktarlarının, üretimi aksatmadan ve müşteriyi bekletmeden optimum maliyetle elde bulundurulmasıdır. Mamul stoğu, üretimde olan yarı mamul stoğu, işlenmemiş hammadde stoğu hatta tamir ve bakım için gerekli olan yedek parça stoğu gibi farklı amaçlara hizmet eden stok kalemlerine yönelik farklı stok politikalarının oluşturulması gerekmektedir. Çalışmada, iki farklı stok kontrol politikası, işlenmemiş bir hammadde üzerinde incelenmiştir.

Stok kontrol politikasının belirlenmesi sadece üretim işletmeleri için değil tedarik zincirindeki tüm işletmeler için de önemli bir konudur. Zincirin optimizasyonunun bir ayağı da her aşama için, hangi stok kontrol politikası oluşturulacağı kararının verilmesidir. İşletmeler gereğinden fazla stok taşımak istemediklerinden karar verici, her bir stok kalemi için ne zaman ve ne kadar sipariş verilmesi gerektiğini belirleyerek stok kontrol modelini kurar. Modelin kuruluşu esnasında öne çıkan iki hedefi gerçekleştirmek ise zaruridir. İlk hedef, stoklanan mal miktarının en düşük düzeyde kalmasını sağlamak, ikinci hedef sipariş maliyetini minumum kılacak biçimde sipariş vermektir. Tabii ki iyi bir stok yönetimi, bu maliyetlerin yalnızca en küçüklenmesi olarak düşünülemez. Bunların dışında, belirli bir dönemin (periyodun) başında siparişi verilen stok kalemi, kendisine olan talebi karşılayamadığı zaman stok tükenmesi ortaya çıkar. Stok tükenmesi hammadde ile ilgiliyse üretim durur, bu da çalışanların ve makinelerin atıl kalmasına yani maliyete yol açar. Stok tükenmesi mamul ile ilgiliyse, ya talep bekletilir ya da müşteri kaybedilir. Burada oluşan maliyet ise potansiyel satışların getirisinin kaybı ile ortaya çıkar. Kısacası iyi bir stok yönetimi, hem maliyetleri düşürmeyi hem de kârı arttırmayı hedeflemelidir. Bu hedef doğrultusunda yapılan çalışmalarda stok kontrol modelleri bulunmuş ve kullanım alanları incelenmiştir. İlk olarak Wilson 1934 yılında kendi adıyla anılan tarihteki ilk stok kontrol modelini önermiştir. Sabit sipariş miktarının esas alındığı bu modelin üzerine birçok çalışma yapılarak farklı koşullar için farklı stok modelleri geliştirilmiştir. Bu türdeki modellerin dışında oluşturulan bir diğer stok kontrol modeli ise periyodik gözden geçirme modelidir (Sabit Sipariş Periyodu Sistemi). Bu modele göre stok sayımı veya gözden geçirme, belirli zaman aralıklarında yapılmaktadır. Genelde stok periyodik olarak veya sürekli olarak gözden geçirilir. Sürekli kontrole tabi bir kalem; barkod gibi sistemler yardımıyla her an miktar yönünden bilinmektedir ve bu yüzden yeniden sipariş noktasına gelindiğinde sipariş verilir. Periyodik gözden geçirmede ise her periyodun sonunda stok miktarına bakılır ve sipariş verilip verilmeyeceği eğer verilecekse ne kadar verileceği kararı alınır. Çalışmada ele alınan stok kontrol modeli periyodik gözden geçirmeye dayanmaktadır.

Bir diğer konu ise talebin yapısının incelenmesidir. Müşteri taleplerinin kesin olarak bilinmesi durumunda stok kontrol modeli deterministik, tersine durumda ise stokastik olarak adlandırılır. Stokastik bir modelde talep periyottan periyoda değişiklik gösterecektir; bu durumda, bulundurulan stok miktarının değişken yapıdaki talebi karşılaması beklenir. Markov zincirleri de bu tip dinamik yapılı problemlerin modellenmesindeki araçlardan birisidir.

Markov zincirleri ,1907 yılında A. A. Markov tarafından ortaya konmuştur. Literatürde Markov zincirleri birçok çalışmaya konu olmuştur (Taylor& Karlin,1984; Papoulis,1984; Doob, 1990; Hillier & Lieberman, 2000; Ross, 2003). Yapılan bu çalışmalarda, stok sistemini zincire uygun biçimde modelleme, stok seviyesini belirleme, üreticilerin üretim programlama ve planlama gibi risk altındaki durumları incelenmiştir. Markov zincirleri ayrıca kuyruk sistemlerinin tasarımı, optimizasyonu ve kontrolünde, üretim süreçlerinde, haberleşme ağlarında, güvenilirlik çalışmaları gibi alanlarda da kullanılmaktadır.

Markov karar süreci, stok problemlerinde en uygun politikayı belirlemeye yönelik çalışmalarda kullanılmaktadır. Lin, Yiu ve Johnson (2002), çalışmalarında stok kalemine ait, uzun dönemli beklenen maliyeti minimum kılan ve Markov süreci özelliği gösteren bir politikaya, dinamik programlamaya dayanarak ulaşmışlardır. Taha(2002), eserinde, Markov sürecine uyan sonsuz aşamalı bir modelin çözümünde; ayrıntılı sayma yöntemi, dinamik programlamaya dayalı politika yineleme yöntemi ve doğrusal programlama ile çözüm yöntemini kullanmıştır. Bu çalışma dahilinde sabitlenmiş (R,s,S) ve (R,S) politikalarının beklenen maliyetleri karşılaştırıldığından ayrıntılı sayma yöntemini kullanmak sakıncalı olmayacaktır.

1. STOK KONTROL MODELLERİ

Talebin belirli olduğu deterministik modeller, gerçek üretim ve dağıtım durumlarına uygun olmadığından, daha gerçekçi olan talebin durumunun net olarak bilinmediği olasılıklı modelleri incelemek yarar sağlayacaktır.

Karar verici, hangi modelin tercih edileceğinin seçimine geçmeden, stok kaleminin ehemmiyetini göz önüne almalıdır. Bu ise stoklar ABC tipi sınıflandırmaya tabi tutularak yapılabilir. A tipi stok kalemleri, işletme için en önemli olup tüm stoğun %20'sini meydana getirmekte, bunun yanında satış hacmininse %80'ini oluşturmaktadır. B tipinin, stoğun %30'unu, satış hacminin ise %15'ini; C tipinin de stoğun %50'sini ve satış hacminin ise %5'ini oluşturduğu söylenebilir (Silver, Pyke ve Peterson; 1998: 236). Tabii ki bu sınıflandırmanın amacı şirketin çabalarını en iyi sonuçların elde edileceği yöne yöneltmektir (Öztürk, 2004: 516).

Wilson'un formüle ettiği, klasik Ekonomik Sipariş Miktarı modelinin üzerine birçok çalışma yapılmış ve değişik stok kontrol modelleri ortaya çıkarılmıştır (Lin, Yiu ve Johnson; 2002,1401).

Aşağıda belirtilen stokastik stok modellerindeki ayrım; sipariş noktası, sipariş miktarı, stoğun gözden geçirme zamanı gibi unsurlar göz önünde bulundurularak yapılmıştır. "s" Yeniden sipariş noktasını, "Q" sabit sipariş miktarını, "R" stok kontrol-yeniden gözden geçirme-zamanını, "S" en yüksek stok düzeyini göstermektedir.

- (s,Q) Kontrol Modeli

"Sipariş-noktası, sipariş-miktarı" olarak anılan bu yöntemde, stoğun kontrolü süreklidir (R=0). Sabit miktardaki Q birim, *stok düzeyi* s veya altına indiğinde sipariş edilir (Silver, Pyke ve Peterson; 1998: 237).

- (s, S) Kontrol Modeli

Bu kontrol modelinde de aynı (s,Q) modelinde olduğu gibi stok düzeyi, s noktasının altına indiğinde sipariş verilir. Yine aynı şekilde sürekli gözlem söz konusudur. Ancak, sipariş miktarı değişkendir çünkü S düzeyine çıkana kadar sipariş verilir.

- (R,S) Kontrol Modeli

Bu yöntem genelde bilgisayar ortamında, stoğa ait anlık kayıtlarını tutmayan ve malzemeyi aynı tedarikçiden alan firmalar tarafından kullanılmaktadır. Her stok kontrolü belli bir zaman diliminin ardından gerçekleşir. Her gözlem noktasında sipariş, stok S birime kadar yükseltilecek miktarda verilerek stok ikmali yapılır.

- (R, s, S) Kontrol Modeli

Her R birim zamanda stok kontrol edilir, eğer stok düzeyi s birimin altında ise S birime kadar sipariş verilir, s birimin üzerinde ise sipariş verilmez. Bu model (s,S) ve R,S) sistemlerinden oluşmuş bir kombinasyondur. (s, S) sisteminin R=0 veya (R,S) sisteminin s=S-1 halidir (Silver, Pyke ve Peterson; 1998: 237). Tek ürünlü stok sistemlerinde belli varsayımlar altında bu yöntemin, ikmal, sipariş ve stok azalması maliyetleri yönünden diğer yöntemlere göre daha üstün olduğu söylenebilir (Zheng ve Federgruen; 1991: 654).

(R,s,S) stok kontrol modelindeki s ve S gibi sınırların tespiti için birçok yöntem kullanılabilir. Zheng ve Federgruen (1991) talebin kesikli dağıldığı durumlarda kullanılabilecek yeni ve basit bir algoritma geliştirmişlerdir. Bu algoritma dışında ise kullanılan diğer yöntemler genelde sezgiseldir (Silver, Pyke ve Peterson; 1998: 336-341). Ehrhardt (1979 ve 1984) optimum değerlerin bulunması için sezgisel bir yöntem keşfetmiş, ardından bu yöntemi sipariş süresinin rassal dağılması durumunda incelemiştir. Schneider (1978) ise belli hizmet düzeyinde yeniden sipariş noktasını incelemiştir.

Bu dört stokastik stok politikasıyla, ABC tipi sınıflandırma da göz önüne alındığında; A tipi stok kalemleri için (s,S) ve (R,s,S); B tipi stok kalemleri için (s,Q) ve (R,S) stok kontrol politikaları daha uygun olmaktadır (Silver, Pyke ve Peterson; 1998: 241).

2. MARKOV KARAR SÜRECİ

Genel anlamda Markov karar süreci incelendiğinde optimum politikanın belirlenebilmesi için her politikayı oluşturan kararların ve bu karar anında seçilecek hareketin belirlenmesi gerekir. Daha önce açıklanmış olan tüm stok kontrol modelleri gerçekte birer politika iken, bu stok modellerinde, stok düzeyinin hangi durumda iken ne kadara çıkarılacağı veya ne kadar sipariş verileceği hakkında oluşturulmuş tüm belirlemeler, o politikaya ait kararları oluşturmaktadır. Bu çalışmada yeni bir model (politika) kurarak problemi bu şekilde optimum kılma hususu ele alınmamış, periyodik gözden geçirmeye dayalı (R,s,S) ve (R,S) stok kontrol modelleri *birim zamanda beklenen ortalama maliyet* hesabı yönünden karşılaştırılarak hangisinin daha iyi sonuç verdiği üzerinde durulmuştur.

2.1. Markov Zinciri ve Durum Uzayı

Rassal değişkenlerin oluşturduğu sürecin, gelecekteki durumuna ilişkin olasılık değeri, bilinen mevcut duruma bağlı ve önceki durumların bilinmesini gerektirmeden bulunabiliyorsa bu model Markov zinciri özelliği taşımaktadır (Taylor ve Karlin, 1984; 67). Yani Markov zinciri bir stokastik süreçtir ve sürecin gelecekteki davranışı yalnızca şimdiki durumdan etkilenir; önceki durumlara bağlı değildir (Saldana ve Changho, 2000: 204).

Bir stokastik kesikli-durum süreci; bu süreçte bir sonraki durum yalnızca mevcut duruma bağlıysa, daha önceki durumlarla ilişiği yoksa, Markov zinciri olarak anılır. Bu zincir; iki ardışık durum arasındaki zaman; üssel dağılmışsa Sürekli-Zaman Markov Zinciri, geometrik dağılmışsa Kesikli-Zaman Markov Zinciri olarak adlandırılır (Dayar, 1994: 2).

Zincirin tüm mümkün değerleri negatif olmayan tamsayılarla sembolize edilmiştir. Burada $X_t=i_t$ ise:

$$P\left\{X_{t+1}=i_{t+1}\middle|X_t=i_t,........,X_0=i_0\right\}=P\left\{X_{t+1}=i_{t+1}\middle|X_t=i_t\right\} \quad \mathbf{1}$$

şeklinde gösterilen denklem Markov zinciri olacaktır. Burada, bir sonraki zamanda oluşacak durum, yalnızca şimdiki zamandan yani X_t durumundan etkilenecek; geçmiş zamanlardaki durumlardan tamamen bağımsız olacaktır (Ross, 2003: 181).

$n \geq 1$ olmak üzere n periyot boyunca gerçekleşen toplam talep olasılıklı olacağından, toplam talep $\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...\xi_n$ şeklinde rassal değişkenleri oluşturacaktır. Bu rassal değişken ξ_n'i k notasyonuyla ifade ettiğimizde, k'nın gerçekleşme olasılığı Denklem 2'deki gibi olacaktır. Bu denklemde *n.* periyottaki talebin *k* miktarı kadar olma olasılığı gösterilmiştir.

$$a_k = P(\xi_n = k), \quad k = 0,1,2,3,4......... \quad \mathbf{2}$$

(R,s,S) modeline göre, kontrolü yapılan zaman noktası (t_n), $t_n = nR, n \geq 1$ olarak gösterilebilir.Bu da kesikli zamanı ifade eder. Dönem içinde gerçekleşen talep sonunda, stok düzeyi belli olacak, yani gerçekleşen k miktardaki talep, bir sonraki dönemin başındaki $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ şeklinde ifade edilen stok düzeyini belirleyecektir. Dolayısıyla x_n de ξ_n gibi rassal değişken olacaktır. Stok düzeyi x_n, sipariş noktası s'den büyük , küçük ya da eşit olabilir. Eşit veya küçük olduğunda stok düzeyinin S miktarına ulaşacak kadar sipariş verilir.

Sonuçta, stok düzeyi x_{n+1}, x_n'in ne olduğuna göre değişecektir (Denklem 3).

$$x_{n+1}\begin{cases}\left(S-\xi_{n+1}\right) & X_n \leq s,\\ \left(X_n-\xi_{n+1}\right) & X_n > s\end{cases} \quad \mathbf{3}$$

Bu denklem, yöneticinin karar anındaki hareketini belirleyecek; x_{n+1}'in ne olduğunu bilmek sipariş vermeyi veya vermemeyi doğuracaktır. O dönem içindeki toplam talep, dönemin stok düzeyini belirler, eğer bir önceki dönem sipariş verildiyse stok düzeyi $x_{n+1} = \left(S - \xi_{n+1}\right)$ olacaktır, eğer sipariş verilmediyse de o dönem *s*'den büyük bir miktar olan x_n'den stok açılır ve yine ξ_{n+1} kadar gerçekleşen talep sonunda karar anında stok düzeyi $x_{n+1} = \left(X_n - \xi_{n+1}\right)$ olur. Sonuçta x_{n+1} rassal değişkeni ise x_n ve ξ_{n+1}'e bağlı olarak değişmektedir. Burada ξ_{n+1}'in zamandan bağımsız olduğu görülmektedir. Yani talep zamandan etkilenmemektedir. Stok düzeyini gösteren x_n rassal değişkeni durum olarak tanımlandığında, bir sonraki durum da ancak bir önceki durumdan etkileneceğinden bahsi geçen (R,s,S) stok kontrol modeli, Markov zinciri özelliği gösterecektir.

2.2. Geçiş Olasılıkları

Stok durumunun kontrolünün yapıldığı zaman noktasında (t_n), $t_n = nR, n \geq 1$, stok düzeyini ifade eden x_n=*i* olduğunda, *i*'nin değerine bağlı olarak gerçekleşen talep miktarı ξ_{n+1}'den sonra x_{n+1} belirecektir. Tabi ki stok düzeyi x_n iki şekilde olabilir, ya *0* ile *s* arasındadır ya da *s*'den büyük ve *S*'ye kadardır. *j*; bir dönem sonraki x_{n+1}'dir, yani *n+1* dönemindeki stok düzeyini belirtmektedir.

2.2.1. n periyot sonundaki stok düzeyi, 0 ile s arasında ise, n. periyotta sipariş verilmiş ve stok düzeyi *n+1* periyodunun başında S kadar oluşmuştur. *n+1* periyodundaki talep miktarı ξ_{n+1} 'nın değeri ise *j* 'yi etkileyecektir. Markov geçiş matrisinin yazılabilmesi için *i*= x_n durumundan *j*= x_{n+1} durumuna geçişin şartlı olasılığının bulunması gerekmektedir. Bunun sonucunda geçilen durum *j*; ya *0* olacaktır, ya da *0* 'dan büyük ve *S* 'ye kadar olacaktır.

- $n+1$. periyodun talebi (ξ_{n+1}), olabilecek maksimum stok düzeyi kadar veya bu sayıdan yüksekse, j 'nin değeri 0 olacaktır. O takdirde i 'nin; 0 ile s arasındaki bir değer olan x_n olduğu durumda, j'nin 0 olma koşullu olasılığı, y; ancak ve ancak, o periyodun talebi ξ_{n+1}=k'nin, S veya daha çok olmasıyla gerçekleşir. O zaman S veya daha çok talep olma olasılıklarının bulunması ve ardından bu olasılıkların hepsinin toplanması, belirtilen şartlar altında, $i=x_n$ durumundan $j=0$ durumuna geçişinin koşullu olasılığını verecektir (Denklem 4).

$$P(X_{n+1}=0|X_n=i)=P(S-\xi_{n+1}\leq 0)=P(\xi_{n+1}\geq S)=\sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k \tag{4}$$

- periyodun talebi (ξ_{n+1}), 0 veya S birime kadarsa, x_{n+1} kesinlikle 0 olmayacaktır, o takdirde x_{n+1}=j; 0'dan büyük olacak fakat S'ye kadar olacaktır. Yani $j=1, 2 ..., S$ olabilir. Örneğin j'nin 1 olabilmesi için ξ_{n+1}'in S-1, 2 olabilmesi için S-2, 3 olabilmesi içinse S-3 ve S olabilmesi içinse S-S=0 olması gerekecektir. Bu takdirde olabilecek talep 0, 1, 2 ,3 ....S-1 kadardır. Kısacası $j=S-\xi_{n+1}$'dir. Herhangi bir $j=x_{n+1}$ değerinin $i=x_n$ durumundan sonraki şartlı olasılığı, S-j sayıdaki talebin bulunması ile ortaya çıkacaktır. Örneğin i=5 S=22 s=7 ise j'nin 12 olma olasılığı; 22-12=10 birim talep olma olasılığının bilinmesiyle olacaktır. Çünkü dönem başındaki stok miktarı, 7 birimin altında olduğundan, stok kaleminden 17 birim sipariş verilerek stok düzeyi 22 birime çıkarılmıştır.Dönemin sonundaki stok miktarının 12 birim olması için dönem talep miktarının 10 birim olarak gerçekleşmesi gerekmektedir. O taktirde dönem içindeki talep miktarının gerçekleşme olasılıkları, stok miktarlarındaki geçiş olasılıklarını verecektir. Genel gösterimi de Denklem 5 'deki gibi olacaktır.

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(S-\xi_{n+1}=j)=P(\xi_{n+1}=S-j)=\alpha_{S-j} \tag{5}$$

2.2.2. n periyot sonundaki stok düzeyi, s ile S arasında ise, n. Periyodun sonunda sipariş verilmemiş ve stok durumu $n+1$ döneminin başında yine i kadar oluşmuştur. Markov geçiş matrisinin oluşturulabilmesi için, j'nin 0, 0 ile i ve i'den büyük S'den küçük olabilecek durumlarını incelemek gerekecektir.

- J'nin 0 olabilmesi için, periyodun talebi ξ_{n+1} veya k'nin i kadar veya daha çok olması gerekmektedir. O takdirde $n+1$ periyodundaki i veya daha çok talep miktarının gerçekleşme olasılıklarını bulup hepsini toplamak $j=0$ koşullu olasılığını verecektir (Denklem 6).

$$P(X_{n+1}=0|X_n=i)=P(i-\xi_{n+1}\leq 0)=P(\xi_{n+1}\geq i)=\alpha_k \tag{6}$$

- J'nin i ile 0 arasında olma olasılığı, ξ_{n+1}'nin 0 veya i-1 olması ile gerçekleşir.$j=i-\xi_{n+1}$ olacaktır. Örneğin, s=12, S=30, i=16 ise j=5 olma olasılığı için, ξ_{n+1}=11 olma olasılığının bulunması, yani i-j sayıda talep olma olasılığının bulunması gerekir (Denklem 7).

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(i-\xi_{n+1}=j)=P(\xi_{n+1}=i-j)=\alpha_{i-j} \tag{7}$$

- J'nin i'den büyük olma olasılığı sıfırdır, çünkü periyodun başında sipariş verilmemiştir, ξ_{n+1} sıfır dahi olsa j yine i'den büyük olamaz, bu olasılığın hesabı anlamsızdır ve Denklem 8'de gösterildiği gibi sıfıra eşittir.

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=0 \tag{8}$$

2.3. Geçiş Matrisinin Yazılması

Markov geçiş matrisi Pij'lerden oluşmaktadır, yani i durumundan, j durumuna geçişlerin şartlı olasılıklarını vermektedir. Bu olasılıklar, Denklem 5, 6, 7 ve 8'den alınarak Denklem 9'daki gibi olacaktır.

$$Pij\begin{cases}\sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & 0\leq i\leq s \ \ ve \ \ j=0\\ \alpha_{S-j} & 0\leq i\leq s \ \ ve \ \ 1\leq j\leq S\\ \sum_{k=i}^{\infty}\alpha_k & s+1\leq i\leq S \ \ ve \ \ j=0\\ \alpha_{i-j} & s+1\leq i\leq S \ \ ve \ \ 1\leq j\leq i\\ 0 & s+1\leq i\leq S \ \ ve \ \ j\geq i+1\end{cases} \tag{9}$$

Buradan çıkarılacak geçiş matrisi Şekil 1'de gösterilmiştir. Her satır toplamı 1'e eşit olacağından ve sınırlı ve kesikli durum söz konusu olacağından bu matris kararlı bir yapı haline girecektir.

$$
\begin{array}{c|cccccc|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & \cdots & s-1 & s & s+1 & \cdots & S-1 & S \\
0 & \sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-1} & \alpha_{S-2} & \cdots & \alpha_{S-s+1} & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \\
1 & \sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-1} & \alpha_{S-2} & \cdots & \alpha_{S-s+1} & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \\
2 & \sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-1} & \alpha_{S-2} & \cdots & \alpha_{S-s+1} & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
s-1 & \sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-1} & \alpha_{S-2} & \cdots & \alpha_{S-s+1} & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \\
s & \sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-1} & \alpha_{S-2} & \cdots & \alpha_{S-s+1} & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \\
\hline
s+1 & \sum_{k=s+1}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{s} & \alpha_{s-1} & \cdots & \alpha_{2} & \alpha_{1} & \alpha_{0} & \cdots & 0 & 0 \\
s+2 & \sum_{k=s+2}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{s+1} & \alpha_{s} & \cdots & \alpha_{3} & \alpha_{2} & \alpha_{1} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
S-1 & \sum_{k=S-1}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-2} & \alpha_{S-3} & \cdots & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \alpha_{S-s-2} & \cdots & \alpha_0 & 0 \\
S & \sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-1} & \alpha_{S-2} & \cdots & \alpha_{S-s+1} & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0
\end{array}
$$

Şekil 1: (R,s,S) Stok Politikasına Ait Stok Düzeyindeki Değişimi Gösteren 1 Dönemlik Geçiş Matrisi

2.4. Kararlı Hal

Küçültülemez bir ergodik Markov zinciri için durum uzayını gösteren $\pi = [\pi_1, \pi_2, ..., \pi_s]$ verildiğinde $\lim_{n\to\infty} P^n$ Denklem 10'daki gibi olacaktır (Winston, 2004: 934). Bu denklemden de Denklem 11 yazılabilir (Ross, 2003: 200).

$$
\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \pi_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \pi_s \end{bmatrix} \tag{10}
$$

$$
\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n \tag{11}
$$

$\pi = [\pi_1, \pi_2, ..., \pi_s]$ şeklinde verilen vektör, kararlı-hal dağılımı veya denge dağılımı olarak adlandırılır (Medhi, 2003: 5). Sonuçta, uzun dönemli dönemleri ifade eden geçiş matrisi Denklem 12'de gösterildiği gibi aynı değerlere ulaşacaktır.

$$
\begin{aligned}
\pi_j &= P_{ij}^n = P_{ij}^{n+1} \\
P_{ij}^{n+1} &= P_{ik}^n p_{kj} \\
\pi_j &= \sum_{k=1}^{k=s} \pi_k p_{kj} \\
\pi &= P.\pi
\end{aligned} \tag{12}
$$

Denklem 12'ye ait sonsuz sayıda sonuç elde edilebilir, kararlı-halin tek ve negatif olmayan değerlerine ulaşabilmek içinse $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_s = 1$ olacak şekilde Denklem 13'ü sağlamalıdır (Ross, 2003: 201).

$$\sum_{j=o}^{\infty} \pi_j = 1 \qquad \mathbf{13}$$

2.5. Markov Karar Süreci Uyumu

Markov karar süreci, 5 öğeden oluşmaktadır. Bunlar; kararın verileceği tarih (an), durumlar, eylem (hareket), geçiş olasılıkları ve verilen kararın karşılığıdır (Puterman, 1994: 17).

Kararların tümü karar tarihinde verilir. Karar tarihini ifade eden, pozitif değerli T ifadesine ait küme; sürekli veya kesikli; sonlu veya sonsuz olabilir. Kesikli zaman söz konusu olduğunda zaman; periyotlara bölünmüştür. (R,s,S) stok modeli, kontroller R periyodunda yapıldığından kesikli zamanı göstermektedir.

Sistem, her karar tarihinde M ile ifade edilen durumlara ait kümeden i gibi bir duruma ulaşır.

İçinde bulunduğu i durumundayken de, gerçekleştirebileceği A_i ile ifade edilen, mümkün eylemlerden biri seçilir. A_i ve M zaman ile değişmezler, sabittirler. A_i de sonlu, sonsuz veya kesikli kesiksiz diye ayrılabilir. Yine (R,s,S) stok modelinde A_i hem kesikli hem de sonludur.

t karar tarihinde ve i durumundayken seçilen $a \in A_i$ eyleminin sonunda, $r_t(i,a)$ ile ifade edilen beklenen karşılık alınır. Bir sonraki karar tarihi $t+1$'e ait oluşabilecek durumların olasılık dağılımı ise; $p_t(..|i,a)$ ile gösterilebilir. r pozitif olursa kazanç, negatif olursa maliyet olacaktır. Yine çalışmanın konusu olan stok modelinde kazanç değil maliyetler ele alınmıştır.

Gerçekleşecek karşılık, sistemin $t+1$ anındaki durumuna bağlıysa, $r_t(i,a,j)$ ile ifade edilir. Bu takdirde $r_t(i,a)$, yani t anındaki beklenen değer Denklem 14'te gösterilmiştir. Denklemdeki $p_t(j|i,a)$ ifadesi *geçiş olasılıkları fonksiyonu* olarak adlandırılır. Denklem 13'ten ötürü de toplam olasılık bire eşit olmalıdır.

$$r_t(i,a) = \sum_{j \in S} r_t(i,a,j) p_t(j|i,a)$$

$$\sum_{j \in S} p_t(j|i,a) = 1 \qquad \mathbf{14}$$

Sonuçta, $\{T, M, A_i, p_t(j|i,a), r_t(i,a)\}$ ifadelerinden oluşan karar sürecine Markov Karar Süreci denmektedir. Buradaki Markov ismi, geçiş olasılıklarının ve karşılıkların yalnızca bir önceki duruma bağlı olmasından ötürüdür, her stokastik karar sürecinin Markov özelliği göstermesi beklenemez.

Markov zinciri özelliği gösteren (R,s,S) stok politikası, yöneticinin her t tarihinde $a \in A_i$ gibi bir hareketi seçerek bir karar vermesi gerektiğinden ve bu karardan ötürü de bir maliyet unsuruyla karşılaştığından bu politikanın bir Markov Karar Süreci politikası olduğu görülür. Bu şekildeki bir politika hem durağan hem de deterministiktir (Hillier ve Liberman, 1057: 2001).

(R,s,S) stok kontrol modelini R_b ile ifade edilen optimum politika olduğunda, $d_i(R)$ de bu politika dahilinde i durumundayken alınan kararı gösterir. Bu modelde $a \in A_s$ gibi hareket (eylem) seçilebilir. Bu hareketler; stok düzeyini, S seviyesine kadar çıkaracak siparişi vermek veya hiç sipariş vermemektir. Bu söylenenler Tablo 1 ve Tablo 2'de açıkça görülebilir. Tablo 1'den karar sayısının *S-s+1* adet olduğu görülmektedir. R_b politikası dahilindeki kararların hangi hareketle açıklandığı ise Tablo 2'deki gibidir. Örneğin, sistem *0* durumunda ise stok düzeyi sıfır birimdir ve alınacak karar *K* kararıdır, *K* kararı ise *S* birim sipariş verilmesi gerektiği hareketini göstermektedir. Bu kesin bir karardır, yani bu durum için farklı bir hareket tarzı yoktur. Diğer durumlarda da kararlar bu şekilde olduğundan tüm bu kararların toplamı bir politika oluşturmaktadır. Çalışmanın konusu da (R,s,S) stok politikasının üzerine olacağından optimum politika olarak kabul edilmektedir.

Tablo 1: (R,s,S) Stok Politikasına Ait Kararlar

Poli-tika	Tanımı	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	... ...	$d_{s-1}(R)$	$d_s(R)$	$d_{s+1}(R)$	$d_{s+2}(R)$	... ...	$d_{S-1}(R)$	$d_S(R)$
R_b	s+1 ve üstü durumlarda S durumuna geçiş yap	K	K-1	K-2		2	1	0	0	0	0	0